VI. Theorie der Reflexion und Brechung an der Grenze von homogenen, isotropen, durchsichtigen Körpern mit Verallgemeinerung und Erweiterung der Grundlagen der Neumann'schen Methode;

von Dr. Moritz Réthy,

Professor an der Universität zu Klausenburg.

(Auszug aus einer Antrittsabh., der ung. Akad. d. Wiss. zu Budapest mitgetheilt am 15. März 1880.)

Der Fresnel-Cauchy'schen Theorie der Reflexion und Brechung an der Grenze von homogenen, isotropen, durchsichtigen Körpern liegen unter anderen zwei Hypothesen zu Grunde, die den entsprechenden der Neumann-Mac-Cullagh'schen diametral entgegengesetzt sind. Nach der ersteren Theorie sollen die Vibrationen des Aethers senkrecht, nach der zweiten parallel zur Polarisationssebene erfolgen. Nach der ersteren besäße der Aether in den verschiedenen Körpern gleiche Elasticität, verschiedene Dichte; nach der zweiten gleiche Dichte, verschiedene Elasticität.

Indess deutet die Verbreitung des Lichts in doppelt brechenden Körpern darauf hin, dass die Elasticität des Aethers von der Molecularconstitution der ponderablen Materie beeinflusst wird; andererseits sprechen die Aberrationserscheinungen für die Fresnel'sche Annahme von der Dichte des Aethers.

Es wird daher nicht überflüssig erscheinen, wenn hier eine vollständige Theorie der Reflexion und Brechung aufgestellt wird, welche frei ist von jedweder auf Dichte und Elasticität bezüglichen Hypothese, die vielmehr beliebige Functionen der Brechungsexponenten sein können, und welche in Uebereinstimmung mit der Neumann'schen Theorie mit transversalen Wellen auskommt.

Die gemeinsame Grundlage aller bisher aufgestellten Reflexionstheorien bildet das Fresnel'sche Continuitätsgesetz, das bezeichnender die Hypothese von der Erhaltung der Vibrationsgeschwindigkeit genannt werden könnte; das Gesetz sagt aus, dass gegenüberliegende Grenzpunkte der beiden

Aethermassen der Grösse und Richtung nach gleiche Vibrationsgeschwindigkeiten besitzen. Man betrachtet dies häufig als ein evidentes oder wenigstens leicht beweisbares Princip. Indess kann hier von unmittelbarer Evidenz keine Rede sein; auch findet man für das Gesetz keinen genügenden Beweis.¹⁾ Bedenkt man, dass die ponderable Materie auch in absolut durchsichtigen Körpern auf stationäre Weise mitschwingen kann, so wird man selbst an die Möglichkeit eines strengen Beweises zweifeln.

Das sogenannte Continuitätsprincip ist demnach einfach eine willkürliche Hypothese, an deren Stelle mit vollem Recht eine allgemeinere (mithin weniger willkürliche) gesetzt werden darf, die wie folgt lautet: Geht die Lichtbewegung von einem Körper in einen andern über, so ist die Richtung der Vibrationsgeschwindigkeiten in gegenüberliegenden Grenzpunkten unverändert dieselbe, das Grössenverhältniss hingegen (möglicherweise nicht $=1$, wie bisher angenommen wurde, sondern) irgend eine Function der Brechungsexponenten.

Nimmt man diese Hypothese von der „Erhaltung der Vibrationsrichtung“ an, so ergeben sich daraus mit Hinzuziehung des Principis von der Erhaltung der lebendigen Kraft die bekannten Fresnel'schen Gesetze der Reflexion und Brechung, wenn man die Bildung von Longitudinalwellen ausschliesst und zum Schluss über Vibrations- und Polarisationsrichtung die Neumann'sche Annahme macht.

Die elliptische Polarisation bei theilweiser Reflexion lässt sich hingegen ohne Hinzunahme einer fernerer Hypothese nicht vollständig darstellen. Man erhält nämlich ohne weiteres nur „eine“ Gleichung zwischen reducirtem Azimuth und Phasenunterschied der reflectirten Wellencomponenten. Diese liess sich aber an der Hand der Jamin'schen Versuche prüfen und verificiren, was zu

1) Mir ist blos der Fresnel'sche bekannt, und dieser beruht auf der Annahme der gleichen Elasticität und sprungweisen Aenderung der Dichte; dabei wird von dem Mitschwingen des wägbaren Stoffes abstrahirt.

Der Verfasser.

fernerer Untersuchung ermunterte. Auch gestatte man mir die Bemerkung, dass die Cauchy'sche Methode ohne Hinzuziehung vielfacher neuer, ad hoc erfundener Hypothesen keine einzige Beziehung lieferte, und dass andererseits die Zech'sche einfache Erklärung in Anbetracht der Quincke'schen Experimentaluntersuchungen¹⁾ (über negative Ellipticitätsconstanten) physikalisch unzulässig ist.

Zur vollständigen Darstellung reicht hin, wenn man eine der folgenden Hypothesen macht:

Hypothese I. Man nehme an, dass für Vibrationen, die senkrecht zur Einfallsebene erfolgen, der vom wägbaren Stoffe herrührende sogenannte fremde Grenzdruck nur bei solchen Körpern gleich Null ist, denen die Ellipticitätsconstante Null zukommt.

Diese Hypothese führt (mit Hinzunahme der frühern) zu einer zweiten Gleichung zwischen den oben genannten Grössen und dem Maximalwerth p des fremden Drucks. Aus den beiden Gleichungen ergeben sich aber Ausdrücke für Azimuth und Phasenunterschied, in denen die Grösse p dieselbe Rolle spielt wie der sogenannte Extinctionsexponent in der verallgemeinerten Cauchy'schen Theorie; sie erscheint also als eine durch sorgfältige Experimente zu bestimmende Grösse und kann auch leicht den Cauchy'schen, Green'schen und anderen Formeln gemäss bestimmt werden.

Hypothese II. Wenn die Vibrationen parallel zur Einfallsebene vor sich gehen, so ergibt sich leicht, dass der Maximalwerth einer dem oben genannten Druck entsprechenden Componente sich als lineare Function der Amplituden im einfallenden, reflectirten und gebrochenen Lichte darstellt, wo die Coëfficienten von der Form $k \cos 2\varphi$ sind, unter k Constanten verstanden. Man nehme an, dass der Ausdruck des Maximalwerthes unverändert bleibt, auch wenn die Vibrationen senkrecht zur Einfallsebene erfolgen, nur dass an Stelle der k andere physikalische Constanten treten.

1) Quincke, Pogg. Ann. 128. p. 369. 1866.

Diese Hypothese lässt keine Unbestimmtheit übrig; sie führt zu den abgekürzten Cauchy'schen Formeln.

I. Die ebene Grenzfläche der beiden Körper wähle man zur xy -Coordinatenebene, die Normale zur z -Axe, die Einfallsebene zur xy -Ebene. Man bezeichne Einfallswinkel und Brechungswinkel mit φ, φ_1 ; die Wellenlängen des Lichts von der Schwingungsdauer T in den beiden Körpern mit λ, λ_1 . Die Componenten der Vibrationsgeschwindigkeiten in der einfallenden, reflectirten, gebrochenen Welle seien der Reihe nach $u, v, w, -u_r, v_r, w_r, -u_1, v_1, w_1$; die Amplituden in der Einfallsebene A, A_r, A_1 ; senkrecht zur Einfallsebene B, B_r, B_1 .

Für die Vibrationsgeschwindigkeiten gelten (wenn Longitudinalwellen ausgeschlossen bleiben), wie bekannt, die Ausdrücke:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} u = A \cos \varphi \\ w = A \sin \varphi \\ v = B \end{array} \left\{ \sin 2\pi \left[\frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{\lambda} + \frac{t}{T} \right]; \right. \\ \begin{array}{l} u_r = A_r \cos \varphi \\ w_r = A_r \sin \varphi \end{array} \left\{ \sin \left[2\pi \left(\frac{x \sin \varphi - z \cos \varphi}{\lambda} + \frac{t}{T} \right) + \delta_r' \right] \right. \\ v_r = B_r \sin \left[2\pi \left(\frac{x \sin \varphi - z \cos \varphi}{\lambda} + \frac{t}{T} \right) + \delta_r \right] \\ \begin{array}{l} u_1 = A_1 \cos \varphi_1 \\ w_1 = -A_1 \sin \varphi_1 \end{array} \left\{ \sin \left[2\pi \left(\frac{x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1}{\lambda_1} + \frac{t}{T} \right) + \delta_1' \right] \right. \\ v_1 = B_1 \sin \left[2\pi \left(\frac{x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1}{\lambda_1} + \frac{t}{T} \right) + \delta_1 \right]. \end{array} \right.$$

Die Grössen $\delta_r, \delta_r', \delta_1, \delta_1'$ bezeichnen die Phasenunterschiede der resp. Wellen an Punkten der geometrischen Grenzfläche.

Unsere Hypothese von der Erhaltung der Vibrationsrichtung wird ausgedrückt durch folgende Gleichungen, die an der Grenze bestehen sollen:

$$(2) \quad v_1(u + u_r) = v u_1, \quad v_1(v + v_r) = v v_1, \quad v_1(w + w_r) = v w_1;$$

hier bezeichnet $v: v_1$ „das Verhältniss der resultirenden Vibrationsgeschwindigkeiten“ an beiden Seiten der Grenze; sein Werth war nach dem sogenannten Continuitätsprincip

= 1; das Verhältniss ist nach unserer Verallgemeinerung eine Function der Brechungsexponenten.

Das Princip der lebendigen Kraft verlangt ausserdem die Relationen:

$$(3) \quad \begin{cases} \mu (A^2 - A_r^2) \sin 2\varphi = \mu_1 A_1^2 \sin 2\varphi_1 \\ \mu (B^2 - B_r^2) \sin 2\varphi = \mu_1 B_1^2 \sin 2\varphi_1, \end{cases}$$

wo $\mu:\mu_1$ das Verhältniss der Dichten der Aethermassen in den beiden Körpern bezeichnet und unserer Annahme nach ebenfalls eine Function der Brechungsexponenten sein soll.

Die Gleichungen (1) und (2) geben nach der bekannten Methode das Snellius'sche Gesetz, und sie liefern Relationen zwischen den Amplituden und Phasenunterschieden. Um letztere zu behandeln, sollen die beiden Hauptcomponenten der Vibration abgesondert werden.

II. Die Schwingungen seien parallel zur Einfallsebene. Den genannten Relationen kann genügt werden, wenn $\delta_r = \delta'_r$ vielfache von 2π sind, und die beiden Gleichungen bestehen:

$$(4) \quad \begin{cases} \nu_1 (A + A_r) \cos \varphi = \nu A_1 \cos \varphi_1 \\ \nu_1 (A - A_r) \sin \varphi = \nu A_1 \sin \varphi_1. \end{cases}$$

Die Lösung dieser Gleichungen bilden:

$$(4a) \quad A_r = \frac{\sin(\varphi - \varphi_1)}{\sin(\varphi + \varphi_1)} A; \quad A_1 = \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \varphi_1)} \frac{\nu_1}{\nu} A.$$

Multipliziert man ferner die Gleichungen (4) miteinander und vergleicht das Product mit der ersten der Gleichungen (3), so ergibt sich:

$$(4b) \quad \nu_1^2 : \nu^2 = \mu : \mu_1.$$

Die Quadrate der resultirenden Vibrationsgeschwindigkeiten verhalten sich demnach umgekehrt wie die ersten Potenzen der Dichtigkeiten der betreffenden Aethermassen.

III. Die Schwingungen seien senkrecht zur Einfallsebene. Es gibt Körper, die bei theilweiser Reflexion keine elliptische Polarisation zeigen; wir wollen uns erst mit solchen beschäftigen. Die zweite der Gleichungen (2) ergibt dann die Relation:

$$(5a) \quad \nu_1 (B + B_r) = \nu B_1.$$

Dividirt man diese in die zweite der Gleichungen (3) und nimmt Rücksicht auf die Relation (4b), so erhält man dazu:

$$(5b) \quad \nu_1 (B - B_r) \sin 2\varphi = \nu B_1 \sin 2\varphi_1.$$

Aus den beiden Gleichungen bestimmen sich die Amplituden:

$$(6) \quad B_r = \frac{\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_1}{\sin 2\varphi + \sin 2\varphi_1} B, \quad B_1 = \frac{2 \sin 2\varphi}{\sin 2\varphi + \sin 2\varphi_1} \frac{\nu_1}{\nu} B.$$

IV. Die gefundenen Ausdrücke für die Amplituden und Phasen der gebrochenen und reflectirten Lichtwellen stimmen, — abgesehen von der constanten Grösse $\nu:\nu_1$, mit denen von Neumann vollständig überein; sie sind daher mit den Erfahrungen ebenso im Einklang, als diese, wenn man annimmt, dass Schwingungs- und Polarisations Ebenen parallel sind.

Wir gehen über zur Beschreibung der Vorgänge in der Nähe des Polarisationswinkels bei Körpern, denen eine Ellipticitätsconstante zukommt. Diejenigen unter den Gleichungen (1) und (2), welche die Componenten ν enthalten, liefern:

$$(7) \quad \nu_1 (B + B_r \cos \delta_r) = \nu B_1 \cos \delta_1, \quad \nu_1 B_r \sin \delta_r = \nu B_1 \sin \delta_1.$$

Dazu kommt die Gleichung der lebendigen Kraft, die man in Anbetracht der Relation (4b) schreiben kann wie folgt:

$$(7a) \quad \nu_1^2 (B^2 - B_1^2) \sin 2\varphi = \nu^2 B_1^2 \sin 2\varphi_1.$$

Quadriert man die beiden ersten Gleichungen und setzt den so gefundenen Werth von B_1^2 in die dritte ein, so ergibt sich sogleich:

$$(8a) \quad l_1 B_r^2 + 2 B_r B \cos \delta_r + m_1 B^2 = 0,$$

$$\text{wo} \quad l_1 = 1 + \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi_1}, \quad m_1 = 1 - \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi_1}.$$

Die Gleichung wurde abgeleitet aus der Hypothese von der Erhaltung der Vibrationsrichtung mit Hinzunahme blos des Principes der lebendigen Kraft und Ausschluss von Longitudinalwellen. Es wurde daher aus ihr mit Hinzuziehung der ersten Gleichung (4a) das reducirte Azimuth $\arctg (B_r:A_r)$ als Function von Ein-

fallswinkel und Phasenunterschied dargestellt und die Formel an zwei Beobachtungsreihen von Jamin direct geprüft. Wir können jedoch die daraus hervorgegangenen Tabellen entbehren, da im Folgenden allgemein bewiesen werden soll, dass die Cauchy'schen Formeln unserer Gleichung innerhalb der Fehlergrenzen der Beobachtung genügen.

Zu diesem Behufe soll der sogenannte fremde Druck, den die wägbare Materie auf die Einheit der Grenzfläche ausübt, berechnet werden. Da er gleich ist der Differenz jener Druckkräfte, die auf die entgegengesetzten Seiten der Grenzfläche (per Flächeneinheit) entfallen und nach dem Gesetze der inneren Druckkräfte gebildet sind (im gegebenen Falle lautet dieses Gesetz für die einfallende Welle, dass der innere Druck gleich ist $K \frac{\partial v}{\partial z}$, wo K den Elasticitätscoefficienten bedeutet etc.), so findet man für den fremden Druck, den wir mit P bezeichnen wollen:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= 2\pi \left[\frac{K}{\lambda} \cos \varphi (B \cos \vartheta - B_r \cos \vartheta + \delta_r) \right. \\ &\quad \left. - \frac{K_1}{\lambda_1} \cos \varphi_1 B_1 \cos (\vartheta + \delta_1) \right]. \end{aligned} \right.$$

Hier bezeichnen K und K_1 die Elasticitätscoefficienten der Aethermassen, ferner:

$$\vartheta = 2\pi \left[\frac{x \sin \varphi}{\lambda} + \frac{t}{T} \right] = 2\pi \left[\frac{x \sin \varphi_1}{\lambda_1} + \frac{t}{T} \right].$$

Dieser Druck soll nach unserer Hypothese I gleich Null sein für Körper, die keine elliptische Polarisation zeigen, d. i. bei denen δ_r und δ_1 gleich Null sind. Bei solchen Körpern besteht demnach zwischen den Elasticitätscoefficienten, Amplituden etc. die Gleichung:

$$\frac{K}{\lambda} \cos \varphi (B - B_r) = \frac{K_1}{\lambda_1} \cos \varphi_1 \cdot B_1,$$

die sich mit Hinzuziehung des Snellius'schen Brechungsgesetzes und der Gleichung (5b) schreiben lässt:

$$(10) \quad \frac{K \nu}{\sin^2 \varphi} = \frac{K_1 \nu_1}{\sin^2 \varphi_1}.$$

Die Hypothese liefert eine Relation zwischen den Elasticitäts- und Brechungsexponenten, und — wenn man ein früheres

Ergebniss hinzuzieht — den Dichten der beiden Aethermassen; sie bildet eine Verallgemeinerung der Neumann'schen Relation, wie zu erwarten war. Auch ist sie nicht bloß für Körper der betrachteten Art gültig, sondern für beliebige durchsichtige Körper, wenn man annimmt, dass die Verhältnisse der Elasticitätscoefficienten und Dichten von dem Verhältnisse der Brechungsexponenten nach einheitlichem Gesetz abhängt und nur von diesem, was wir vorausgesetzt haben.

Man berechne nun den Maximalwerth des Drucks P , den wir mit p bezeichnen wollen; reducire ihn mittelst der Gleichungen (7) und (10); führe die Abkürzungen ein:

$$l = \sin 2\varphi + \sin 2\varphi_1; \quad m = \sin 2\varphi - \sin 2\varphi_1; \quad a = \frac{\lambda}{\pi K}.$$

Man findet leicht:

$$(8b) \quad p^2 = \frac{1}{a^2 \sin^2 \varphi} \left[(mB - lB + \cos \delta_r)^2 + l^2 B_r^2 \sin^2 \delta_r \right].$$

Betrachtet man p als bekannt, so bildet diese Gleichung eine zweite Relation zwischen Amplitude und Phasenunterschied. Zur bequemen Auflösung der Gleichungen (8a) und (8b) setze man $B = 1$ und bedenke, dass:

$$l_1 \sin 2\varphi_1 = l; \quad m_1 \sin 2\varphi_1 = -m.$$

Es ergibt sich schliesslich:

$$(11) \quad \begin{cases} B_r^2 = \frac{(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_1)^2}{(\sin 2\varphi + \sin 2\varphi_1)^2} \left[1 + \frac{a^2 p^2 \sin^2 \varphi \sin 2\varphi_1}{(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_1)^2 \sin 2\varphi} \right], \\ B_r \cos \delta_r = \frac{\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi}{\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi} \left[1 + \frac{a^2 p^2 \sin^2 \varphi}{2 (\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_1) \sin 2\varphi} \right]. \end{cases}$$

Die Grösse p blieb bisher unbestimmt; sie soll nun den Erfahrungen entsprechend bestimmt werden. Man sieht vor allem, dass sie immer sehr klein bleiben muss; nur dann unterscheidet sich nämlich die Amplitude vom Fresnel'schen Werthe sehr wenig, was den Thatsachen entspricht. Wir wollen erst die Erscheinung untersuchen in einer Entfernung vom Polarisationswinkel, die genügt, dass man die Grösse in der Klammer auf der rechten Seite der zweiten Gleichung (11) gleich 1 setzen könne. Man hat so:

$$(12a) \quad B_r \cos \delta_r = \frac{\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi}{\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi}.$$

Dividirt man aber die erste der Gleichungen (11) in das Quadrat dieser Gleichung, so erhält man daraus:

$$(12b_1) \quad \operatorname{tg} \delta_r = \pm \frac{a p \sin \varphi}{\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_1} \sqrt{\frac{\sin 2\varphi_1}{\sin 2\varphi}},$$

eine Gleichung, die sich auch schreiben lässt:

$$(12b) \quad \operatorname{tg} \delta_r = \pm \operatorname{tg} (\varphi + \varphi_1) \cdot \frac{a_1 p}{\sin \varphi} \sqrt{\frac{\sin 2\varphi_1}{\sin 2\varphi}},$$

wo

$$a_1 = \frac{a}{2 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)}$$

gesetzt ist; dabei bezeichnet n das Verhältniss der Brechungsexponenten, nämlich $\sin \varphi : \sin \varphi_1 = n$; a_1 ist mithin eine Constante.

Die Gleichungen (12a) und (12b) sind identisch mit den Cauchy'schen, resp. Green'schen Formeln, wenn man:

$$(12c) \quad a_1 p = \varepsilon \sin^2 \varphi \sqrt{\frac{\sin 2\varphi_1}{\sin 2\varphi}}, \text{ resp. } a_1 p = \varepsilon \sin \varphi \sqrt{\frac{\sin 2\varphi_1}{\sin 2\varphi}}$$

setzt, wo ε die Jamin'sche, resp. Green'sche Ellipticitätsconstante bedeutet.

Ich habe mich übrigens durch directe Vergleichung mit zwei Beobachtungsreihen von Jamin überzeugt, dass auch:

$$a_1 p = \varepsilon \sin^2 \varphi$$

und, wenn auch minder genau:

$$a_1 p = \varepsilon \sin \varphi$$

ebenfalls genügen.

Wir haben noch die Untersuchung nachzutragen, mit welcher Genauigkeit die Gleichungen (12) den aus der Theorie abgeleiteten vollständigen Gleichungen (11) genügen. — Zu diesem Behufe nehme man z. B. den ersten der Ansätze (12c) an; dann liefert die erste der Gleichungen (11) für B_r genau dieselben Werthe wie das System (12a), (12b), da sie sich aus diesen direct ableiten lässt. Es bleibt daher nur noch nachzuweisen übrig, dass die zweite der Gleichungen (11) Werthe für δ_r liefert, die den aus (12b) sich ergebenden nahe genug stehen. — Der Nachweis ist sehr leicht, denn man sieht, dass der Ausdruck in der Klammer, der sich schreiben lässt:

$$1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{\sin^2 \varphi}{\sin(\varphi - \varphi_1)} \cdot \frac{\varepsilon^2}{\cos(\varphi - \varphi_1)}$$

wirklich sehr nahe gleich 1 ist selbst für Werthe von φ , die der Bedingung:

$$\cos(\varphi + \varphi_1) = \varepsilon \quad \text{oder auch} \quad \cos(\varphi + \varphi_1) = \varepsilon^{\frac{3}{2}}$$

genügen, also selbst für Winkel φ , die vom Polarisationswinkel blos um einige Minuten absteigen. Es bleibt also nur noch die unmittelbare Gegend des Polarisationswinkels übrig.

Setzt man demgemäss $\varphi + \varphi_1 = 90^\circ$, so leitet sich aus den Gleichungen (11) unschwer ab:

$$\cos \delta_r = \frac{ap \sin \varphi}{2 \sin 2\varphi};$$

da ap von der Ordnung ε ist, so hat man demnach für δ_r einen Werth, der sich von $\frac{\pi}{2}$ nicht merklich unterscheidet, was mit den Erfahrungen übereinstimmt, was zu beweisen war.

V. Wir wollen noch den Weg kurz bezeichnen, wie die Cauchy'schen Formeln aus der Hypothese II (p. 123) abgeleitet werden.

Die Vibrationen seien parallel zur Einfallsebene; man berechne die in die Einfallsebene einfallende Tangentialcomponente P_1 des fremden Drucks.

Man findet (vermittelst der bekannten Formel $K \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$):

$$P_1 = 2\pi \left[\frac{K}{\lambda} (A + A_r) \cos 2\varphi - \frac{K_1}{\lambda_1} A_1 \cos 2\varphi_1 \right] \cos \vartheta.$$

Nach der Hypothese II soll der Maximalwerth der senkrecht zur Einfallsebene wirkenden Tangentialcomponente des fremden Drucks nach demselben Gesetz gebaut sein, wenn die Vibrationen senkrecht zur Einfallsebene erfolgen, nur dass die Constanten andere sein können. Man hat demnach die genannte Componente, die im vorliegenden Falle eben die ganze Kraft ausmacht:

$$(13a) \quad P = \pi \alpha \left[\frac{K}{\lambda} (B + B_r) \cos 2\varphi - \beta \frac{K_1}{\lambda_1} B_1 \cos 2\varphi_1 \right] \cos(\vartheta + \delta),$$

wo α und β von der Natur der angrenzenden Stoffe abhängige Constanten sind, die Grösse δ aber unbestimmt bleibt.

Wir haben hiermit für dieselbe Kraft, deren Werth durch die Gleichung (9) gegeben ist, einen zweiten Ausdruck. Die beiden Ausdrücke können aber für Körper, deren Ellipticitätscoefficient gleich Null ist, (wie man findet) nur dann gleich sein, wenn beide verschwinden. Daraus ergibt sich einerseits, dass für solche Körper $\alpha = 0$ ist, und andererseits die durch die Gleichung (10) ausgedrückte Beziehung zwischen Elasticitätscoefficienten, Brechungsexponenten und Dichten des Aethers (die also auch der zweiten Hypothese folgt).

Wir können so den Schluss ziehen, dass die Gleichungen (11) auch so bestehen müssen; die Grösse p , die den Maximalwerth des fremden Druckes bedeutet, hat aber hier der Gleichung (13a) gemäss zum Ausdruck:

$$p = \pi \alpha \left[\frac{K}{\lambda} (B + B_r) \cos 2\varphi - \beta \frac{K_1}{\lambda_1} B_1 \cos 2\varphi_1 \right],$$

die sich vermittelt Gl. (10), und wenn man wiederum $\alpha = \frac{\lambda}{\pi K}$ setzt, schreiben lässt:

$$(13b) \quad \alpha p = \alpha \left[(B + B_r) \cos 2\varphi - \beta \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi} \frac{\nu}{\nu_1} B_1 \cos 2\varphi_1 \right].$$

Wir behaupten nun, dass die Gleichungen (11) die Cauchy'schen Formeln liefern, wenn man über die Constanten α und β passend verfügt, und zwar so, dass α gleich dem Ellipticitätscoefficienten und $\beta = \sin \varphi : \sin \varphi_1$ (also gleich dem relativen Brechungsexponenten) sei.

In der That gelten dann die Gleichungen (12a) und (12b), und man vernachlässigt nur kleine Grössen höherer Ordnung, wenn man in (13b) statt B_r und B_1 die durch die Gleichungen (6) gegebenen Werthe setzt, und findet so, wenn wiederum $B = 1$ gesetzt wird:

$$\alpha p = 2 \alpha \sin 2\varphi \operatorname{tg} (\varphi_1 - \varphi).$$

Dies in Gl. (12b₁) eingesetzt, liefert nach einfachen Reductionen:

$$\operatorname{tg} \delta_r = \pm \alpha \sin \varphi \operatorname{tg} (\varphi + \varphi_1) \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 (\varphi - \varphi_1)}{\operatorname{tg}^2 (\varphi + \varphi_1)}}.$$

Man bedenke endlich, dass von einer elliptischen Polarisation nur bei Winkeln eine Spur zu finden ist, wo $\operatorname{ctg} (\varphi + \varphi_1)$

von der Ordnung des Ellipticitätscoefficienten ist. In dem in Betracht kommenden Bereiche kann daher die Wurzelgrösse ohne weiteres gleich eins gesetzt werden.

Man hat daher nebst Gl. (12a) die Formel:

$$\operatorname{tg} \delta_r = \pm \alpha \sin \varphi \operatorname{tg} (\varphi + \varphi_1);$$

dies sind aber die bekannten abgekürzten Formeln von Cauchy.

VI. Die totale Reflexion wird auf Grundlage unserer Grenzbedingungen auf dieselbe Weise dargestellt wie nach der Neumann'schen Methode; die Resultate bleiben unverändert, nur tritt $\frac{\nu}{\nu_1} B_1$ an die Stelle von B_1 , was ohne Belang ist.

Man erlaube mir zur Verhütung etwaiger Missverständnisse nur noch eine Bemerkung. Man könnte aus den Gleichungen (4b) und (10) mit Hinzuziehung zweier bekannter Sätze aus der Elasticitätstheorie Schlüsse ziehen, die unsere Theorie als illusorisch erscheinen liessen. Wir meinen folgende Sätze: 1) Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellen verhalten sich wie die Brechungsexponenten der Mittel; und 2) das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist gleich dem Elasticitätscoefficienten dividirt durch die Dichte des Mittels. Man vergesse aber nicht, dass der zweite dieser Sätze von der gegenseitigen Durchdringung zweier Mittel (von denen das eine Lichtäther, das zweite der ponderable Stoff ist) absieht, also auf unsere Theorie nicht angewendet werden darf.

Die angezogenen Gleichungen, nämlich:

$$(4b) \quad \nu_1^2 : \nu^2 = \mu : \mu_1,$$

$$(10) \quad K\nu : K_1\nu_1 = \sin^2 \varphi : \sin^2 \varphi_1$$

liefern zwei Beziehungen zwischen den Brechungsexponenten, Dichten, Elasticitätscoefficienten und den resultirenden Vibrationsgeschwindigkeiten (an der Grenze der beiden Mittel); und die Reflexionstheorie erfordert ausser ihnen nichts. Kann aber eine der Grössen vermittelt anderer Erscheinungen als Function des Brechungsexponenten bestimmt werden, so bestimmen sich aus den Beziehungen die übrigen.

So ist z. B. zur Erklärung der Arago'schen negativen Versuche etc. von Fresnel angenommen, dass:

$$\mu_1 : \mu = \sin^2 \varphi : \sin^2 \varphi_1;$$

daraus folgt mittelst Gl. (4b) und (10), dass:

$$v : v_1 = \sin \varphi : \sin \varphi_1$$

$$K : K_1 = \sin \varphi : \sin \varphi_1.$$

VII. Wir fassen das Resultat dieser Untersuchungen kurz zusammen:

Durch Aufstellung von Grenzbedingungen, die eine berechnete Verallgemeinerung der Fresnel'schen bilden, wurde eine Theorie der Reflexion und Brechung in homogenen, isotropen, durchsichtigen Mitteln erzielt, die auch die elliptische Polarisation bei theilweiser Reflexion umfasst und mit den bekannten Arago'schen negativen und Fizeau'schen positiven Resultaten verträglich ist, dabei aber in Bezug auf die Schwingungsrichtung an der Neumann'schen Hypothese festhält; die Einwände, die man gegen letztere Hypothese aus der Reflexionstheorie und den herbeigezogenen Thatsachen zu schöpfen gewohnt ist, erscheinen hiermit vollständig beseitigt.

VII. *Thermische Theorie der Electricitätsentwicklung; von J. L. Hoorweg.*

(Fortsetzung aus Wied. Ann. 9. p. 590. 1880.¹⁾)

§ 12. In § 10e habe ich den Satz ausgesprochen: „Wenn in einer geschlossenen Kette verschiedener Stoffe die Summe der electricischen Differenzen von Null verschieden ist, so entsteht ein galvanischer Strom.“ Jetzt will ich untersuchen, bei welchen Combinationen dieser Fall eintritt.

1) Ich bedauere sehr, beim Schreiben meiner ersten Abhandlung mit den schönen Untersuchungen Hankel's nicht wohl bekannt gewesen zu sein. Dies war auch der Fall mit den Versuchen von Perry und Ayrton, welche an Genauigkeit die meinigen übertreffen, während sie meine Theorie fester begründen. (Phil. Trans. p. 15. 1880.)