Ueber Thetafunctionen mit zwei Variabeln und die zugehörige Kummer'sche Fläche.

Von

L. SCHLEIERMACHER in Aschaffenburg.

Die Beziehung der Kummer'schen Fläche zu den hyperelliptischen Functionen ($p = 2$), begründet durch die Arbeiten von F. Klein, Cayley, Borchardt, H. Weber und Rohn,*) ist in gleicher Weise der Geometrie dieser Fläche wie der Theorie der Thetafunctionen mit zwei Variabeln zu statten gekommen. Obwohl die Kummer'sche eine allgemeine hyperelliptische Fläche im Sinne des Herrn Picard nicht ist, hat es doch nicht den Anschein, als ob sie aus ihrer vermittelnden Stellung zur Theorie der zugehörigen Functionen durch eine allgemeinere Fläche verdrängt werden sollte. In der That harrt auch heute noch manche Frage, welche die Geometrie der Fläche an jene Theorie richtet, der Beantwortung. Wer die geometrischen Eigenschaften der Fläche erkunden will, ausgehend von ihrer hyperelliptischen Natur, etwa indem er die Weber'sche Darstellung der Punktkoordinaten durch Thetafunctionen zu Grunde legt, wird alsbald einer Lücke gewahr, welche auszufüllen wiederholt als Bedürfniss empfunden worden ist. Es fehlt nämlich an Mitteln für die ungezwungene Erkenntniss der Thatsache, dass die Fläche in Bezug auf gewisse Flächen 2. O. mit ihrer eigenen Reciprocalen zusammenfällt. Der Grund hiervon darf darin gesucht werden, dass es bisher noch niemals durchgeführt wurde, die Ebenenkoordinaten durch Thetafunctionen *derselben* Argumente auszudrücken, wie die Punktkoordinaten. Hierzu findet sich meines Wissens nur in der Preisschrift des Herrn G. Humbert**)

*) Wegen der Litteratur s. Wilibald Reichardt, über die Darstellung der Kummer'schen Fläche durch hyperelliptische Functionen, Nova acta der Ksl. Leop. Carol. Deutschen Akademie d. Naturforscher Bd. L, Nr. 5; oder A. Brill und M. Noether, Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen, Jahresbericht der Deutschen Mathem.-Vereinigung, III, 1893, S. 473.

**) Théorie générale des surfaces hyperelliptiques, Journal de mathématiques, Série IV, t. IX, 1893.

gelegentlich ein Ansatz, welchem aber eine weitere Durchführung, als den eigentlichen Zwecken dieser Abhandlung ferne liegend, nicht folgt.

Im Falle der Weber'schen Darstellung, wo die Punktcoordinaten vier linear unabhängigen Thetaquadraten mit Argumenten u_1, u_2 proportional gesetzt werden, zeigt es sich nun, dass die Ausdrücke für die Ebenencoordinaten ausserordentlich einfach sind: nämlich Producte aus je sechs Thetafunctionen, welche ein Rosenhain'sches Sextupel bilden. Weiter kann man nachweisen, dass diese Producte proportional gesetzt werden können denselben vier Thetaquadraten, wie die Punktcoordinaten, geschrieben jedoch in Argumenten v_1, v_2 , welche mit u_1, u_2 in der Beziehung stehen, dass sowohl für die Summen $u_1 + v_1, u_2 + v_2$, als auch Differenzen $u_1 - v_1, u_2 - v_2$ eine Thetafunction verschwindet. Diese Bedingung ist aber gleichbedeutend mit der Bedingung der vereinigten Lage von Punkt und Ebene, und aus diesem Grunde die Fläche sich selbst reciproc.

Minder einfache Ausdrücke für die Ebenencoordinaten ergeben sich bei der Cayley-Borchardt'schen Darstellung der Punktcoordinaten. Indessen sind auch sie schon um deswillen von Interesse, weil Herr F. Klein*), der von der genannten geometrischen Eigenschaft der Fläche ausging, auf dem umgekehrten Wege zu den oben genannten Beziehungen zwischen den u und v gestossen zu sein scheint und diese benützt hat, um jedem Punkte einen Parameter u , jeder Ebene einen Parameter v zuzuweisen, und hierdurch zu jenen eleganten Configurationen gelangt ist.

Dass die vorstehend geschilderten Entwicklungen auch zu zwei neuen Darstellungsweisen der Punktcoordinaten der Kummer'schen Fläche führen, welche aus den vorgenannten nicht durch Transformation hervorgehen, halte ich der Erwähnung werth. Weiterhin werden in der folgenden Arbeit noch zwei Systeme von Formeln entwickelt, welche für die Theorie der Thetafunctionen an und für sich vielleicht nicht ohne Belang sind, wenn sie auch hier speciell nur im Anschlusse an Fragen auftreten, zu welchen die Untersuchungen der Herren F. Klein und Rohn Anlass bieten. Erstens nämlich Formeln für Darstellung der Thetafunctionen mit doppeltem Argument durch solche mit einfachem, bei gleichen Moduln: diese wurden bereits vor mehreren Jahren durch gütige Vermittelung meines hochverehrten Lehrers, Herrn Noether, der mich zuerst dazu anregte die Theorie der Thetafunctionen mit Rücksicht auf Geometrie zu studiren, im Auszuge veröffentlicht**). Ihre allgemeinere Bedeutung darf darin gefunden werden,

*) Ueber Configurationen, welche der Kummer'schen Fläche zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind. Math. Annalen XXVII.

**) Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Societät zu Erlangen vom 15. Februar 1886.

dass sie zeigen, wie durch drei Parameter in einfacher Weise sämtliche Thetaquotienten rational dargestellt werden können. Hier werden sie zur Aufstellung des sechsfach unendlichen Systems Kummer'scher Flächen benützt, welche eine solche rings berühren. Zweitens werden Formeln für Thetafunctionen von zwei Systemen zu je vier Argumentenreihen entwickelt, die durch eine orthogonale Substitution verbunden sind: diese haben den Zweck die Bedeutung des Abel'schen Theorems in der speciellen Form, in die es Herr Rohn für die Kummer'sche Fläche gebracht, und in der es die Herren F. Klein und G. Humbert weiterhin benützt haben, für die Theorie der Thetafunctionen klar zu legen.

Die Bezeichnung stützt sich im Wesentlichen auf die Arbeiten der Herren Prym und Krazer*), an welche, neben denjenigen des Herrn H. Weber**), die Entwicklung vielfach anknüpft.

§ 1.

Bezeichnungen und Benennungen.

Wir verstehen unter $a_{11}, a_{12} = a_{21}, a_{22}$ die Moduln einer Thetafunction von zwei Variablen u_1, u_2 , welch' letztere vertreten sein mögen durch Wort und Zeichen: *Argument* u . Sind dann $\omega_1, \omega_2, \omega'_1, \omega'_2$ ganze Zahlen, so sind

$$p_{\omega}^{(1)} = \omega_1 a_{11} + \omega_2 a_{12} + \omega'_1 i\pi, \quad p_{\omega}^{(2)} = \omega_1 a_{21} + \omega_2 a_{22} + \omega'_2 i\pi$$

simultane Perioden; wir fassen diese ebenso zusammen in Wort und Zeichen: *Periode* p_{ω} . Zu ihr gehört die *Charakteristik der Elemente* $\omega_1, \omega_2, \omega'_1, \omega'_2$:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega'_1 & \omega'_2 \end{bmatrix} = \omega.$$

Das Symbol der *Summe der Charakteristiken* ω und ϖ ist:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 + \varpi_1 & \omega_2 + \varpi_2 \\ \omega'_1 + \varpi'_1 & \omega'_2 + \varpi'_2 \end{bmatrix} = \omega \varpi.$$

Zwei Charakteristiken, deren entsprechende Elemente mod. 2 dieselben Reste lassen, heissen *congruent* ($\equiv$). Eine *Normalcharakteristik* hat zu

*) Prym, Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel 1882; Krazer, Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen 1882; Krazer und Prym, Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen 1892.

**) H. Weber, Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3, 1876; Ueber die Transformationstheorie der Thetafunctionen, Annali di matematica s. II. t. IX, 1878; Ueber die Kummer'sche Fläche, Borchardt's Journal 84, 1878; Anwendung der Thetafunctionen, Math. Annalen 14, 1878.

Elementen nur 0 oder 1. Es giebt 16 incongruente Charakteristiken und zu jeder gehört eine Thetafunction

$$\begin{aligned} & \vartheta_{[\omega]}(u_1, u_2; a_{11}, a_{12}, a_{22}) \\ &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} e^{\sum_h \sum_k \left(n_h + \frac{1}{2} \omega_h\right) \left(n_k + \frac{1}{2} \omega_k\right) a_{hk} + 2 \sum_h \left(n_h + \frac{1}{2} \omega_h\right) u_h} \\ & \quad (h, k = 1, 2) \end{aligned}$$

welche mit $\vartheta_{\omega}(u)$ oder kurzweg mit u_{ω} bezeichnet werden soll.

Zwei Systeme von Charakteristiken sollen äquivalent heissen, wenn sie in einander übergeführt werden können mit Hilfe der beiden Operationen:

- 1) Substitution der sechs ungeraden Normalcharakteristiken,
- 2) Addition einer Charakteristik ω zu allen des Systems.

Ebenso sollen zwei Systeme von Thetafunctionen, mit den nämlichen Variablen und Moduln, äquivalent heissen, wenn die Systeme ihrer Charakteristiken äquivalent sind.

Ausgezeichnete Systeme sind die *Rosenhain'schen Sextupel* und die *Göpel'schen Quadrupel*.

Die sechs ungeraden Normalcharakteristiken bilden, wie jedes äquivalente System, ein Rosenhain'sches Sextupel. Wir legen ihnen, in irgend einer Reihenfolge, die Ziffern

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \xi, \text{ gelegentlich auch } 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

als Indices bei. Dann ist $\alpha\beta\gamma$ das Symbol einer geraden Charakteristik, und congruent mit $\delta\varepsilon\xi$.

Wir werden, soweit es sich um Systeme handelt, congruente Charakteristiken als nicht verschieden ansehen.

Es giebt nur zwei nichtäquivalente Tripel verschiedener Charakteristiken. Wenn nämlich zwei Charakteristiken κ und λ incongruent sind, können immer nur auf eine Weise zwei verschiedene ungerade, α und β , so bestimmt werden, dass

$$\kappa\lambda \equiv \alpha\beta,$$

woraus folgt:

$$\kappa\lambda\beta \equiv \alpha, \quad \lambda\lambda\beta \equiv \beta.$$

Daher ist das System κ, λ äquivalent mit α, β . Eine dritte, von α und β verschiedene Charakteristik kann nur die Form β oder $\alpha\beta\gamma$ oder $\alpha\gamma\delta$ haben, wenn hier γ, δ irgend zwei der 4 übrigen Indices sind. Das System $\alpha, \beta, \alpha\beta\gamma$ ist aber offenbar äquivalent mit α, β, γ . Daher ist jedes Tripel entweder mit α, β, γ äquivalent, oder mit $\alpha, \beta, \alpha\gamma\delta$. Im ersten Falle nennen wir es *Rosenhain'sches Tripel*, im andern Falle *Göpel'sches Tripel*, und zwar aus folgenden Gründen: zu jedem Tripel der ersten Art gehört ein bestimmtes anderes derselben

Art, welches mit ihm zusammen ein Rosenhain'sches Sextupel bildet; ein Tripel der andern Art wird stets durch eine bestimmte Charakteristik, nämlich seine Summe, zu einem Göpel'schen Quadrupel ergänzt. Z. B. bilden die Tripel α, β, γ und $\delta, \varepsilon, \zeta$ ein Sextupel; das Tripel $\alpha, \beta, \alpha\gamma\delta$ und $\beta'\gamma\delta$ ein Quadrupel.

Wir werden ferner ein Quadrupel, bestehend aus einem Rosenhaintripel und seiner Summe, wie $\alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta\gamma$, *Rosenhain'sches Quadrupel* nennen. Es sei bemerkt, dass ein Tripel gerader Charakteristiken Rosenhainisch ist oder Göpelisch, jenachdem seine Summe ungerade ist oder gerade.

§ 2.

Functionaldeterminante eines Rosenhain'schen Tripels.

Es möge gestattet sein folgende Determinante von drei Functionen f, φ, ψ mit zwei Variablen u_1, u_2

$$\begin{vmatrix} f & \varphi & \psi \\ \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} & \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f}{\partial u_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} & \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

Functionaldeterminante von f, φ, ψ zu nennen und mit $|f, \varphi, \psi|$ zu bezeichnen.

Die Functionaldeterminante der Quadrate eines Rosenhain'schen Tripels von Thetafunctionen, z. B.

$$|u_\alpha^2, u_\beta^2, u_\gamma^2|,$$

ist eine Thetafunction 6. O. mit der Charakteristik $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, und zwar ersichtlich das Product aus $u_\alpha u_\beta u_\gamma$ in eine Thetafunction 3. O. mit der Charakteristik $\alpha\beta\gamma$.

Zwischen den Quadraten von irgend vier Functionen, welche einem Rosenhain'schen Sextupel angehören, besteht eine homogene lineare Relation; auf Grund derselben ist:

$$|u_\alpha^2, u_\beta^2, u_\gamma^2| = c_\kappa |u_\kappa^2, u_\beta^2, u_\gamma^2|,$$

wenn hier unter κ einer der Indices $\delta, \varepsilon, \zeta$ verstanden wird, und unter c_κ ein von u unabhängiger Factor. Demnach ist der Quotient:

$$Q(u_1, u_2) = \frac{|u_\alpha^2, u_\beta^2, u_\gamma^2|}{u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\delta u_\varepsilon u_\zeta}$$

eine vierfach periodische Function von u_1, u_2 , welche überall da endlich ist, wo von den Factoren des Nenners entweder nur einer verschwindet, oder nur zwei. Wenn wir nun zeigen, dass an den Stellen, an welchen drei und mehr Factoren des Nenners verschwinden, der

Quotient einen und denselben endlichen Werth hat, so ist damit bewiesen, dass er diesen Werth überhaupt besitzt. Nun verschwinden, wie bekannt, drei Functionen eines Rosenhain'schen Sextupels nur dort zugleich, wo alle sechs verschwinden, z. B. die ungeraden Functionen an den Stellen $u \equiv 0 \pmod{p_w}$. Den Werth $Q(0, 0)$, welchen $Q(u_1, u_2)$ an allen diesen Stellen besitzt, bestimmen wir, indem wir die Thetafunctionen nach Gliedern steigender Dimension in u_1, u_2 entwickeln und, mit Benützung der Symbolik der Invariantentheorie, schreiben:

$$u_x = \alpha_u + \alpha_u^3 + \alpha_u^5 + \dots,$$

wobei $\alpha_u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, und für $\alpha_1^3, \alpha_1^2 \alpha_2, \dots$ die Coefficienten $\alpha_{111}, \alpha_{112}, \dots$ bezw. zu setzen sind. Dann ist, wenn wir in Zähler und Nenner nur die Glieder niederster Dimension anschreiben:

$$Q(u_1, u_2) = 2^2 \cdot \frac{-2 \sum_{\alpha, \beta, \gamma} (\beta, \gamma) \alpha_u^3 + \dots}{\delta_u \varepsilon_u \xi_u + \dots}$$

wobei die Summation $\bar{\Sigma}$ sich auf das angeschriebene Glied erstreckt und die davon verschiedenen, die durch cyclische Substitution der Indices α, β, γ daraus hervorgehen. Ferner ist $(\beta, \gamma) = \beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1$. Zieht man jetzt die Identität IV § 7 zu Rathe:

$$\bar{\Sigma} \alpha_{\beta\gamma} \vartheta_\alpha(2u) = 2^2 \cdot u_\delta u_\varepsilon u_\zeta u_{\delta\varepsilon\zeta},$$

$$\alpha_{\beta\gamma} = (-1)^{\beta\gamma\alpha} \beta\gamma\delta \cdot \beta\gamma\varepsilon \cdot \beta\gamma\zeta$$

wobei $\beta\gamma\delta = \vartheta_{\beta\gamma\delta}(0, 0)$ bedeutet, so findet man — unter ϱ einen Factor verstanden, welcher von α, β, γ unabhängig ist —

$$\bar{\Sigma} \alpha_{\beta\gamma} \alpha_1 = 0, \quad \bar{\Sigma} \alpha_{\beta\gamma} \alpha_2 = 0; \quad \varrho \alpha_{\beta\gamma} = (\beta, \gamma),$$

und hieraus

$$2 \bar{\Sigma} (\beta, \gamma) \alpha_u^3 = \varrho \cdot \delta \varepsilon \xi \cdot \delta_u \varepsilon_u \xi_u.$$

Also ist:

$$Q(0, 0) = -(-1)^{\beta\gamma\alpha} \cdot 4 \cdot \alpha \beta \gamma^2 \cdot \frac{(\beta, \gamma)}{\beta\gamma\alpha \cdot \beta\gamma\delta \cdot \beta\gamma\varepsilon \cdot \beta\gamma\zeta}$$

und folglich $Q(u_1, u_2)$ constant und gleich diesem Werthe.

Nach den bekannten Rosenhain'schen Formeln ist aber:

$$(\beta, \gamma) = 1_{\beta\gamma} \cdot \beta\gamma\alpha \cdot \beta\gamma\delta \cdot \beta\gamma\varepsilon \cdot \beta\gamma\zeta$$

und $1_{\beta\gamma}$ lediglich ein Vorzeichen, für welches, wie man leicht findet, die folgenden Beziehungen bestehen:

$$1_{\gamma\beta} = -1_{\beta\gamma}; \quad 1_{\alpha\gamma} 1_{\beta\gamma} = (-1)^{\alpha\beta\gamma}.$$

Wir schreiben noch $1_{\alpha\beta\gamma}$ für $1_{\alpha\beta} 1_{\beta\gamma} 1_{\gamma\alpha}$ und haben dann folgende Formeln:

$$(I) \quad |u_\alpha, u_\beta, u_\gamma| = 1_{\alpha\beta\gamma} \cdot \alpha \beta \gamma^2 \cdot u_\delta u_\varepsilon u_\zeta,$$

$$(Ia) \quad |u_{\alpha\beta\gamma}, u_\beta, u_\gamma| = 1_{\beta\gamma} \cdot \alpha \beta \gamma^2 \cdot u_{\beta\gamma\delta} u_{\beta\gamma\varepsilon} u_{\beta\gamma\zeta}.$$

Die letzte geht aus der ersten hervor durch Vermehrung von u um $\frac{1}{2}p_{\beta\gamma}$. Wir fassen alle diese Formeln zusammen in dem Satze:

Die Functionaldeterminante eines Rosenhain-Tripels ist bis auf einen constanten Factor dem Producte der Functionen desjenigen Tripels gleich, welches das erste zum Sextupel ergänzt.

§ 3.

Functionaldeterminante eines Göpel'schen Tripels.

Wir legen ein Tripel gerader Functionen zu Grunde und wollen, weil viele gerade Charakteristiken nebeneinander vorkommen, die sechs ungeraden Normalcharakteristiken bezeichnen mit den arabischen Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, welche leichter in's Auge fallen, wie die griechischen. Es wird wohl nicht zu Verwechslungen führen, wenn, wie bisher, wo $\vartheta_\alpha(u)$ und $\vartheta_\beta(u)$ mit u_α und u_β , so nunmehr $\vartheta_1(u)$ und $\vartheta_2(u)$ mit u_1 und u_2 bezeichnet werden.

Zu jeder der 15 Substitutionen der sechs Indices, bestehend aus drei Cyclen zu je zweien, gehört ein Göpel'sches Quadrupel gerader Charakteristiken, welche bei dieser Substitution einzeln ungeändert bleiben. So gehört zu derjenigen Substitution, welche 1 mit 2, 3 mit 4, 5 mit 6 vertauscht — sie sei bezeichnet mit dem Symbol:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

— das Quadrupel 135, 136, 145, 146.

Umgekehrt giebt es sechs solcher Substitutionen, welche eine bestimmte gerade Charakteristik ungeändert lassen: z. B. lassen ausser $\begin{pmatrix} 135 \\ 246 \end{pmatrix}$ auch

$$\begin{pmatrix} 153 \\ 246 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 315 \\ 246 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 351 \\ 246 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 513 \\ 246 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 531 \\ 246 \end{pmatrix}$$

die Charakteristik 135 ungeändert. Jede dieser sechs Substitutionen ordnet der 135 ein Göpel'sches Tripel zu, und diese sechs Tripel scheiden sich in zwei Vereine von je drei *coordinirten Tripeln*, entsprechend drei Substitutionen, deren Symbole durch cyclische Vertauschung von 1, 3, 5 auseinander hervorgehen. So entsprechen den Substitutionen:

$$\begin{pmatrix} 135 \\ 246 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 351 \\ 246 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 513 \\ 246 \end{pmatrix}$$

die coordinirten Tripel:

$$136, 145, 146; \quad 134, 124, 125; \quad 132, 126, 156$$

und diese haben keine Charakteristik gemein. Wenn man also aus den zehn Charakteristiken eine herausgreift, lassen die neun übrigen sich

noch auf zwei verschiedene Weisen in drei coordinirte Tripel vertheilen. Es giebt also 60 *Göpel'sche Tripel aus geraden Charakteristiken*, und daher *ebensoviel Rosenhain'sche*.

Wir legen jetzt das Göpel'sche Quadrupel zu Grunde

$$a = 135, \quad b = 136, \quad c = 145, \quad e = 146$$

und greifen heraus die Tripel a, b, c und e, b, c . Es lassen sich dann von u unabhängige Factoren a und e so bestimmen, dass für jede Charakteristik ω die Identität erfüllt ist:

$$a | u_a^2, u_b^2, u_c^2 | + e | u_e^2, u_b^2, u_c^2 | = | u_\omega^2, u_b^2, u_c^2 |,$$

denn zwischen u_ω^2 und u_a^2, u_b^2, u_c^2 besteht eine homogene lineare Relation. Wir wählen nun einmal $\omega = 536$, sodann $\omega = 345$ und finden mit Benützung der Ergebnisse des § 2:

$$a' | u_{135}^2, u_{136}^2, u_{145}^2 | + e' | u_{146}^2, u_{136}^2, u_{145}^2 | = u_3 u_6 u_{361} u_{362} u_{364} u_{365},$$

$$a'' | u_{135}^2, u_{136}^2, u_{145}^2 | + e'' | u_{146}^2, u_{136}^2, u_{145}^2 | = u_4 u_5 u_{451} u_{452} u_{453} u_{456},$$

worin a', e', a'', e'' von u unabhängig. Sind g und h ebensolche Factoren, so hat man also eine Gleichung von der Form:

$$u_{146} | u_{146}, u_{136}, u_{145} | = g u_3 u_6 u_{361} u_{365} + h u_4 u_5 u_{453} u_{456}.$$

Nun besteht aber eine homogene lineare Relation, die *Productrelation*, zwischen

$$u_3 u_6, \quad u_{453} u_{456}, \quad u_{413} u_{416},$$

und ebenso zwischen

$$u_4 u_5, \quad u_{634} u_{635}, \quad u_{614} u_{615},$$

welch' beide man zur Elimination von $u_3 u_6, u_4 u_5$ benützen kann. Dadurch gelangt man zu einer Gleichung von der Form:

$$u_{146} | u_{136}, u_{145}, u_{146} | = k u_{634} u_{635} u_{453} u_{456} + l u_{634} u_{635} u_{614} u_{625} \\ + m u_{453} u_{456} u_{614} u_{615},$$

in welcher über die von u unabhängigen Coefficienten k, l, m sich sagen lässt, dass $k = 0$ sein muss, weil die rechte Seite anders nicht verschwinden kann für alle Stellen des Gebildes $u_{146} = 0$, während l und m durch die Substitution $\begin{pmatrix} 135 \\ 246 \end{pmatrix}$ in einander übergehen müssen.

Man bestimmt l etwa durch Einsetzen von $\frac{1}{2} p_{45}$. Wird das Product der Nullwerthe der 10 geraden Thetafunctionen mit π_0 bezeichnet:

$$\pi_0 = 123.124.125.126.134.135.136.145.146.156$$

und schreibt man:

$$\frac{u_{123}}{123} = \sigma_{123},$$

so nimmt die Gleichung folgende Gestalt an:

$$(II) \quad \pi_0 | \sigma_{136}, \sigma_{145}, \sigma_{146} | = (1, 2) (3, 4) (5, 6) (\sigma_{356} \sigma_{341} \sigma_{346} - \sigma_{516} \sigma_{543} \sigma_{546}).$$

Sie gehört zur Charakteristik 135, und die drei Functionen der linken Seite bilden mit den zweimal drei Functionen, welche auf der rechten Seite zu je einem Producte vereinigt sind, den zum Cyclus (135) gehörigen Verein coordinirter Tripel. Die Relation kann also in 60 verschiedenen Formen angeschrieben werden. Wenden wir auf sie die Substitutionen $\begin{pmatrix} 351 \\ 246 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 513 \\ 246 \end{pmatrix}$ an, so erhalten wir zwei Formen, die sich mit ihr vereinigen lassen zur Gleichung:

$$\sum_{1,3,5} \left| \frac{\sigma_{135}, \sigma_{145}, \sigma_{146}}{(1,2)(3,4)(5,6)} \right| = 0,$$

worin die Summation sich erstrecken soll auf die drei verschiedenen Glieder, welche der Cyclus (1, 3, 5) aus dem angeschriebenen liefert. Diese Gleichung existirt in 20 Formen.

§ 4.

Thetafunctionen von Summe und Differenz halber Integrale.

Wir lassen den Entwicklungen dieses Paragraphen eine geometrische Betrachtung vorangehen, welche geeignet ist, jene als zwanglose Fortsetzung der Entwicklungen des § 2 erscheinen zu lassen, von welchen sie gleichwohl an und für sich völlig unabhängig sind.

Wenn man die homogenen Coordinaten eines Raumpunktes proportional setzt den Quadraten der Functionen eines Rosenhain'schen Quadrupels, so ist nach Herrn H. Weber*) der Ort des Punktes eine Kummer'sche Fläche, welche das Coordinatentetraeder zum Berührungstetraeder hat. Sind also α, β, γ irgend drei ungerade Normalcharakteristiken, $\sigma = \alpha\beta\gamma$ deren Summe, sind ferner $1_\alpha, 1_\beta, 1_\gamma, 1_\sigma$ beliebig wählbare Vorzeichen, so legen die Verhältnisse:

$$(1) \quad x_\alpha : x_\beta : x_\gamma : x_\sigma = 1_\alpha u_\alpha^2 : 1_\beta u_\beta^2 : 1_\gamma u_\gamma^2 : 1_\sigma u_\sigma^2$$

den Punkt x einer Kummer'schen Fläche gegen eines ihrer Berührungstetraeder fest. Seien jetzt weiter $\xi_\alpha, \xi_\beta, \xi_\gamma, \xi_\sigma$ bzw. die homogenen Coordinaten der Ebene ξ , welche die Fläche im Punkte x berührt, so ist

$$(2) \quad \xi_\alpha x_\alpha + \xi_\beta x_\beta + \xi_\gamma x_\gamma + \xi_\sigma x_\sigma = 0$$

und ferner, wenn, wie im Folgenden überall, unter ϱ eine von $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ unabhängige, im Uebrigen völlig willkürliche Grösse bedeutet,

$$(3) \quad \varrho \xi_\sigma = 1_\sigma |u_\alpha^2, u_\beta^2, u_\gamma^2|.$$

*) Borchardt's Journal, 84.

Die Ausdrücke für die drei übrigen Coordinaten ergeben sich hieraus durch die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \sigma & \beta \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma & \alpha \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}.$$

Mittels der Formeln I, Ia erhalten wir dann folgende *Darstellung der Ebenencoordinaten durch die Argumente* u_1, u_2 *des Berührungspunktes*:

$$(4) \quad \varrho \xi_{\sigma} = 1_{\sigma} u_{\alpha} u_{\beta} u_{\gamma} u_{\delta} u_{\epsilon} u_{\zeta},$$

$$(5) \quad \varrho \xi_{\alpha} = 1_{\alpha} (-1)^{\beta \gamma \cdot \alpha'} u_{\beta} u_{\gamma} u_{\beta \gamma \alpha} u_{\beta \gamma \delta} u_{\beta \gamma \epsilon} u_{\beta \gamma \zeta},$$

in welchen jede Substitution der Indices α, β, γ ohneweiters zulässig ist. Beiläufig bemerkt erfüllen die Gleichungen (1), (4), (5) die Bedingung (2) auf Grund einer Relation, welche Herr Krazzer*) entwickelt hat. Sie kann wie folgt geschrieben werden:

$$(6) \quad u_{\delta} u_{\epsilon} u_{\zeta} u_{\delta \epsilon \zeta} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} (-1)^{\alpha \beta \gamma \cdot \alpha'} u_{\alpha} u_{\beta \gamma \delta} u_{\beta \gamma \epsilon} u_{\beta \gamma \zeta}.$$

Wie man nun weiss, ist die Kummer'sche Fläche am Berührungstetraeder ihre eigene Reciprocale. Es muss demnach möglich sein, die Ebenencoordinaten in der nämlichen Weise durch Argumente v_1, v_2 auszudrücken, wie die Punktkoordinaten durch u_1, u_2 in (1) ausgedrückt erscheinen. Die Additionsformel, in welcher $(u \pm v)_w$ für $\vartheta_w(u \pm v)$ geschrieben ist:

$$(7) \quad \alpha \beta \gamma^2 (u+v)_{\alpha \beta \gamma} (u-v)_{\alpha \beta \gamma} = \sum_{\kappa=\alpha, \beta, \gamma, \alpha \beta \gamma} (-1)^{\alpha \beta \gamma | \kappa} u_{\kappa}^2 v_{\kappa}^2$$

weist im Zusammenhalte mit (2) deutlich auf diejenigen Beziehungen hin, welche zwischen den Argumenten u und v bestehen müssen. Wir werden aber von der genannten geometrischen Eigenschaft der Fläche keinerlei Gebrauch machen, sondern im Gegentheil dasjenige Formelmaterial entwickeln, welches nöthig ist um nachzuweisen, dass die durch Gleichung (1) oder (4), (5) definirte Fläche jene Eigenschaft besitzt.

Seien u und v zweierlei Argumente, welche den Gleichungen

$$(8) \quad (u+v)_{\alpha \beta \gamma} = 0, \quad (u-v)_{\alpha \beta \gamma} = 0$$

zugleich genügen. Ist w das Normalintegral 1. Gattung — wir schreiben nur eine Reihe der betreffenden Gleichungen — so ist:

$$u + v \equiv \int_0^x dw + \frac{1}{2} p, \quad u - v \equiv \int_0^y dw + \frac{1}{2} p \quad (\text{mod. } p_w)$$

*) a. a. O., Seite 38, Formel C₈.

und hierin p eine bestimmte Periode. Man hat also

$$2v \equiv \int_0^x dw - \int_0^y dw, \quad 2u \equiv \int_0^x dw + \int_0^y dw.$$

Wir werden diese Ausdrücke weiterhin nicht benützen; hingegen wollen wir mit Hülfe der Additionsformeln an Stelle der Bedingungen (8) andere Gleichungen setzen und die Thetafunctionen des Argumentes v durch die von u ausdrücken. Es gelten für ganz beliebige u und v die folgenden Gleichungen*) des Additionstheorems:

$$(9) \quad \mathfrak{A}(u+v)_\alpha (u-v)_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{\lambda=\alpha,\beta,\zeta,\alpha\beta\zeta} (-1)^{\lambda|\alpha+\lambda\alpha\cdot\beta\gamma\zeta'} u_\lambda u_{\lambda\beta\gamma} v_{\lambda\gamma\zeta} v_{\lambda\zeta\beta},$$

$$(10) \quad \mathfrak{E}(u+v)_{\gamma\zeta\beta} (u-v)_{\gamma\alpha\beta} = \sum_{\mu=\gamma,\zeta,\beta,\gamma\zeta\beta} (-1)^{\mu\gamma|\gamma\zeta\beta+\mu\gamma\cdot\alpha\zeta'} u_{\mu\alpha\beta} u_{\mu\beta\zeta} v_{\mu\alpha\beta} v_{\mu\beta\zeta}$$

$$\mathfrak{A} = \alpha\beta\zeta \cdot \alpha\gamma\zeta, \quad \mathfrak{E} = \gamma\zeta\beta \cdot \gamma\alpha\beta,$$

welche die Aenderung des Vorzeichens von v gestatten. Stehen also u und v in der Beziehung (8), so folgt hieraus:

$$(11) \quad u_\beta u_\gamma v_\zeta v_{\beta\gamma\zeta} = (-1)^{\alpha\delta\epsilon\cdot\alpha'} u_{\alpha\beta\zeta} u_{\alpha\gamma\zeta} v_\alpha v_{\alpha\beta\gamma},$$

$$(12) \quad u_{\beta\gamma\alpha} u_{\beta\gamma\zeta} v_{\beta\gamma\alpha} v_{\beta\gamma\zeta} = (-1)^{\delta\epsilon\cdot\beta\gamma'} u_\alpha u_\zeta v_\alpha v_\zeta.$$

Bezeichnet man für den Augenblick wie folgt:

$$u_\beta u_\gamma u_{\beta\gamma\alpha} u_{\beta\gamma\delta} u_{\beta\gamma\epsilon} u_{\beta\gamma\zeta} = U_{\beta\gamma} = U_{\gamma\beta}, \quad u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\delta u_\epsilon u_\zeta = U,$$

so ergibt sich unter Einführung eines Proportionalitätsfactors λ sofort durch Multiplication von (11) mit (12)

$$(13) \quad \lambda v_\alpha^2 = (-1)^{\alpha\cdot\beta\gamma'} U_{\beta\gamma},$$

$$(14) \quad \lambda v_{\beta\gamma\zeta}^2 = (-1)^{\alpha\zeta\cdot\alpha\beta\gamma'} U_{\alpha\zeta}.$$

Die Bedingungsgleichungen (8) bleiben unverletzt, sowohl wenn man α, β, γ oder δ, ϵ, ζ unter sich vertauscht, als auch wenn man irgendwie die Indices α, β, γ durch δ, ϵ, ζ ersetzt. Dieselben Substitutionen sind daher auch bei allen Folgleichungen statthaft. Wie aber (14) lehrt, ändert sich λ bei der Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \zeta & \epsilon & \delta \end{pmatrix}$ nicht, daher folgt aus (13)

$$(15) \quad \lambda v_\zeta^2 = (-1)^{\zeta\cdot\delta\epsilon'} U_{\delta\epsilon}.$$

Wendet man auf (11) dieselbe Substitution an und multiplicirt die

*) Aus Krazer, Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen S. 59 Formel P' leicht abzuleiten.

entstehende Gleichung mit (11), so erhält man schliesslich mit Berücksichtigung von (14)

$$(16) \quad \lambda v_{\alpha\beta\gamma}^2 = U.$$

Wir haben somit folgendes Resultat gewonnen:

Bestehen zwischen den Argumentenreihen u_1, u_2 und v_1, v_2 die Gleichungen:

$$(u+v)_{\alpha\beta\gamma} = 0, \quad (u-v)_{\alpha\beta\gamma} = 0,$$

so sind die Quadrate der Thetafunctionen der einen Reihe proportional mit Producten Rosenhain'scher Sextupel, geschrieben in der anderen Reihe; nämlich es gelten die Gleichungen:

$$(III) \quad \begin{aligned} \lambda v_{\alpha}^2 &= (-1)^{\alpha\cdot\beta\gamma} u_{\beta} u_{\gamma} u_{\beta\gamma\alpha} u_{\beta\gamma\delta} u_{\beta\gamma\epsilon} u_{\beta\gamma\zeta}, \\ \lambda v_{\zeta}^2 &= (-1)^{\zeta\cdot\delta\epsilon} u_{\delta} u_{\epsilon} u_{\delta\epsilon\alpha} u_{\delta\epsilon\beta} u_{\delta\epsilon\gamma} u_{\delta\epsilon\zeta}, \\ \lambda v_{\beta\gamma\zeta}^2 &= (-1)^{\alpha\zeta\cdot\alpha\beta\gamma} u_{\zeta} u_{\alpha} u_{\zeta\alpha\beta} u_{\zeta\alpha\gamma} u_{\zeta\alpha\delta} u_{\zeta\alpha\epsilon}, \\ \lambda v_{\alpha\beta\gamma}^2 &= u_{\alpha} u_{\beta} u_{\gamma} u_{\delta} u_{\epsilon} u_{\zeta} \end{aligned}$$

und jede weitere, welche hieraus hervorgeht, entweder durch eine Substitution der Indices α, β, γ oder δ, ϵ, ζ . Versteht man unter λ nur einen Proportionalitätsfactor, so können selbstredend in vorstehenden Gleichungen auch u und v mit einander vertauscht werden.

§ 5.

Geometrische Folgerungen.

Zunächst können auf Grund des Formelsystems (III) die Ebenencoordinaten der Kummer'schen Fläche am Berührungstetraeder, wenn wieder die Punktcoordinaten in der Form angenommen werden:

$$(1) \quad x_{\alpha} : x_{\beta} : x_{\gamma} : x_{\sigma} = 1_{\alpha} u_{\alpha}^2 : 1_{\beta} u_{\beta}^2 : 1_{\gamma} u_{\gamma}^2 : 1_{\sigma} u_{\sigma}^2,$$

auch in folgender Weise dargestellt werden:

$$(2) \quad \xi_{\alpha} : \xi_{\beta} : \xi_{\gamma} : \xi_{\sigma} = 1_{\alpha} (-1)^{\beta|\gamma} v_{\alpha}^2 : 1_{\beta} (-1)^{\gamma|\alpha} v_{\beta}^2 : 1_{\gamma} (-1)^{\alpha|\beta} v_{\gamma}^2 : -1_{\sigma} v_{\sigma}^2,$$

wobei zwischen u und v die Beziehungen bestehen:

$$(3) \quad (u+v)_{\sigma} = 0, \quad (u-v)_{\sigma} = 0.$$

Sucht man nun in Bezug auf die Fundamentalfäche 2. O.

$$(4) \quad (-1)^{\beta|\gamma} x_{\alpha}^2 + (-1)^{\gamma|\alpha} x_{\beta}^2 + (-1)^{\alpha|\beta} x_{\gamma}^2 - x_{\sigma}^2 = 0$$

zur Berührungsebene ξ der Kummer'schen Fläche (2) den Pol x' , so sind dessen Coordinaten

$$(5) \quad x'_{\alpha} : x'_{\beta} : x'_{\gamma} : x'_{\sigma} = 1_{\alpha} v_{\alpha}^2 : 1_{\beta} v_{\beta}^2 : 1_{\gamma} v_{\gamma}^2 : 1_{\sigma} v_{\sigma}^2$$

und folglich ist x' ein Punkt der Kummer'schen Fläche. Man drückt diese Beziehung mit den Worten aus:

Die Kummer'sche Fläche ist sich selbst reciproc in Bezug auf die Fundamentalfäche (4).

Weiter haben wir wegen (III) auch eine *neue Darstellungsweise der Punktkoordinaten der Fläche, bezogen auf ein Berührungstetraeder*, nämlich, wenn ϱ ein von $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ unabhängiger Factor:

$$(6) \quad \begin{aligned} \varrho x_{\sigma} &= 1_{\sigma} \cdot v_{\alpha} v_{\beta} v_{\gamma} v_{\delta} v_{\epsilon} v_{\zeta} \cdot \\ \varrho x_{\alpha} &= 1_{\alpha} (-1)^{\alpha \cdot \beta \gamma \delta \epsilon \zeta} v_{\beta} v_{\gamma} v_{\delta} v_{\epsilon} v_{\zeta} v_{\alpha} v_{\beta} v_{\gamma} v_{\delta} v_{\epsilon} v_{\zeta} \cdot \end{aligned}$$

Diese lässt in Verbindung mit den Darstellungsweisen (1), (4), (5) § 4 und (2) dieses Paragraphen die singulären Eigenschaften der Fläche sofort hervortreten. Zu jedem Argument v gehört wegen (2) stets nur *eine* Ebene ξ , und i. A. auch nur ein Berührungspunkt x vermöge (6).

Wird jedoch ausnahmsweise $v = \frac{1}{2} p_{\omega}$, so werden die Verhältnisse der x zunächst unbestimmt, da für solche Werthe die Producte (6), wie auch deren erste Ableitungen verschwinden. Für Nachbarwerthe $\frac{1}{2} p_{\omega} + dv$ erhält man dann, wenn

$$dv_2 : dv_1 = \lambda$$

gesetzt wird, Entwicklungen von der Form:

$$\varrho x = p + 2q\lambda + r\lambda^2$$

d. h. die Fläche wird von der Ebene $v = \frac{1}{2} p_{\omega}$ längs eines Kegelschnitts berührt. In derselben Weise findet man, dass die Fläche in jedem Punkte $u = \frac{1}{2} p_{\omega}$ einen Berührungskegel 2. O. hat.

Man kann ferner nach der geometrischen Bedeutung der Gleichungen § 4 (11) und (12) fragen. Setzt man hierin für den Augenblick v constant $= v^{(0)}$, so stellt, wie Herr Rohn*) bemerkt hat, eine solche Gleichung die Berührungscurve einer ringsberührenden Fläche 2. O. vor. Unter allen Punkten u dieser Curve befindet sich auch derjenige, dessen Ebene das Argument $v^{(0)}$ hat; denn die Gleichung (11) oder (12) ist ja eine Folge von (8). Wählt man also $u^{(0)}$ und $v^{(0)}$ den Gleichungen

$$(u^{(0)} + v^{(0)})_{\sigma} = 0, \quad (u^{(0)} - v^{(0)})_{\sigma} = 0$$

gemäss, so stellt die Gleichung

$$u_{\beta} u_{\gamma} v_{\zeta} v_{\delta} v_{\epsilon} v_{\alpha} = (-1)^{\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta} u_{\alpha \beta \zeta} u_{\alpha \gamma \zeta} v_{\alpha} v_{\beta \gamma},$$

jenachdem man $v = v^{(0)}$ oder $u = u^{(0)}$ setzt, entweder die Gesammtheit der Punkte, oder die Gesammtheit der Ebenen vor, welche die Kummer'sche Fläche gemein hat mit einer ringsberührenden Fläche 2. O., die durch den Punkt $u^{(0)}$ hindurchgeht.

Ohne auf die dualistische Beziehung der Kummer'schen Fläche zu

*) Math. Annalen 15, S. 350 und 351.

sich selbst tiefer einzugehen, wollen wir einen Blick auf die Punkte und Ebenen werfen, welche die Fläche mit der Fundamentalfläche (4) gemein hat. Eine *gemeinsame* Ebene berührt die letztere in einem *gemeinsamen* Punkte x , dessen Argument nach (2) und § 4, (7) der Gleichung

$$(2u)_\sigma = 0$$

genügt. Die Abzählung zeigt, dass der Curve 8. O. der gemeinsamen Punkte x eine Curve 24. O. der Pole x' entspricht, welche jene in 48 Punkten schneidet. Man kann die Argumente dieser Schnittpunkte angeben. Versteht man nämlich unter 1, 2, 3 irgend drei Indices der Reihe α, β, γ oder δ, ε, ξ , und unter 4, 5, 6 die drei übrigen, so gehören die Argumente

$$u = \frac{1}{4}p_{12} + \frac{1}{2}p_\omega \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{4}p_{12} + \frac{1}{2}p_{\bar{\omega}},$$

wobei

$$\omega = 0, \quad 14, 15, 16, 23, 56, 46, 45$$

und bezw.

$$\bar{\omega} = 23, 56, 46, 45, 0, 14, 15, 16$$

zu entsprechenden Punkten: es sind die von Herrn Rohn*) mit dem Namen *Doppelinflexionspunkte* bezeichneten. Man erkennt hieraus, dass die Verbindungslinie zweier sich entsprechender Doppelinflexionspunkte Erzeugende der Fundamentalfläche (4) ist.

Nachdem nun die völlige Gleichberechtigung von Punkt- und Ebenencoordinaten nachgewiesen ist, werden wir fernerhin diese mit denselben Symbolen $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ bezeichnen dürfen.

§ 6.

Es erübrigt noch, einen Blick zu werfen auf die Cayley-Borchardt'sche Darstellung der Punktcoordinaten der Kummer'schen Fläche, sowie die sich daran anschliessende der Ebenencoordinaten. Hier sind es die Functionen eines Göpel'schen Quadrupels — wir schreiben sie in Argumenten u' und Moduln a' — z. B.

$$u'_{135}, u'_{136}, u'_{145}, u'_{146},$$

welchen die homogenen Coordinaten

$$y_a, y_b, y_c, y_e$$

eines Raumpunktes y proportional gesetzt werden. Nach dem Formelsystem II ergeben sich dann für die bezüglichen *Coordinaten* η der *im Punkte y berührenden Ebene* Ausdrücke von der Form

*) Betrachtungen über die Kummer'sche Fläche, München 1878. Die zugehörigen Argumente sind dort in anderer Form angegeben.

$$(1) \quad \varrho \eta_a = | \sigma'_{136}, \sigma'_{145}, \sigma'_{146} | = \frac{(1,2)(3,4)(5,6)}{\pi_0 \cdot 135} (\sigma'_{356} \sigma'_{341} \sigma'_{346} - \sigma'_{516} \sigma'_{543} \sigma'_{546}),$$

wobei ϱ eine willkürliche Constante bedeutet und

$$\sigma'_w = \frac{\vartheta_w(u'; a')}{\vartheta_w(0; a')}, \quad 135 = \vartheta_{135}(0; a').$$

Man erhält hieraus η_6, η_c, η_e bzw. durch die Substitution $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Die Bedingung der vereinigten Lage von Punkt und Ebene, $\Sigma \eta y = 0$, ist erfüllt auf Grund einer Thetarelation, die man mit Hilfe der Productrelation leicht bewahrheiten wird; sie kann geschrieben werden:

$$(2) \quad \Sigma \pm \sigma'_{125} \sigma'_{135} \sigma'_{625} \sigma'_{635} = 0,$$

wenn man die Summe erstreckt über das angeschriebene Product Göpel'scher Functionen und alle andern, die aus ihm hervorgehen durch eine Substitution, welche aus den Cyclen (12), (34), (56) zusammengesetzt ist: das Vorzeichen ist $+$ oder $-$, je nachdem eine gerade Anzahl von Cyclen benutzt wird, oder eine ungerade.

Nach Herrn Rohn hängt die Cayley-Borchardt'sche Darstellung der Punkteordinaten mit der Weber'schen zusammen einerseits durch eine lineare Substitution der Coordinaten x und y , anderseits durch eine quadratische Transformation der Thetafunctionen $\vartheta_w(u; a)$ und $\vartheta_w(u'; a')$. Welche der letzteren man hierbei anwenden will, ist gleichgiltig, sofern man alle äquivalenten Darstellungsweisen der einen oder andern Gestalt als gleichberechtigt betrachtet. Die einfachste ist wohl diejenige, bei welcher Argument und Modul u, a der einen Thetafamilie mit denjenigen u', a' der anderen in der Verwandtschaft stehen:

$$u' = 2u, \quad a' = 2a.$$

Sie ist zuerst von Göpel*) benutzt und die einschlägigen Thetarelationen sind von ihm mittels jener Methode der Summationsänderung gewonnen worden, deren Keime man bei Jacobi und Eisenstein findet: neuerdings kommt sie, in glücklichster Weise verallgemeinert, zur Anwendung in den Arbeiten der Herren Prym und Krazer, auf die ich wegen der allgemeineren Transformation verweisen möchte.***) Hier beschränke ich mich darauf, die Hauptformeln für die erwähnte specielle Transformation anzugeben.***) Seien u, v von einander unabhängig, $v' = 2v$, und $\mu, \nu, \varrho, \sigma, p, q, r, s$ nur 0 oder 1, so hat man:

*) Göpel, *Theoriae transcendentium Abelianarum adumbratio levis*, Crelle's Journal Bd. 35, neuerdings Ostwald's Klassiker Nr. 67.

**) Prym, *Ableitung einer allgemeinen Thetaformel*, Acta mathematica III p. 216. Krazer und Prym, *Neue Grundlagen u. s. w.*

***)) Aehnliche finden sich bei Königsberger, Borchardt's Journal 67, Rohn, Math. Annalen 15.

$$\begin{aligned}
 & 4(-1)^{q^p+\sigma q} u'_{\left[\begin{smallmatrix} \mu+\varrho & \nu+\sigma \\ p & q \end{smallmatrix}\right]} v'_{\left[\begin{smallmatrix} \varrho & \sigma \\ p & q \end{smallmatrix}\right]} \\
 (3) \quad & = \sum_{\kappa, \lambda=0,1} (-1)^{\kappa(\mu+\varrho)+\lambda(\nu+\sigma)} (u+v)_{\left[\begin{smallmatrix} \mu & \nu \\ \kappa & \lambda \end{smallmatrix}\right]} (u-v)_{\left[\begin{smallmatrix} \mu & \nu \\ p+\kappa & q+\lambda \end{smallmatrix}\right]}, \\
 & (u+v)_{\left[\begin{smallmatrix} \mu & \nu \\ p & q \end{smallmatrix}\right]} (u-v)_{\left[\begin{smallmatrix} \mu & \nu \\ r & s \end{smallmatrix}\right]} = \sum_{\kappa, \lambda=0,1} (-1)^{\kappa r+\lambda s} u'_{\left[\begin{smallmatrix} \mu+\kappa & \nu+\lambda \\ p+\kappa & q+\lambda \end{smallmatrix}\right]} v'_{\left[\begin{smallmatrix} \kappa & \lambda \\ p+\kappa & q+\lambda \end{smallmatrix}\right]}.
 \end{aligned}$$

Den wirklichen Uebergang will ich nicht bewerkstelligen, da hierzu ausserdem noch eine Specialisirung der Charakteristiken nothwendig wäre. Man kann mit Hülfe dieser Formeln den Nachweis führen, dass im Falle des Bestehens von Bedingungen der Form $(u+v)_{\alpha\beta\gamma}=0$, $(u-v)_{\alpha\beta\gamma}=0$ die für $\eta_a, \eta_b, \eta_c, \eta_e$ gefundenen Ausdrücke bezw. proportional werden mit:

$$v'_{135} \quad v'_{136} \quad v'_{145} \quad v'_{146},$$

sodass also auch für diese Darstellung die Kummer'sche Fläche ihre eigene Reciprocale wird, und die Gleichungen (1), wenn man η als Punktkoordinaten deutet, eine Kummer'sche Fläche am Fundamental-tetraeder darstellen.

§ 7.

Thetafunctionen mit doppeltem Argument.

Die geraden Functionen, wie $(2u)_{\alpha\beta\gamma}$, hat Herr Rohn*) durch die Coordinaten der Kummer'schen Fläche, bezogen auf ein Berührungstetraeder, rational ausgedrückt und nachgewiesen, dass die Fläche längs einer Curve, wo eine solche Function verschwindet, von einer ihrer zehn Fundamentalfächen 2. O. durchsetzt wird. Eine ungerade Function hingegen, wie $(2u)_\alpha$, verschwindet, wie er zeigt, längs einer der sechs ausgezeichneten Haupttangencurven, und man verdankt den liniengeometrischen Untersuchungen von Herrn F. Klein die Kenntniss des Umstandes, dass entlang der Haupttangencurve die Fläche von anderen Kummer'schen Flächen berührt wird.***) Um Flächen zu finden, welche die ausgezeichneten Haupttangencurven ausschneiden, hat Herr Reichardt***) sowohl die Quadrate der ungeraden Thetafunctionen mit doppeltem Argument, als auch die Producte je zweier solcher Functionen, z. B. $(2u)_\alpha^2$ und $(2u)_\alpha(2u)_\beta$ durch die Quadrate $u_\alpha^2, u_\beta^2, u_\gamma^2, u_{\alpha\beta\gamma}^2$ ausgedrückt. Ich will nun zeigen, dass man jede der sechs ungeraden Functionen mit doppeltem Argument rational ausdrücken kann durch

*) Math. Ann. 15 und in dessen Dissertation, Betrachtungen über die Kummer'sche Fläche, München 1878.

**) Hierher gehörig ist auch Reye, Ueber die Singularitätenflächen quadratischer Strahlencomplexe, Borchardt's Journal Bd. 97.

***) a. a. O. § 17.

$$u_\alpha, u_\beta, u_\gamma, u_{\alpha\beta\gamma}$$

und will daran anknüpfend Flächen 4. O. angeben, welche neben vier Berührungkegelschnitten je eine ausgezeichnete Haupttangencurven ausschneiden. Hierzu muss ich etwas weiter ausholen.

Bestehen zwischen den Argumenten u, v, w, t und u', v', w', t' die Relationen (1) und deren Umkehrung (2)

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{aligned} 2u &= u' + v' + w' + t' \\ 2v &= u' + v' - w' - t' \\ 2w &= u' - v' + w' - t' \\ 2t &= u' - v' - w' + t' \end{aligned} \\ (2) \quad & \begin{aligned} 2u' &= u + v + w + t \\ 2v' &= u + v - w - t \\ 2w' &= u - v + w - t \\ 2t' &= u - v - w + t, \end{aligned} \end{aligned}$$

so kann die von Herrn Prym*) mehrfach bewiesene Riemann'sche Thetaformel für Thetafunctionen mit zwei Variablen in folgender Gestalt geschrieben werden:

$$(3) \quad 4u_{\omega\varrho\tau}v_{\omega\varrho}w_{\omega\tau}t_{\omega} = \sum_{\pi} (-1)^{|\pi| + \varrho \cdot \pi \cdot \omega'} u'_{\pi\varrho\tau} v'_{\pi\varrho} w'_{\pi\tau} t'_{\pi}.$$

Hierin bedeuten ω, ϱ, τ drei ganz beliebige Charakteristiken und die Summierung erstreckt sich über 16 Charakteristiken, welche (mod. 2) incongruent sind. Setzt man hierin *erstens*

$$\varrho = \delta\xi, \quad \tau = \varepsilon\xi, \quad u' = v' = w' = 0,$$

indem man wieder die Indices der 6 ungeraden Normalcharakteristiken mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \xi$ bezeichnet, so wird

$$v = w = -u, \quad t = u, \quad t' = 2u$$

und für $\omega = \xi$ und $\omega = \alpha$ erhält man bez. die beiden Formeln:

$$(IV) \quad -\alpha_{\beta\gamma}(2u)_{\alpha} + \beta_{\gamma\alpha}(2u)_{\beta} + \gamma_{\alpha\beta}(2u)_{\gamma} = 4u_{\delta\varepsilon\xi}u_{\delta}u_{\varepsilon}u_{\xi}$$

$$(IVa) \quad \alpha_{\beta\gamma}(2u)_{\alpha} - \beta_{\gamma\alpha}(2u)_{\beta} - \gamma_{\alpha\beta}(2u)_{\gamma} = (-1)^{\beta\gamma \cdot \alpha'} \cdot 4u_{\alpha}u_{\beta\gamma\delta}u_{\beta\gamma\varepsilon}u_{\beta\gamma\xi},$$

worin

$$\alpha_{\beta\gamma} = (-1)^{\beta\gamma \cdot \alpha'} \beta\gamma\delta \cdot \beta\gamma\varepsilon \cdot \beta\gamma\xi.$$

Ähnliche Formeln gelten für die geraden Functionen mit dem Argumente $2u$. Setzt man nämlich *zweitens* in (3)

$$\varrho = \alpha\beta, \quad \tau = \gamma\delta, \quad u = v = w = t,$$

so wird

$$v' = w' = t' = 0, \quad u' = 2u$$

und man erhält für $\omega = \alpha\gamma\varepsilon$, $\omega = \alpha$ bez. die beiden Formeln:

$$(V) \quad \Theta_{\alpha\gamma\varepsilon} + \Theta_{\alpha\gamma\xi} + \Theta_{\alpha\delta\varepsilon} + \Theta_{\alpha\delta\xi} = c \cdot u_{\alpha\gamma\varepsilon}u_{\alpha\gamma\xi}u_{\alpha\delta\varepsilon}u_{\alpha\delta\xi}$$

$$(V') \quad \Theta_{\alpha\gamma\varepsilon} - \Theta_{\alpha\gamma\xi} - \Theta_{\alpha\delta\varepsilon} + \Theta_{\alpha\delta\xi} = 1_{\gamma\delta} \cdot 1_{\xi\varepsilon} \cdot c u_{\alpha}u_{\beta}u_{\alpha\gamma\delta}u_{\beta\gamma\delta}.$$

*) Ein kurzer Beweis in Borchardt's Journal Bd. 93, ein bedeutsamer in den Acta mathematica III.

Hierin bedeutet:

$$\Theta_{\alpha\gamma\epsilon} = \frac{(2u)_{\alpha\gamma\epsilon}}{\alpha\gamma\epsilon}, \quad c = \frac{4}{\alpha\gamma\epsilon \cdot \alpha\gamma\zeta \cdot \alpha\delta\epsilon \cdot \alpha\delta\zeta}.$$

Für die geraden Functionen erhält man übrigens auch direct eine explicite Darstellung, wenn man in (3) unter ω eine gerade Charakteristik versteht und setzt:

$$\varrho = \tau = 0, \quad v = w = t = 0.$$

Dann wird

$$u' = v' = w' = t' = 0, \quad u = 2u'.$$

Die entstehende Formel, in welcher u statt u' geschrieben ist, lautet:

$$(4) \quad 4(0)_{\omega}^3 \cdot (2u)_{\omega} = \sum_{\kappa} (-1)^{\kappa|\omega} u_{\kappa}^4$$

und hierin ist die Summation zu erstrecken über die 16 Normalcharakteristiken κ .

Die umgekehrten Formeln sind von Herrn Rohn gegeben worden für specielle Charakteristiken in Form einer Tabelle. *)

§ 8.

Rationale Parameterdarstellung der Thetafunctionen.

Die im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Formeln setzen uns in den Stand, *sämmtliche 16 Functionen* $(2u)_{\kappa}$ *rational auszudrücken durch die vier Functionen*

$$(1) \quad u_{\alpha}, u_{\beta}, u_{\gamma}, u_{\alpha\beta\gamma}.$$

Für die Functionen $(2u)_{\omega}$ mit gerader Charakteristik ω erhält die Möglichkeit der Lösung dieser Aufgabe aus der letzten Formel, (4) § 7. Denn durch die Quadrate der Functionen (1) sind ja die Quadrate aller übrigen Thetafunctionen homogen-linear ausdrückbar.

Es bleibt also nur zu zeigen, dass die sechs Functionen

$$(2) \quad (2u)_{\alpha}, (2u)_{\beta}, (2u)_{\gamma}, (2u)_{\delta}, (2u)_{\epsilon}, (2u)_{\zeta}$$

rational durch die Functionen (1) darstellbar sind. Ein bemerkenswerther Unterschied in der Darstellung dieser Functionen und der Functionen mit gerader Charakteristik besteht darin, dass die letzten rational in den Quadraten der Functionen (1) sind, Ausdrücke für die ersten aber neben den Quadraten auch das Product $u_{\alpha}u_{\beta}u_{\gamma}u_{\alpha\beta\gamma}$ enthalten.

Aus IV und IVa ergibt sich:

$$(VI) \quad \frac{1}{2} \alpha_{\beta\gamma} (2u)_{\alpha} = (-1)^{\beta\gamma \cdot \alpha} u_{\alpha} u_{\beta\gamma\delta} u_{\beta\gamma\epsilon} u_{\beta\gamma\zeta} + u_{\delta\epsilon\zeta} u_{\delta} u_{\epsilon} u_{\zeta}.$$

*) Math. Annalen 15 S. 336.

Jedes der rechts stehenden Producte hängt nun für sich allein von den Functionen (1) rational ab. Um dies zu zeigen, bediene ich mich einer Identität, welche für die Rosenhain'sche Auflösung der Thetarelationen von fundamentaler Bedeutung ist: ich entnehme sie der mehrerwähnten Schrift des Herrn Krazer. Dort wird sie hergeleitet aus der bekannten biquadratischen Relation

$$(3) \quad R = 0$$

zwischen den Functionen $u_\alpha^2, u_\beta^2, u_\gamma^2, u_{\alpha\beta\gamma}^2$, welche von Rosenhain*) zuerst erwähnt, von Herrn H. Weber**) für specielle Charakteristiken entwickelt und als Gleichung der Kummer'schen Fläche gedeutet worden ist. Nach Potenzen von $u_{\alpha\beta\gamma}^2$ geordnet, hat R die Form:

$$(4) \quad R = A u_{\alpha\beta\gamma}^4 + 2B u_{\alpha\beta\gamma}^2 + D^2$$

A und D sind homogene Polynome 2. Grades, B aber 3. Grades in $u_\alpha^2, u_\beta^2, u_\gamma^2$, bezüglich deren ich auf die Schrift von Herrn Krazer verweise, wo die Gleichung $R = 0$ für allgemeine Charakteristiken entwickelt ist.***). In der Folge erweist es sich manchmal als vorthellhaft, die Identität $R = 0$ in anderer Schreibweise zu benützen. Ich wähle folgende Bezeichnung:

$$(5) \quad A = (-1)^{\alpha|\beta+\alpha\cdot\gamma'} (u_\alpha^2 u_{\alpha\beta\gamma}^2 + (-1)^{\alpha\beta\cdot\alpha\gamma'} u_\beta^2 u_\gamma^2),$$

verstehe unter $\bar{A}$ diejenige Grösse, welche aus A durch die Vertauschung von β und γ hervorgeht, und unter B, Γ und $\bar{B}, \bar{\Gamma}$ die aus A bzw. $\bar{A}$ durch cyclische Vertauschung von α, β, γ hervorgehenden Grössen.†)

Ferner sei zur Abkürzung gesetzt:

$$(6) \quad u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\alpha\beta\gamma} = T, \quad \alpha_\beta^2 = a, \quad \beta_\gamma^2 = b, \quad \gamma_\alpha^2 = c,$$

sodass also jede Substitution der Indices α, β, γ eine Substitution der entsprechenden Buchstaben a, b, c nach sich zieht. In diesen Zeichen kann man schreiben:

$$(7) \quad R = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} (a^2 A^2 + 2bcB\Gamma - 4(-1)^{\alpha\beta\cdot\alpha\delta'} a \cdot \alpha_\beta^2 T^2).$$

Die Identität nun, welche unserm augenblicklichen Zwecke dient, lautet in der Bezeichnung††) der Darstellung (4) von R :

*) Rosenhain, Mémoires des savants étrangers 1851. Neuerdings Ostwald's Classiker Nr. 65.

**) H. Weber, Ueber die Kummer'sche Fläche 4. O. Borchardt's Journal Bd. 84.

***) Krazer, Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen 1882, S. 45. Dort steht C für D^2 .

†) Man würde statt $A, \bar{A}$ eingehender, aber umständlicher $A_{\beta\gamma}, A_{\gamma\beta}$ bezeichnen können.

††) Krazer a. a. O.

$$(8) \quad A u_{\alpha\beta\gamma}^2 + B = -2\pi_0 \cdot \alpha\beta\gamma^2 \cdot u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\delta u_\epsilon u_\zeta$$

und ist für die Rosenhain'sche Auflösung um deswillen von Bedeutung, weil sie zeigt, wie sich durch die sechs Functionen eines Sextupels die Quadrate der 10 übrigen Thetafunctionen rational ausdrücken lassen.

Wie man sie mit Hülfe der Formeln des § 4 aus $R = 0$ ableiten kann, darüber folgende Bemerkung: sind $u_\alpha^2, u_\beta^2, u_\gamma^2, u_{\alpha\beta\gamma}^2$ proportional den homogenen Coordinaten eines Raumpunktes, so ist $R = 0$ die Gleichung der Kummer'schen Fläche am Coordinaten-, als Berührungstetraeder; die linke Seite von (8) ist also proportional mit einer der vier Ebenencoordinaten, wie dies von der rechten Seite in § 4 gezeigt wurde.

Bezeichnet man nun die linke Seite von (8) mit $R_{\alpha\beta\gamma}$ und vermehrt sodann u um $\frac{1}{2} p_{\beta\gamma}$, so erhält man eine ähnliche Gleichung:

$$(9) \quad R_\alpha = 2(-1)^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} \pi_0 \cdot \alpha\beta\gamma^2 \cdot u_\beta u_\gamma u_{\beta\gamma\alpha} u_{\beta\gamma\delta} u_{\beta\gamma\epsilon} u_{\beta\gamma\zeta},$$

worin R_α , wie $R_{\alpha\beta\gamma}$, ein homogenes Polynom 3. Gr. in $u_\alpha^2, u_\beta^2, u_\gamma^2, u_{\alpha\beta\gamma}^2$. Aus (VI), (8), (9) ergibt sich nun sofort:

$$(10) \quad -\alpha_{\beta\gamma} \pi_0 \cdot \alpha\beta\gamma^2 \cdot T \cdot (2u)_\alpha = R_\alpha \cdot u_\alpha^2 + R_{\alpha\beta\gamma} \cdot u_{\alpha\beta\gamma}^2$$

und hieraus unter Benützung der Zeichen (5), wenn man ausserdem T^2 mit Hülfe von $R = 0$ beseitigt:

$$(VII) \quad \frac{\pi_0 \cdot \alpha\beta\gamma^2}{\alpha_{\beta\gamma}} \cdot u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\alpha\beta\gamma} (2u)_\alpha = aA\bar{A} + bAB + c\bar{A}\bar{\Gamma}.$$

Entsprechende Ausdrücke für $(2u)_\beta$ und $(2u)_\gamma$ ergeben sich hieraus durch Vertauschung von α, β, γ .

Um nun auch $(2u)_\delta, (2u)_\epsilon, (2u)_\zeta$ rational darzustellen durch die Functionen (1), wenden wir auf (VI) die Substitution $(\alpha\delta)(\beta\epsilon)(\gamma\zeta)$ an und erhalten nach Multiplication mit T :

$$(11) \quad \frac{1}{2} \delta_\epsilon \zeta \cdot T \cdot (2u)_\delta = (-1)^{\epsilon\zeta\delta} u_\alpha u_\beta u_{\alpha\gamma\delta} u_{\beta\gamma\delta} \cdot u_\gamma u_\delta u_{\alpha\beta\gamma} u_{\alpha\beta\delta} + T^2.$$

Wie die Göpel'sche Relation lehrt, sind die Producte

$$(12) \quad u_\alpha u_\beta u_{\alpha\gamma\delta} u_{\beta\gamma\delta}, \quad u_\gamma u_\delta u_{\gamma\alpha\beta} u_{\delta\alpha\beta}$$

rational ganz durch vier linear-unabhängige Thetaquadrate ausdrückbar, also auch durch

$$(13) \quad u_\alpha^2, u_\beta^2, u_\gamma^2, u_{\alpha\beta\gamma}^2.$$

Man leitet aber diese Ausdrücke wohl einfacher mit Hülfe des Hermite'schen Satzes her. Ich begnüge mich damit, sie anzugeben:

$$(14) \quad 2m u_\alpha u_\beta u_{\alpha\gamma\delta} u_{\beta\gamma\delta} = (-1)^{\alpha\gamma} (aA + c_\delta \bar{\Gamma}) + (-1)^{\beta\gamma} (b\bar{B} + (c - c_\delta) \Gamma)$$

$$(15) \quad \begin{aligned} & (-1)^{\gamma\alpha\beta\delta + \beta\delta\gamma} 2m u_\gamma u_\delta u_{\gamma\alpha\beta} u_{\delta\alpha\beta} \\ & = (-1)^{\alpha\gamma} (aA + c_\delta \bar{\Gamma}) - (-1)^{\beta\gamma} (b\bar{B} + (c - c_\delta) \Gamma), \end{aligned}$$

worin bedeutet:

$$(16) \quad m = (-1)^{\alpha\beta\cdot\epsilon\zeta'} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\gamma} \quad \text{und} \quad c_\delta = (-1)^{\gamma\alpha\cdot\beta\delta'} \gamma_{\alpha\delta}^2.$$

Mit Hülfe von (14), (15) kommt dann (11) auf die Form:

$$(VIII) \quad \begin{aligned} & 2(-1)^{\beta\delta\cdot\alpha\delta'} \delta_{\epsilon\zeta} m^2 \cdot T \cdot (2u)_\delta \\ & = (aA + c_\delta \bar{\Gamma})^2 - (b\bar{B} + (c - c_\delta)\Gamma)^2 + 4(-1)^{\beta\delta\cdot\alpha\delta'} m^2 T^2 \end{aligned}$$

und aus dieser Formel leitet man durch die Vertauschung von δ , ϵ , ζ entsprechende Ausdrücke für $(2u)_\epsilon$, $(2u)_\zeta$ her.

§ 9.

Ringsberührende Kummer'sche Flächen.

Die Formeln (VII) und (VIII) kann man u. A. dazu verwenden, nachzuweisen, dass die Kummer'sche Fläche von einer ∞^6 -Schaar von anderen Kummer'schen Flächen längs Curven 3. O. berührt wird.

Setzt man (vergl. § 5, Schlussbemerkung)

$$(1) \quad \alpha:\beta:\gamma:\sigma = (-1)^{\alpha\beta\cdot\alpha\gamma'} u_\alpha^2 : (-1)^{\beta\gamma\cdot\beta\alpha'} u_\beta^2 : (-1)^{\gamma\alpha\cdot\gamma\beta'} u_\gamma^2 : u_\sigma^2,$$

so sind

$$(2) \quad A = 0, \quad \bar{A} = 0, \quad B = 0, \quad \bar{B} = 0, \quad \Gamma = 0, \quad \bar{\Gamma} = 0$$

Flächen 2. O., welche durch die Coordinatenecken einfach hindurchgehen. Wenn wir die rechte Seite von (VII) mit M_α bezeichnen:

$$M_\alpha = aA\bar{A} + bAB + c\bar{A}\bar{\Gamma},$$

so ist also $M_\alpha = 0$ eine Fläche 4. O., welche die Coordinatenecken zu Doppelpunkten hat. Sie schneidet die Kummer'sche Fläche wegen (VII) erstens in den Curven

$$(5) \quad u_\alpha = 0, \quad u_\beta = 0, \quad u_\gamma = 0, \quad u_{\alpha\beta\gamma} = 0,$$

d. h. in den Berührungseggeln des Coordinatentetraeders, zweitens in der Curve

$$(6) \quad (2u)_\alpha = 0,$$

d. h. nach Herrn Rohn in einer von den sechs ausgezeichneten Haupttangentialcurven. Analoges gilt für $M_\beta = 0$, $M_\gamma = 0$.

Es sei nun wie vorher $T = u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\alpha\beta\gamma}$, ferner soll, wenn Φ und Ψ Polynome in $u_\alpha^2, u_\beta^2, u_\gamma^2, u_{\alpha\beta\gamma}^2$ sind, deren Differenz durch T^2 ohne Rest theilbar ist, die Schreibweise Geltung haben:

$$\Phi \equiv \Psi.$$

Dann ist:

$$(7) \quad A^2 \equiv \bar{A}^2 \quad \bar{A}B\Gamma \equiv A\bar{B}\bar{\Gamma}$$

$$(8) \quad R \equiv a^2 A^2 + b^2 B^2 + c^2 \Gamma^2 + 2bc\bar{B}\Gamma + 2ca\bar{\Gamma}A + 2ab\bar{A}B$$

$$AM_\beta \equiv \bar{B}M_\alpha \quad A\bar{B}M_\gamma \equiv \bar{B}\Gamma M_\alpha$$

$$(9) \quad M_\alpha^2 \equiv RA^2 \quad M_\alpha M_\beta \equiv RA\bar{B},$$

worin auch jede cyclische Vertauschung der Charaktere α, β, γ und zugleich A, B, Γ statthaft ist.

Addirt man zur rechten Seite von (VIII) den identisch verschwindenden Ausdruck R (§ 8 (7)) und bezeichnet die Summe mit $2M_\delta$, so sind

$$(10) \quad M_\delta = 0, \quad M_\epsilon = 0, \quad M_\zeta = 0$$

Flächen 4. O., welche die $R = 0$ ausser in dem Kegelschnittquadrupel (5) bzw. in den Curven:

$$(11) \quad (2u) = 0, \quad (2u)_\delta = 0, \quad (2u)_\zeta = 0$$

— den drei weiteren ausgezeichneten Haupttangentialcurven — schneiden. Setzt man noch zur Abkürzung:

$$(12) \quad aA + c_\delta \bar{\Gamma} = \Delta, \quad aA + c_\epsilon \bar{\Gamma} = E, \quad aA + c_\zeta \bar{\Gamma} = Z,$$

so ist:

$$(13) \quad M_\delta \equiv (aA + c_\delta \bar{\Gamma})\Delta + ab\bar{A}B + bc_\delta \bar{B}\Gamma$$

und man hat:

$$(14) \quad M_\delta^2 \equiv R\Delta^2, \quad M_\delta M_\epsilon \equiv R\Delta E \quad \text{u. s. w.}$$

$$(15) \quad M_\alpha M_\delta \equiv R\bar{A}\Delta, \quad M_\beta M_\delta \equiv R(a\bar{A}\bar{B} + c_\delta B\Gamma), \quad M_\gamma M_\delta \equiv R\Gamma\Delta.$$

Sind nun $\alpha, b, c, d, e, \zeta, r$ veränderliche Parameter und setzt man:

$$(16) \quad \alpha M_\alpha + b M_\beta + c M_\gamma + d M_\delta + e M_\epsilon + \zeta M_\zeta + r R = M$$

und führt man allenthalben die Coordinaten (1) ein, so gilt auf Grund von (9), (14), (15), die Gleichung:

$$(17) \quad M^2 = R R' + \alpha \beta \gamma \sigma \cdot K,$$

worin R' in $A, B, \Gamma, \bar{A}, \bar{B}, \bar{\Gamma}$ homogen und vom 2. Grade, $R' = 0$ also eine F_4 bedeutet, welche wie $R = 0$ und $M = 0$ die Tetraederecken zu Doppelpunkten hat. $K = 0$ bedeutet eine F'_4 , deren Coefficienten, wie diejenigen von $R' = 0$, die veränderlichen Parameter im 2. Grade enthalten.

Aus der Form der Gleichung (17) kann man nun eine Reihe von Eigenschaften der Flächen R' und K auf Grund der Eigenschaften von R und M erschliessen. Wir untersuchen zuerst die Schnitte. $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ sind Doppelebenen von R' , wie von R ; wir bezeichnen mit $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma, u_\sigma$ die Berührungskegelschnitte der letzten, mit $u'_\alpha, u'_\beta, u'_\gamma, u'_\sigma$ die der ersten. So haben wir z. B. als Schnitt von M und α die Curven u_α, u'_α , was symbolisch ausgedrückt sein soll durch: $(M, \alpha) = u_\alpha u'_\alpha$. Dann ist ebenso:

$$\begin{aligned}
 (\alpha, R) &= u_\alpha u_\alpha, & (\alpha, R') &= u'_\alpha u'_\alpha, & (M, R) &= u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\sigma \cdot \varrho \\
 (M, R') &= u'_\alpha u'_\beta u'_\gamma u'_\sigma \varrho',
 \end{aligned}$$

wobei ϱ und ϱ' Symbole für Curven 8. O., schliesslich:

$$(M, K) = \varrho \cdot \varrho'.$$

Wir schliessen nun — zur Vereinfachung der Sprechweise den allgemeinen Fall in's Auge fassend — wie folgt:

1) Jede Ecke ist, als Doppelpunkt von R und M , vierfacher Punkt von (M, R) . Durch sie muss also, da nur 3 Kegelschnitte hindurchgehen, ϱ einfach gehen. Von den übrigen Doppelpunkten von R liegen je 3 auf einem dieser Kegelschnitte. Da durch sie M hindurchgeht, sind es Doppelpunkte der (M, R) , also geht auch ϱ einfach durch sie. *ϱ geht durch alle Knotenpunkte von R einfach hindurch.*

2) ϱ schneidet jede Tetraederebene in 8 Punkten, z. B. die α in den sechs dortselbst befindlichen Knotenpunkten von R und zwei weiteren Punkten. u_α und u'_α schneiden sich ausser in den 3 Ecken in einem vierten Punkte $\mathfrak{P}_\alpha$ von α , welcher also Doppelpunkt der (M, α) ist, und daher berührt dort α neben der R auch die M , daher muss dort die (M, R) einen Doppelpunkt haben, dessen Zweige bezw. u_α und u'_α berühren. Nun ist der eine Zweig offenbar u_α selbst, der andere muss also ϱ angehören, d. h. ϱ berührt in $\mathfrak{P}_\alpha$ die α und die R , und hiermit sind die beiden letzten Schnittpunkte (ϱ, α) , als in $\mathfrak{P}_\alpha$ vereinigt, gefunden. Es folgt hieraus weiter, dass ϱ durch die Ecken hindurchgeht, ohne i. A. dort eine der Tetraederebenen zu berühren.

3) Ebenso lässt sich schliessen, dass ϱ' durch die Ecken des Tetraeders i. A. einfach hindurchgeht, dass diese Curve die α berührt im Punkte $\mathfrak{P}_\alpha$ und dort zugleich u_α , also R berührt, dass sie mithin mit jeder Tetraederebene noch 3 weitere Schnittpunkte hat, welche, da ϱ' der R' angehört, jeweils dem betreffenden Kegelschnitte u' angehören müssen. Diese sind daher, wie der Anblick von (17) lehrt, Doppelpunkte von R' . Mithin ist $R' = 0$ eine Kummer'sche Fläche.

4) Als Schnittpunkte von ϱ und R' sind nun bekannt:

- I. die Tetraederecken, in welchen M^2, RR' im 4. Grade, $\alpha\beta\gamma\sigma$ nur im 3. Grade, daher K im 1. Grade verschwindet,
- II. die Punkte $\mathfrak{P}_\alpha, \mathfrak{P}_\beta, \mathfrak{P}_\gamma, \mathfrak{P}_\sigma$, in welchen R und R' einfach, $\alpha\beta\gamma\sigma$ ebenfalls einfach, also K auch nur einfach verschwindet.

Jeder der vorgenannten Punkte zählt aber als Schnittpunkt von R' und ϱ doppelt: die Punkte I, weil zugleich Doppelpunkte von R ; die Punkte II als Berührungspunkte. Es bleiben also von den insgesamt $8 \cdot 4 = 32$ Punkten (ϱ, R') noch übrig:

III. 16 weitere Schnittpunkte ausserhalb der Tetraederebenen, und diese müssen, weil für sie M, R, R' verschwindet, Doppelpunkte von K sein.

Mithin ist $K = 0$ eine Kummer'sche Fläche.

Wir wollen noch darauf hinweisen, dass R' in besonderen Fällen, das Quadrat eines Ausdruckes 2. Gr. wird, z. B. ist für $b = 0, r = 0$

$$R' = (\alpha \bar{A} + c\Gamma + d\Delta + eE + fZ)^2.$$

§ 10.

Determinante eines Rosenhain-Quadrupels.

Wir gehen dazu über, vierzeilige Determinanten von je vier Thetafunctionen zu betrachten, geschrieben in vier beliebigen Argumenten. Zunächst ein Rosenhain'sches Quadrupel mit den Charakteristiken:

$$\alpha, \beta, \gamma, \sigma = \alpha\beta\gamma.$$

Seien u, v, w, t die Argumente und u', v', w', t' mit diesen verbunden durch die orthogonale Substitution:

$$(1) \begin{array}{ll} 2u' = -u + v + w + t & 2u = -u' + v' + w' + t' \\ 2v' = u - v + w + t & 2v = u' - v' + w' + t' \\ 2w' = u + v - w + t & 2w = u' + v' - w' + t' \\ 2t' = u + v + w - t & 2t = u' + v' + w' - t'. \end{array} \quad \text{woraus:}$$

Diese Formeln gehen aus (1) und (2) § 7 hervor, wenn man dort gleichzeitig die Vorzeichen von u, v', w', t' ändert. Durch die nämliche Aenderung geht dann die Riemann'sche Thetaformel (3), wenn man zugleich setzt:

$$\omega = \alpha\beta\gamma \quad \tau = \alpha\beta \quad \varrho = \gamma\alpha,$$

über in

$$(2) \quad 4u'_\alpha v'_\beta w'_\gamma t'_\sigma = \sum_x (-1)^{\sigma x \cdot x'} u_{x\beta\gamma} v_{x\gamma\alpha} w_{x\alpha\beta} t_{x\sigma}.$$

Durchläuft λ die Reihe $\delta, \varepsilon, \zeta, \sigma$, so sind $\lambda, \lambda\beta\gamma, \lambda\gamma\alpha, \lambda\alpha\beta$ 16 incongruente Charakteristiken. Man kann daher die rechte Seite von (2) in die Form setzen:

$$\sum_{\lambda=\delta,\varepsilon,\zeta,\sigma} (-1)^{\sigma\lambda\lambda'} (u_{\lambda\beta\gamma} v_{\lambda\gamma\alpha} w_{\lambda\alpha\beta} t_\lambda - u_{\lambda\gamma\alpha} v_{\lambda\alpha\beta} w_{\lambda\beta\gamma} t_{\lambda\beta\gamma} - u_{\lambda\alpha\beta} v_{\lambda\beta\gamma} w_{\lambda\gamma\alpha} t_{\lambda\gamma\alpha} - u_{\lambda\gamma\alpha} v_{\lambda\beta\gamma} w_{\lambda\alpha\beta} t_{\lambda\alpha\beta}).$$

Wenden wir nun auf das Glied $u'_\alpha v'_\beta w'_\gamma t'_\sigma$ den Process der Determinantenbildung an, d. h. nehmen wir die 12 geraden, sowie die 12 ungeraden Substitutionen der u, v, w, t vor, von welchen vermöge (1) jede die gleichlautende Substitution der gestrichenen Buchstaben

nach sich zieht, multipliciren im ersten Falle mit $+1$, im andern mit -1 , und addiren, so kommt:

$$(IX) \quad 2 \begin{vmatrix} u'_\alpha & u'_\beta & u'_\gamma & u'_\sigma \\ v'_\alpha & v'_\beta & v'_\gamma & v'_\sigma \\ w'_\alpha & w'_\beta & w'_\gamma & w'_\sigma \\ t'_\alpha & t'_\beta & t'_\gamma & t'_\sigma \end{vmatrix} = \sum_{\lambda} (-1)^{\sigma_{\lambda} \cdot \lambda'} \begin{vmatrix} u_{\lambda} & u_{\lambda\alpha\beta} & u_{\lambda\beta\gamma} & u_{\lambda\gamma\alpha} \\ v_{\lambda} & v_{\lambda\alpha\beta} & v_{\lambda\beta\gamma} & v_{\lambda\gamma\alpha} \\ w_{\lambda} & w_{\lambda\alpha\beta} & w_{\lambda\beta\gamma} & w_{\lambda\gamma\alpha} \\ t_{\lambda} & t_{\lambda\alpha\beta} & t_{\lambda\beta\gamma} & t_{\lambda\gamma\alpha} \end{vmatrix}.$$

Die Substitutionsformeln (1) vertragen eine gleichzeitige Vermehrung aller 8 Argumente um dieselbe Grösse. Vermehrt man um $\frac{1}{2}p_{\delta\epsilon}$, $\frac{1}{2}p_{\epsilon\zeta}$, $\frac{1}{2}p_{\zeta\delta}$, so erhält man drei neue Gleichungen, welche (IX) analog sind. Um diese bequemer schreiben zu können, führen wir die Bezeichnung ein:

$$(-1)^{\sigma_{\lambda} \cdot \lambda'} \begin{vmatrix} u_{\lambda} & u_{\lambda\alpha\beta} & u_{\lambda\beta\gamma} & u_{\lambda\gamma\alpha} \\ v_{\lambda} & v_{\lambda\alpha\beta} & v_{\lambda\beta\gamma} & v_{\lambda\gamma\alpha} \\ w_{\lambda} & w_{\lambda\alpha\beta} & w_{\lambda\beta\gamma} & w_{\lambda\gamma\alpha} \\ t_{\lambda} & t_{\lambda\alpha\beta} & t_{\lambda\beta\gamma} & t_{\lambda\gamma\alpha} \end{vmatrix} = \Delta_{\lambda}$$

und verstehen unter Δ_{λ} denselben Ausdruck, geschrieben in u' , v' , w' , t' . Wir haben dann zwischen den zweimal vier Grössen Δ_{δ} , Δ_{ϵ} , Δ_{ζ} , Δ_{σ} ; Δ'_{δ} , Δ'_{ϵ} , Δ'_{ζ} , Δ'_{σ} die Beziehungen einer orthogonalen Substitution, nämlich:

$$\begin{aligned} 2\Delta'_{\alpha} &= \Delta_{\sigma} + \Delta_{\delta} + \Delta_{\epsilon} + \Delta_{\zeta} \\ 2\Delta'_{\delta} &= \Delta_{\sigma} + \Delta_{\delta} - \Delta_{\epsilon} - \Delta_{\zeta} \\ 2\Delta'_{\epsilon} &= \Delta_{\sigma} - \Delta_{\delta} + \Delta_{\epsilon} - \Delta_{\zeta} \\ 2\Delta'_{\zeta} &= \Delta_{\sigma} - \Delta_{\delta} - \Delta_{\epsilon} + \Delta_{\zeta}. \end{aligned}$$

Man kann auch bei einzelnen Gliedern der Determinante Δ_{σ} in (IX) Vorzeichenänderungen herbeiführen und dadurch verwandte Gleichungen bilden. Wir vermehren u , v , w um $\frac{1}{2}p_{\beta\gamma}$ und t um $-\frac{1}{2}p_{\beta\gamma}$, dann bleiben u' , v' , w' ungeändert, t' wird um $p_{\beta\gamma}$ vermehrt, und Gleichung (IX) geht über in:

$$(IX\alpha) \quad 2 \begin{vmatrix} u'_\alpha & u'_\beta & u'_\gamma & u'_\sigma \\ v'_\alpha & v'_\beta & v'_\gamma & v'_\sigma \\ w'_\alpha & w'_\beta & w'_\gamma & w'_\sigma \\ -t'_\alpha & t'_\beta & t'_\gamma & -t'_\sigma \end{vmatrix} = \sum_{\lambda} (-1)^{\sigma_{\lambda} \cdot \lambda'} \begin{vmatrix} u_{\lambda} & u_{\lambda\alpha\beta} & u_{\lambda\beta\gamma} & u_{\lambda\gamma\alpha} \\ v_{\lambda} & v_{\lambda\alpha\beta} & v_{\lambda\beta\gamma} & v_{\lambda\gamma\alpha} \\ w_{\lambda} & w_{\lambda\alpha\beta} & w_{\lambda\beta\gamma} & w_{\lambda\gamma\alpha} \\ t_{\lambda} & -t_{\lambda\alpha\beta} & t_{\lambda\beta\gamma} & -t_{\lambda\gamma\alpha} \end{vmatrix}.$$

Ebenso kann man statt $\frac{1}{2}p_{\beta\gamma}$ auch $\frac{1}{2}p_{\gamma\alpha}$, $\frac{1}{2}p_{\alpha\beta}$ benützen und erhält dadurch zwei analoge Formeln (IX β), (IX γ). Durch Vorzeichenänderung und Addition erhält man dann aus (IX), (IX α), (IX β), (IX γ) Formeln von folgendem Typus:

$$\begin{vmatrix} u'_\alpha & u'_\beta & u'_\gamma & u'_\sigma \\ v'_\alpha & v'_\beta & v'_\gamma & v'_\sigma \\ w'_\alpha & w'_\beta & w'_\gamma & w'_\sigma \\ t'_\alpha & t'_\beta & t'_\gamma & -t'_\sigma \end{vmatrix} = - \sum_{\lambda} (-1)^{\sigma \lambda \cdot \lambda'} \cdot t_\lambda \begin{vmatrix} u_{\beta\gamma\lambda} & u_{\gamma\alpha\lambda} & u_{\alpha\beta\lambda} \\ v_{\beta\gamma\lambda} & v_{\gamma\alpha\lambda} & v_{\alpha\beta\lambda} \\ w_{\beta\gamma\lambda} & w_{\gamma\alpha\lambda} & w_{\alpha\beta\lambda} \end{vmatrix}$$

und:

$$4t'_\sigma \begin{vmatrix} u'_\alpha & u'_\beta & u'_\gamma \\ v'_\alpha & v'_\beta & v'_\gamma \\ w'_\alpha & w'_\beta & w'_\gamma \end{vmatrix} = \sum_{\lambda} \left\{ \Delta_{\lambda} + (-1)^{\sigma \lambda \cdot \lambda'} t_{\lambda} \begin{vmatrix} u_{\beta\gamma\lambda} & u_{\gamma\alpha\lambda} & u_{\alpha\beta\lambda} \\ v_{\beta\gamma\lambda} & v_{\gamma\alpha\lambda} & v_{\alpha\beta\lambda} \\ w_{\beta\gamma\lambda} & w_{\gamma\alpha\lambda} & w_{\alpha\beta\lambda} \end{vmatrix} \right\}.$$

Um nun auch die Thetafunctionen eines Göpel'schen Quadrupels in analoger Weise zur Determinantenbildung zu verwenden, empfiehlt es sich zuvor die Quadrate eines Rosenhain'schen Quadrupels heranzuziehen: Göpel hat zuerst bemerkt, dass durch die 4 Functionen eines Quadrupels auf Grund einer einfachen quadratischen Transformation die Quadrate von 16 Functionen mit anderen Argumenten linear ausgedrückt werden können. Es kommt mithin auf dasselbe hinaus, ob man ein Göpel'sches Quadrupel, oder ein Quadrupel der Quadrate eines Rosenhain-quadrupels betrachtet.

§ 11.

Determinante der Quadrate eines Rosenhain-Quadrupels.

1) Ueber die Determinante:

$$(1) \quad \Delta(u, v, w, t) = \begin{vmatrix} u_\alpha^2 & u_\beta^2 & u_\gamma^2 & u_\sigma^2 \\ v_\alpha^2 & v_\beta^2 & v_\gamma^2 & v_\sigma^2 \\ w_\alpha^2 & w_\beta^2 & w_\gamma^2 & w_\sigma^2 \\ t_\alpha^2 & t_\beta^2 & t_\gamma^2 & t_\sigma^2 \end{vmatrix} = \sum \pm u_\alpha^2 v_\beta^2 w_\gamma^2 t_\sigma^2,$$

in welcher u, v, w, t ganz beliebige Argumente sind, kann zunächst ausgesagt werden, dass sie ungeändert bleibt, wenn α, β, γ gleichzeitig um eine beliebige Charakteristik ω vermehrt werden.

Für $\omega = \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$ ist dies ohneweiters einleuchtend, für alle übrigen kann man es an dem Repräsentanten $\omega = \alpha\delta$ wie folgt nachweisen.

Da durch die vier linear unabhängigen Functionen $u_\delta^2, u_{\delta\alpha\beta}^2, u_{\delta\beta\gamma}^2, u_{\delta\gamma\alpha}^2$ die Functionen $u_\alpha^2, u_\beta^2, u_\gamma^2, u_\sigma^2$ homogen und linear ausgedrückt werden können, kann sich

$$(2) \quad \sum \pm u_\delta^2 v_{\delta\alpha\beta}^2 w_{\delta\gamma\alpha}^2 t_{\delta\beta\gamma}^2$$

von $\Delta(u, v, w, t)$ nur um einen von u, v, w, t unabhängigen Factor

unterscheiden, welcher $= 1$ ist, wie man leicht findet, wenn man u, v, w, t gleichzeitig um $\frac{1}{2} p_\varepsilon \zeta$ vermehrt.

2) Man erkennt auf demselben Wege, dass die Determinante

$$\Delta(u, v, w, t)$$

bei irgend einer Substitution der 6 Indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ sich nur um einen von u, v, w, t unabhängigen Factor ändern kann.

3) Zwischen u, v, w, t einerseits und u', v', w', t' anderseits sollen nun wieder die Beziehungen der orthogonalen Substitution § 10 (1) gelten, und soll zunächst die Determinante

$$\Delta(u', v', w', t')$$

als Function von t allein betrachtet und als solche mit $\Phi(t)$ bezeichnet werden.

Auf Grund der in 1) angegebenen Eigenschaft lässt sich zeigen, dass $\Phi(t)$ eine ϑ -Function 2. O. von t mit der Charakteristik 0 ist, d. h., dass für jede beliebige Charakteristik ω

$$(3) \quad \Phi(t + p_\omega) = e^{-2 \sum a_{hk} \omega_h \omega_k - 4 \sum \omega_h t_h} \cdot \Phi(t), \quad h = 1, 2.$$

Somit kann die Function homogen und linear dargestellt werden durch

$$t_\alpha^2, t_\beta^2, t_\gamma^2, t_\sigma^2$$

mit Hülfe von Coefficienten, welche von t unabhängig sind. Da aber t vor u, v, w nicht ausgezeichnet ist, kann man setzen:

$$(4) \quad \Delta(u', v', w', t') = \sum_h \sum_k \sum_l \sum_m c_{hklm} u_h^2 v_k^2 w_l^2 t_m^2,$$

wobei jeder Summationsindex die Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ zu durchlaufen hat.

Der von u, v, w, t unabhängige Coefficient c_{hklm} ist null, wenn irgend zwei Indices gleich sind. Denn ein Glied wie

$$c_{\alpha\alpha lm} u_\alpha^2 v_\alpha^2 w_l^2 t_m^2$$

ändert sich bei der Substitution (uv) nicht, während hierbei

$$\Delta(u', v', w', t')$$

unter Wirkung der simultanen Substitution $(u'v')$ das Zeichen wechselt.

Ueberhaupt zieht jede Substitution der Argumente u', v', w', t' wegen § 9, (1) dieselbe Substitution der gleichlautenden Argumente u, v, w, t nach sich. Man unterwerfe nun die u', v', w', t' irgend einer Substitution und multiplicire (4) mit $+1$ oder -1 , jenachdem die Substitution gerade ist oder ungerade. Diese Operation lässt $\Delta(u', v', w', t')$ ungeändert und kann deswegen auch (4) nicht ändern. Geht hierbei das Glied

$$u_h'^2 v_k'^2 w_l'^2 t_m'^2 \quad \text{über in} \quad \pm u_{h_1}'^2 v_{k_1}'^2 w_{l_1}'^2 t_{m_1}'^2,$$

so geht zu gleicher Zeit

$$c_{hklm} u_h^2 v_k^2 w_l^2 t_m^2 \text{ über in } \pm c_{hklm} u_{h_1}^2 v_{k_1}^2 w_{l_1}^2 t_{m_1}^2,$$

d. h. es ist

$$c_{h_1 k_1 l_1 m_1} = \pm c_{hklm},$$

jenachdem $hklm$ in $h_1 k_1 l_1 m_1$ übergeht durch eine Substitution gerader oder ungerader Ordnung.

Hieraus folgt aber

$$(5) \quad \Delta(u', v', w', t') = c_{\alpha\beta\gamma\sigma} \cdot \Delta(u, v, w, t)$$

und man findet durch Einsetzen specieller Werthe, etwa:

$$u = \frac{1}{2} p_{\beta\gamma}, \quad v = \frac{1}{2} p_{\gamma\alpha}, \quad w = \frac{1}{2} p_{\alpha\beta}, \quad t = p_{\alpha\beta\gamma},$$

dass $c_{\alpha\beta\gamma\sigma} = 1$ ist.

Man kann nun die Beziehung (5) noch etwas verallgemeinern. Sind nämlich

$$(6) \quad u_x^2, u_\lambda^2, u_\mu^2, u_\nu^2$$

irgend vier Thetaquadrate, zwischen welchen eine homogene lineare Gleichung mit constanten Coefficienten *nicht* besteht, so können

$$(7) \quad u_\alpha^2, u_\beta^2, u_\gamma^2, u_\sigma^2$$

homogen und linear durch die Functionen (6) ausgedrückt werden, also ist die Determinante $\Delta(u, v, w, t)$ bis auf einen von u, v, w, t unabhängigen Factor gleich der Determinante der Functionen (6), und wir haben den Satz:

Bestehen zwischen zwei Reihen von Argumenten

$$u, v, w, t \text{ und } u', v', w', t'$$

die Beziehungen der orthogonalen Substitution (1) § 10, und sind

$$\partial_x^2(u) = u_x^2, \quad \partial_\lambda^2(u) = u_\lambda^2, \quad \partial_\mu^2(u) = u_\mu^2, \quad \partial_\nu^2(u) = u_\nu^2$$

irgend vier linear-unabhängige Thetaquadrate, so ist:

$$(X) \quad \begin{vmatrix} u_x'^2 & u_\lambda'^2 & u_\mu'^2 & u_\nu'^2 \\ v_x'^2 & v_\lambda'^2 & v_\mu'^2 & v_\nu'^2 \\ w_x'^2 & w_\lambda'^2 & w_\mu'^2 & w_\nu'^2 \\ t_x'^2 & t_\lambda'^2 & t_\mu'^2 & t_\nu'^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x^2 & u_\lambda^2 & u_\mu^2 & u_\nu^2 \\ v_x^2 & v_\lambda^2 & v_\mu^2 & v_\nu^2 \\ w_x^2 & w_\lambda^2 & w_\mu^2 & w_\nu^2 \\ t_x^2 & t_\lambda^2 & t_\mu^2 & t_\nu^2 \end{vmatrix}.$$

Nach Göpel können ferner sämtliche 16 Thetaquadrate auf Grund quadratischer Transformation linear und homogen durch die Functionen eines Göpel'schen Quadrupels ausgedrückt werden, geschrieben mit doppelten Argumenten und Moduln, woraus wir schliessen:

Bilden die Functionen

$$\partial_a(u) = u_a, \quad \partial_b(u) = u_b, \quad \partial_c(u) = u_c, \quad \partial_e(u) = u_e$$

ein Göpel'sches Quadrupel, so geht durch die orthogonale Substitution § 10, (1) die Determinante

$$(XI) \quad \begin{vmatrix} u_a & u_b & u_c & u_c \\ v_a & v_b & v_c & v_c \\ w_a & w_b & w_c & w_c \\ t_a & t_b & t_c & t_c \end{vmatrix}$$

in sich über.

Zum Schluss möchte ich, als hierher gehörig, ein Formelsystem mittheilen, welches wie (IX) mit der Riemann'schen Thetaformel hergeleitet werden kann, ohne dass ich auf diese Herleitung näher eingehe, weil die Richtigkeit desselben ohnehin auf mannigfache Weise geprüft werden kann. Unter Voraussetzung der orthogonalen Substitution § 10, (1) ist:

$$(XII) \quad 4 \begin{vmatrix} u'_\alpha{}^2 & u'_\beta{}^2 & u'_\gamma{}^2 & u'_\sigma{}^2 \\ v'_\alpha{}^2 & v'_\beta{}^2 & v'_\gamma{}^2 & v'_\sigma{}^2 \\ w'_\alpha{}^2 & w'_\beta{}^2 & w'_\gamma{}^2 & w'_\sigma{}^2 \\ t'_\alpha{}^2 & t'_\beta{}^2 & t'_\gamma{}^2 & -3t'_\sigma{}^2 \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{u,v,\gamma} \sum_{\kappa} \sum_{\lambda} (-1)^{\sigma\kappa\cdot\kappa+\sigma\lambda\cdot\lambda} \begin{vmatrix} t_\kappa u_\lambda & t_{\kappa\beta\gamma} u_{\lambda\beta\gamma} & t_{\kappa\gamma\alpha} u_{\lambda\gamma\alpha} & t_{\kappa\alpha\beta} u_{\lambda\alpha\beta} \\ u_\kappa t_\lambda & u_{\kappa\beta\gamma} t_{\lambda\beta\gamma} & u_{\kappa\gamma\alpha} t_{\lambda\gamma\alpha} & u_{\kappa\alpha\beta} t_{\lambda\alpha\beta} \\ -v_\kappa w_\lambda & v_{\kappa\beta\gamma} w_{\lambda\beta\gamma} & v_{\kappa\gamma\alpha} w_{\lambda\gamma\alpha} & v_{\kappa\alpha\beta} w_{\lambda\alpha\beta} \\ -w_\kappa v_\lambda & w_{\kappa\beta\gamma} v_{\lambda\beta\gamma} & w_{\kappa\gamma\alpha} v_{\lambda\gamma\alpha} & w_{\kappa\alpha\beta} v_{\lambda\alpha\beta} \end{vmatrix}$$

und hieraus durch Vermehrung aller Argumente um $\frac{1}{2} p_{\beta\gamma}$:

$$4 \begin{vmatrix} u'_\alpha{}^2 & u'_\beta{}^2 & u'_\gamma{}^2 & u'_\sigma{}^2 \\ v'_\alpha{}^2 & v'_\beta{}^2 & v'_\gamma{}^2 & v'_\sigma{}^2 \\ w'_\alpha{}^2 & w'_\beta{}^2 & w'_\gamma{}^2 & w'_\sigma{}^2 \\ -3t'_\alpha{}^2 & t'_\beta{}^2 & t'_\gamma{}^2 & t'_\sigma{}^2 \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{u,v,w} \sum_{\kappa} \sum_{\lambda} (-1)^{\sigma\kappa\cdot\kappa+\sigma\lambda\cdot\lambda} \begin{vmatrix} t_\kappa u_\lambda & t_{\kappa\beta\gamma} u_{\lambda\beta\gamma} & t_{\kappa\gamma\alpha} u_{\lambda\gamma\alpha} & t_{\kappa\alpha\beta} u_{\lambda\alpha\beta} \\ u_\kappa t_\lambda & u_{\kappa\beta\gamma} t_{\lambda\beta\gamma} & u_{\kappa\gamma\alpha} t_{\lambda\gamma\alpha} & u_{\kappa\alpha\beta} t_{\lambda\alpha\beta} \\ v_\kappa w_\lambda & -v_{\kappa\beta\gamma} w_{\lambda\beta\gamma} & v_{\kappa\gamma\alpha} w_{\lambda\gamma\alpha} & v_{\kappa\alpha\beta} w_{\lambda\alpha\beta} \\ w_\kappa v_\lambda & -w_{\kappa\beta\gamma} v_{\lambda\beta\gamma} & w_{\kappa\gamma\alpha} v_{\lambda\gamma\alpha} & w_{\kappa\alpha\beta} v_{\lambda\alpha\beta} \end{vmatrix}.$$

Hierbei sind, wie bisher, α, β, γ die Indices von 3 ungeraden Charakteristiken und σ deren Summe, die Summationsindices κ und λ durchlaufen unabhängig von einander die Reihe der 3 übrigen ungeraden Charakteristiken δ, ϵ, ζ sowie deren Summe σ .

Für die Geometrie der Kummer'schen Fläche lässt sich aus den vorstehenden Formeln (XI) und (XII) folgendes sogleich erschliessen:

Sind u, v, w, t die Argumente von vier Punkten der Fläche, welche demselben ebenen Schnitte angehören, so liegen auch die vier Punkte, deren Argumente u', v', w', t' aus jenen durch die orthogonale Substitution

$$\begin{aligned} 2u' &= -u + v + w + t, \\ 2v' &= u - v + w + t, \\ 2w' &= u + v - w + t, \\ 2t' &= u + v + w - t \end{aligned}$$

hervorgehen, in einer Ebene. Denn für die vier erstgenannten verschwindet die Determinante $\sum \pm u_\alpha^2 v_\beta^2 w_\gamma^2 t_\sigma^2$, daher wegen (XI) auch $\sum \pm u_\alpha'^2 v_\beta'^2 w_\gamma'^2 t_\sigma'^2$. Ferner ergibt sich der von Herrn Rohn erkannte Satz, für welchen Herr Klein sowie Herr Humbert Beweise erbracht haben:

Liegen u, v, w, t auf einem der Berührungskegelschnitte, so liegen u', v', w', t' auf einer Geraden. Denn in diesem Falle verschwindet für die Argumente u, v, w, t eine der 16 Θ -Functionen; nehmen wir z. B.

$$u_\sigma = v_\sigma = w_\sigma = t_\sigma = 0.$$

Es besteht aber allgemein die Productrelation, die ich für u hier nur in der Form

$$a_\kappa u_\kappa u_{\kappa\sigma\mu} + a_\lambda u_\lambda u_{\lambda\sigma\mu} + a_\mu u_\mu u_\sigma = 0$$

anschreiben will, worin κ, λ irgend zwei verschiedene der 3 Indices $\delta, \varepsilon, \zeta$ und μ einen der Indices α, β, γ bedeutet. Auf Grund dieser Relation verschwinden dann sämtliche zweireihige Unterdeterminanten des Summationsglieds der rechten Seite von (XII), somit auch die linken Seiten, und also nicht nur $\sum \pm u_\alpha'^2 v_\beta'^2 w_\gamma'^2 t_\sigma'^2$, sondern auch alle ihre dreireihigen Unterdeterminanten.

Fallen nun insbesondere 3 der 4 Punkte in Knotenpunkte, ist also etwa bei oben gewähltem Beispiele:

$$v = \frac{1}{2} p_{\alpha\beta}, \quad w = \frac{1}{2} p_{\beta\gamma}, \quad t = \frac{1}{2} p_{\gamma\alpha},$$

während u veränderlich bleibt, wobei jedoch $u_\sigma = 0$ sein soll, so entspricht dem wandernden Punkte u eine wandernde Gerade, welche jeweils 4 Punkte u', v', w', t' ausschneidet. In unserem Beispiele ist: $2u' = -u + p_{\alpha\beta\gamma}$, $2v' = u + p_\gamma$, $2w' = u + p_\alpha$, $2t' = u + p_\beta$, sodass also wegen $u_\sigma = 0$

$$(2u')_\sigma = (2v')_\sigma = (2w')_\sigma = (2t')_\sigma = 0$$

wird; d. h. die 4 Punkte u', v', w', t' liegen auf einer der 10 Fundamentalfächen und die Gerade ist Erzeugende dieser Fläche.

Auf andere ebenso nahe liegende Folgerungen will ich hier weiter nicht eingehen.