Generalizzazione di alcuni teoremi dei sig.¹ Hermite, Brioschi e Mittag-Leffler, sulle equazioni differenziali lineari del 2° ordine.

(Nota di F. CASORATI, in Pavia.)

I.

Il sig. HERMITE, proseguendo l'esposizione delle sue applicazioni delle funzioni ellittiche, nei *Comptes rendus* del 29 dicembre 1879 fa notare la seguente proprietà.

« Considérons en général une équation linéaire du second ordre à laquelle nous donnerons la forme suivante :

$$PX'' - P'X' + QX = 0,$$

où P et Q sont des fonctions quelconques de la variable u , et dont l'intégrale est

$$X = CA + C'B.$$

Je dis que, si l'on connaît le produit de deux solutions particulières (A et B), et qu'on fasse en conséquence

$$AB = R,$$

nous pourrons obtenir l'équation qui aurait pour solution l'expression plus générale

$$CAe^{pu} + C'Be^{-pu}.$$

E dà infatti le espressioni dei coefficienti della nuova equazione in termini della costante p e delle funzioni P , Q , R e loro derivate.

Il sig. BRIOSCHI, nel fasc. 1° del tomo 10 degli *Annali di Matematica*, osserva che « l'esposto teorema è suscettibile di una importante generalizzazione » potendosi formare anche l'equazione che avrebbe per soluzione l'espressione

$$CAf_1 + C'Af_2,$$

essendo f_1, f_2 funzioni qualunque, date, della variabile u .

Ed egli pure somministra le espressioni dei coefficienti della nuova equazione in termini dei coefficienti dell'altra e delle funzioni R, f_1, f_2 e loro derivate.

In seguito a questa generalizzazione, il sig. HERMITE scrive al sig. BRIOSCHI (*Annali di Matematica*, tomo 10, fasc. 2°):

« Dans votre récent article: *Di una proprietà delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine*, vous avez montré par un nouvel exemple, qui m'a beaucoup intéressé, quel rôle joue le produit de deux solutions d'une équation linéaire du second ordre. Permettez-moi de vous indiquer encore une circonstance où intervient ce produit, qui m'a été suggérée par mes recherches sur l'équation de LAMÉ, mais que je présenterai, en considérant l'équation générale

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Supposons que, l'intégrale étant (*):

$$y = Cu + C'v,$$

on connaît la quantité $uv = F(x)$; je dis qu'au moyen de $F(x)$ et des coefficients p, q il sera aisé de former l'équation du second'ordre, ayant pour intégrale l'expression

$$z = Cu^\omega + C'v^\omega,$$

quelque soit l'exposant ω .

E passa a trovare i coefficienti dell'equazione in z espressi in termini di ω, p, q, F, F' .

Il sig. MITTAG-LEFFLER, finalmente, scrive al sig. HERMITE (*Comptes rendus* del 13 dicembre 1880), che si può generalizzare di molto questa osservazione, potendosi, cioè, formare mediante p, q, F, F', F'' i coefficienti della equazione di cui due integrali U, V abbiano con u, v le relazioni

$$\frac{V'}{V} = \varphi\left(x, \frac{v'}{v}\right), \quad \frac{U'}{U} = \varphi\left(x, \frac{u'}{u}\right),$$

(*) Per evitar confusione, in riguardo di ciò che devo scrivere in seguito, sostituisco alle majuscole U, V , impiegate dal sig. HERMITE, le minuscole u, v . La variabile indipendente, qui ed in seguito, è significata, non più da u , ma da x .

dove $\varphi(x, \xi)$ significa una funzione razionale di ξ , i cui coefficienti sono date funzioni della x .

Ed espone il modo di trovare quei coefficienti.

II.

Ora, io mi propongo di cercare la sorgente di queste proprietà, ossia la proprietà più generale di cui esse sono casi particolari.

Quando si suppongono date o si cercano soluzioni $u, v, \dots$ di una equazione differenziale, lineare, omogenea

$$y^{(m)} + p y^{(m-1)} + q y^{(m-2)} + \dots = 0,$$

si allude, per lo più, a funzioni determinate soltanto a meno di un fattore costante. Per riferirsi a funzioni totalmente determinate, conviene prendere in considerazione i rapporti delle soluzioni alle rispettive derivate $u', v', \dots$

Qui considererò appunto questi rapporti

$$\frac{u'}{u}, \quad \frac{v'}{v}, \dots, \quad (1)$$

invece delle soluzioni $u, v, \dots$. I coefficienti $p, q, \dots$ dell'equazione differenziale si possono esprimere in termini di m di questi rapporti, i quali corrispondano ad m soluzioni linearmente indipendenti tra loro. Per questo basta risolvere le m equazioni

$$\begin{aligned} \frac{u'^m}{u} + p \frac{u'^{m-1}}{u} + q \frac{u'^{m-2}}{u} + \dots &= 0 \\ \frac{v'^m}{v} + p \frac{v'^{m-1}}{v} + q \frac{v'^{m-2}}{v} + \dots &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

rispetto alle incognite $p, q, \dots$ e nelle espressioni, che ne risultano, sostituire ai rapporti $\frac{u''}{u}, \frac{v''}{v}, \frac{u'''}{u}$, ecc. i secondi membri delle formole

$$\begin{aligned} \frac{u''}{u} &= \left(\frac{u'}{u}\right)' + \left(\frac{u'}{u}\right)^2 \\ \frac{u'''}{u} &= \left(\frac{u'}{u}\right)'' + 3 \frac{u'}{u} \left(\frac{u'}{u}\right)' + \left(\frac{u'}{u}\right)^3 \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Similmente, invece del prodotto $F = u \cdot v \dots$ delle soluzioni, prenderò in considerazione il rapporto

$$\frac{F'}{F} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \dots,$$

che, d'ora innanzi designerò con G_1 , ponendo in generale

$$G := \frac{u^{(v)}}{u} + \frac{v^{(v)}}{v} + \dots$$

Rispetto a queste funzioni G , cominciamo a notare, che, da $m-1$ fra esse e dall'equazione differenziale si deducono tutte le altre, come dall'equazione differenziale e da $m-1$ fra i termini della serie

$$\frac{u'}{u}, \quad \frac{u''}{u}, \quad \frac{u'''}{u}, \dots$$

si dedurrebbero tutti gli altri termini. Così, in particolare, essendo

$$\frac{u^{(m)}}{u} = -p \frac{u^{(m-1)}}{u} - q \frac{u^{(m-2)}}{u} - \dots,$$

sarà, evidentemente,

$$\frac{G_m}{G_0} = -p \frac{G_{m-1}}{G_0} - q \frac{G_{m-2}}{G_0} - \dots,$$

dove G_0 significa il numero delle funzioni $u, v, \dots$.

Le relazioni tra le funzioni simmetriche dei rapporti (1) e loro derivate e le funzioni G e loro derivate sono il fondamento della nostra ricerca. Perciò, presento subito queste relazioni, limitandomi a quelle dei gradi 1, 2, 3 rispetto agli indici di derivazione (*).

$$G_1 = \sum \frac{u'}{u} \tag{2}$$

$$\left. \begin{aligned} G_2 &= \sum \frac{u''}{u} \\ G'_1 &= \sum \frac{u''}{u} - \sum \frac{u'^2}{u^2} \\ G_1^2 &= \sum \frac{u'^2}{u^2} + 2 \sum \frac{u'v'}{uv} \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

(*) I sommatori vanno intesi come si suole nella teorica delle funzioni simmetriche delle radici di un'equazione algebrica. Così, per esempio, ove fossero tre le soluzioni in considerazione, cioè u, v, w , si dovrebbe ritenere

$$\sum \frac{u'v'}{uv} = \frac{u'v'}{uv} + \frac{u'w'}{uw} + \frac{v'w'}{vw}.$$

$$\begin{aligned}
 G_3 &= \sum \frac{u'''}{u} \\
 G'_2 &= \sum \frac{u'''}{u} - \sum \frac{u'' u'}{u u} \\
 G_2 G_1 &= \sum \frac{u'' u'}{u u} + \sum \frac{u'' v'}{u v} \\
 G''_1 &= \sum \frac{u'''}{u} - 3 \sum \frac{u'' u'}{u u} + 2 \sum \frac{u'^3}{u^3} \\
 G'_1 G_1 &= \sum \frac{u'' u'}{u u} + \sum \frac{u'' v'}{u v} - \sum \frac{u'^3}{u^3} - \sum \frac{u'^2 v'}{u^2 v} \\
 G_1^3 &= \sum \frac{u'^3}{u^3} + 3 \sum \frac{u'^2 v'}{u^2 v} + 6 \sum \frac{u' v' w'}{u v w}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

III.

Prendiamo, ormai, a considerare particolarmente il caso di un'equazione del secondo ordine, cioè di $m=2$. In tal caso, data G_1 , restano determinate tutte le altre G . Per G_2 abbiamo

$$G_2 = -p G_1 - 2q.$$

Quindi restano determinati tutti i primi membri delle (3) e quindi anche i sommatori

$$\sum \frac{u'^2}{u^2} \quad \text{e} \quad \sum \frac{u' v'}{u v}.$$

Per quest'ultimo sommatorio abbiamo

$$\sum \frac{u' v'}{u v} = \frac{1}{2} (G_1^2 + G'_1 - G_2). \tag{5}$$

Prendendo in considerazione soltanto due rapporti (1), restano dunque determinate le quantità

$$\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} = G_1, \quad \frac{u'}{u} \cdot \frac{v'}{v} = \frac{1}{2} (G_1^2 + G'_1 - G_2), \tag{6}$$

che sono i coefficienti dell'equazione algebrica avente per radici i detti rapporti.

Da quì risulta, che, se cogli argomenti x , $\frac{u'}{u}$, $\frac{v'}{v}$ si costituisca in qualsivo-

glia modo una formola

$$f\left(x, \frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}\right);$$

questa formola si potrà esprimere in termini di x, G_1, G'_1, G_2 , sostituendo alle radici $\frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}$ le loro espressioni in termini dei coefficienti, ossia dei secondi membri delle (6). E se la formola f sarà razionale e simmetrica rispetto a queste radici, il risultato di questa sostituzione sarà razionale rispetto a G_1, G'_1, G_2 . E poichè G_2 è eguale a $-pG_1 - 2q$, il risultato riuscirà razionale in G_1, G'_1, p, q .

E però, in particolare, se vogliasi formare la equazione differenziale

$$Y'' + PY' + QY = 0$$

per la quale due rapporti (1), che significheremo con

$$\frac{U'}{U}, \quad \frac{V'}{V},$$

debbano essere funzioni date della x e dei rapporti $\frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}$, cioè

$$\frac{U'}{U} = \Phi\left(x, \frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}\right), \quad \frac{V'}{V} = \Psi\left(x, \frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}\right);$$

basterà formare in prima le espressioni di P e Q in termini di $\frac{U'}{U}, \frac{V'}{V}$ ossia di Φ, Ψ e loro derivate, come fu indicato nel § II, e poi introdurre i coefficienti (6) invece delle radici $\frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}$.

Il primo dei casi considerati dal sig. HERMITE si ottiene ponendo

$$\frac{U'}{U} = \frac{u'}{u} + p, \quad \frac{V'}{V} = \frac{v'}{v} - p.$$

Il secondo, ponendo

$$\frac{U'}{U} = \omega \frac{u'}{u}, \quad \frac{V'}{V} = \omega \frac{v'}{v}.$$

Si ottiene il caso del sig. BRIOSCHI, ponendo

$$\frac{U'}{U} = \frac{u'}{u} + \alpha(x), \quad \frac{V'}{V} = \frac{v'}{v} + \beta(x),$$

così che in luogo dei simboli u_1, u_2 , da lui usati, qui abbiamo $e^{\int \alpha dx}$, $e^{\int \beta dx}$.

Finalmente, si ha il caso del sig. MITTAG-LEFFLER, prendendo per Φ e Ψ una medesima formola φ , composta con gli argomenti x ed $\frac{u'}{u}$ per l'una, e con x e $\frac{v'}{v}$ per l'altra, cioè ponendo

$$\frac{U'}{U} = \varphi\left(x, \frac{u'}{u}\right), \quad \frac{V'}{V} = \varphi\left(x, \frac{v'}{v}\right).$$

IV.

Passiamo ora a considerare le equazioni differenziali di terzo ordine. Sieno u, v, w tre soluzioni (linearmente indipendenti) della equazione

$$y''' + p y'' + q y' + r y = 0.$$

Per formare l'equazione algebrica avente per radici i rapporti

$$\frac{u'}{u}, \quad \frac{v'}{v}, \quad \frac{w'}{w},$$

importa di trovare le tre funzioni simmetriche

$$\sum \frac{u'}{u}, \quad \sum \frac{u'v'}{uv}, \quad \sum \frac{u'v'w'}{uvw}, \quad (7)$$

l'ultima delle quali nel presente caso consta del solo termine $\frac{u'v'w'}{uvw}$.

Ora, non basta che sia data la prima per poter trovare le altre due; ma è necessario di supporre date due funzioni simmetriche. Qui si possono fare diverse supposizioni. Le più semplici vengono suggerite dalle relazioni (3), e consistono nel supporre date

$$\sum \frac{u'}{u} \quad \text{e} \quad \sum \frac{u''}{u}$$

oppure

$$\sum \frac{u'}{u} \quad \text{e} \quad \sum \frac{u'^2}{u^2}$$

oppure

$$\sum \frac{u'}{u} \quad \text{e} \quad \sum \frac{u'v'}{uv}.$$

Fatta una qualsivoglia di queste supposizioni, si dovranno riguardare come date G_1 e G_2 e quindi ogni altra G . Per G_3 si avrà

$$G_3 = -p G_2 - q G_1 - 3r.$$

E quindi, ricorrendo alle sei equazioni (4), i cui primi membri saranno noti, se ne caveranno ordinatamente i valori dei sei diversi sommatorî che stanno nei secondi membri, l'ultimo dei quali è appunto il terzo dei sommatorî (7). Per questo si trova (*)

$$\sum \frac{u' v' w'}{u v w} = \frac{1}{6} (G_1^3 + 2 G_3 - 3 G'_2 + G''_1 + 3 G'_1 G_1 - 3 G_2 G_1). \quad (8)$$

Vogliasi ormai formare l'equazione

$$Y''' + P Y'' + Q Y' + R Y = 0$$

che debba avere le soluzioni U, V, W legate alle u, v, w dalle relazioni

$$\begin{aligned} \frac{U'}{U} &= \Phi\left(x, \frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}, \frac{w'}{w}\right), & \frac{V'}{V} &= \Psi\left(x, \frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}, \frac{w'}{w}\right), \\ \frac{W'}{W} &= X\left(x, \frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}, \frac{w'}{w}\right). \end{aligned}$$

Basterà formare, come si disse nel § II, le espressioni di P, Q, R in termini di

$$\frac{U'}{U}, \quad \frac{V'}{V}, \quad \frac{W'}{W},$$

ossia di Φ, Ψ, X , e poi introdurre i coefficienti (2), (5), (8), cioè

$$-G_1, \quad \frac{1}{2}(G_1^2 + G'_1 - G_2), \quad -\frac{1}{6}(G_1^3 + 2G_3 - 3G'_2 + G''_1 + 3G'_1 G_1 - 3G_2 G_1) \quad (9)$$

invece delle radici $\frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}, \frac{w'}{w}$.

V.

Terminerò osservando, che non si può nella stessa maniera risolvere per le equazioni del quarto ordine il problema risoluto per quelle del secondo e del terzo. Perocchè, mentre in ciascuno dei gruppi (2), (3), (4) vi hanno tanti sommatorî quant'è il numero delle equazioni, nel gruppo immediatamente succes-

(*) Conservo il segno Σ per ricordare che questa relazione sussiste qualunque sia il numero dei rapporti (1); al pari della (5), e di qualunque altra che scaturisca puramente dalle relazioni fondamentali (2), (3), (4), ecc.

sivo vi hanno 14 sommatori e soltanto 13 equazioni. I sommatori sono

$$\begin{aligned} \sum \frac{u^{IV}}{u}, \quad \sum \frac{u''' u'}{uu}, \quad \sum \frac{u''' v'}{uv}, \quad \sum \frac{u''^2}{u^2}, \quad \sum \frac{u'' u'^2}{u u^2}, \quad \sum \frac{u'' u' v'}{u u v}, \\ \sum \frac{u'' v''}{u v}, \quad \sum \frac{u'' v'^2}{u v^2}, \quad \sum \frac{u'' v' w'}{u v w}, \quad \sum \frac{u'^4}{u^4}, \quad \sum \frac{u'^3 v'}{u^3 v}, \quad \sum \frac{u'^2 v'^2}{u^2 v^2}, \\ \sum \frac{u'^2 v' w'}{u^2 v w}, \quad \sum \frac{u' v' w' t'}{u v w t}; \end{aligned}$$

ed i primi membri delle equazioni sono

$$\begin{aligned} G_4, \quad G'_3, \quad G_3 G_1, \quad G'_2 G_1, \quad G''_2, \quad G_2^2, \quad G_2 G'_1, \quad G_2 G_1^2, \\ G''_1, \quad G''_1 G_1, \quad G'^2_1, \quad G'_1 G_1^2, \quad G^4_1. \end{aligned}$$

Le tre equazioni

$$G_4 = \sum \frac{u^{IV}}{u}, \quad G'_3 = \sum \frac{u^{IV}}{u} - \sum \frac{u''' u'}{u u}, \quad G_3 G_1 = \sum \frac{u''' u'}{u u} + \sum \frac{u''' v'}{u v}$$

contengono soltanto i tre sommatori

$$\sum \frac{u^{IV}}{u}, \quad \sum \frac{u''' u'}{u u}, \quad \sum \frac{u''' v'}{u v}$$

e servirebbero a determinarli; ma le rimanenti dieci equazioni fra i rimanenti undici sommatori non possono servire che ad esprimerne dieci in termini dell'undecimo. Perciò, supposte date, per esempio, G_1 , G_2 e G_3 , non si potrebbe per anco ottenere il valore di

$$\sum \frac{u' v' w' t'}{u v w t},$$

che sarebbe, pel caso di $m=4$, l'ultimo coefficiente dell'equazione algebrica avente per radici

$$\frac{u'}{u}, \quad \frac{v'}{v}, \quad \frac{w'}{w}, \quad \frac{t'}{t};$$

della quale i tre primi coefficienti sono le espressioni (9).