Über Lichtstrahlenkrümmung, Spektrallinienverschiebung und Krümmungsradius des Universums im Anschlusse an *Poisson*. Von *J. Wodetzky*.

1. Im 65. Bande der »Annalen der Physik« hat *P. Lenard* einen Auszug aus einer Arbeit des Geodäten *Soldner* mitgeteilt¹⁾, in welcher dieser die Ablenkung eines Lichtstrahles berechnet unter der Annahme, daß das Licht ponderomotorischen Einwirkungen unterliegt.

Es ist vielleicht nicht ohne Interesse zu bemerken, daß *Poisson* in der zweiten Auflage seines »Traité de Mécanique« (Paris, 1833) unter Zugrundelegung der alten Emissionstheorie die Gesetze der Reflexion und Refraktion ableitet²⁾, indem er das Licht ponderomotorischen Einwirkungen unterwirft. Er zeigt, daß die genannten Gesetze sich auf diese Weise unmittelbar ergeben als mit Hilfe des Prinzips der kleinsten Wirkungen. *Poisson* schließt seine Ausführungen mit folgender Bemerkung³⁾:

»Un rayon lumineux, lancé du soleil ou d'une étoile, doit éprouver dans sa vitesse, comme tout autre projectile, une diminution due à sa pesanteur vers cet astre, c'est-à-dire, à l'attraction en raison inverse du carré des distances à son centre, que la masse du corps exerce sur chaque particule matérielle de la lumière; mais cette diminution est une fraction très petite de la vitesse finale de la lumière. Ainsi, par exemple, l'intensité de la pesanteur à la surface du soleil étant vingt-sept fois et demi l'intensité de la pesanteur terrestre, comme on le verra par la suite, et le rayon du soleil étant égal à 110 rayons de la terre, on conclut de ce qu'on a vu dans le no. 143, que la vitesse de la lumière, pour être de 30950 myriamètres par seconde à une grande distance du soleil, a dû être plus grande d'un peu moins de deux millièmes seulement, en partant de sa surface«.

Wenn auch die Zulässigkeit der Emissionstheorie beanstandet werden kann, so verliert diese Bemerkung *Poissons* doch nicht an Bedeutung, denn sie beweist, daß zu verschiedenen Zeiten hervorragende Denker eine Einwirkung der Gravitation auf das Licht in den Bereich der physikalischen Betrachtung zogen. In einer Vorbemerkung zur Arbeit *Soldners* setzt *Lenard* die modernen Ansichten über die Möglichkeit einer Einwirkung der Gravitation auf das Licht auseinander⁴⁾.

Versucht man unter Annahme des *Newtonschen* Gravitationsgesetzes die Bemerkung *Poissons* zu verifizieren, so wird man auf die denkbar einfachste Weise auf einige Resultate geführt, welche auch mit der Relativitätstheorie in enger Verbindung stehen und hier in einem anderen Zusammenhange erscheinen.

Wir werden auch die Gesamtmasse des Universums in Betracht ziehen und mittels einer äußerst einfachen Überlegung den Krümmungsradius des Universums bestimmen und schließlich auf den eigentlichen Unterschied der *Newtonschen* und der Relativitätstheorie hinweisen.

Es bezeichne m die baryzentrisch gedachte Masse eines Himmelskörpers, k^2 die Gravitationskonstante, v die Geschwindigkeit (in Bezug auf den Massenn Mittelpunkt von m) einer zweiten Masse, deren Größe neben m zu vernachlässigen ist. Für die ungestörte Bewegung liefert dann das *Newtonsche* Gesetz bekannterweise das Energieintegral

$$v^2 = k^2 m (2/r \pm 1/a) \quad (1)$$

wo r die Entfernung der infinitesimalen Masse vom Massennmittelpunkte m , und a die halbe große (oder reelle) Achse eines Kegelschnittes bedeutet, dessen Brennpunkt in den Massennmittelpunkt von m fällt. Das obere Zeichen gilt für hyperbolische, das untere für elliptische und Kreis-Bewegung. Für $a \rightarrow \infty$ erhält man die parabolische Geschwindigkeit. Mit den üblichen Werten findet man für die Oberfläche der Sonne 612 km als Wert der parabolischen Geschwindigkeit. Da die Lichtgeschwindigkeit fast 500mal größer ist, so gilt das obere Zeichen für hyperbolische Bewegung.

Ist also das Licht der Wirkung der Gravitation unterworfen, so sind alle Lichtstrahlen, welche von der Oberfläche z. B. der Sonne (oder eines Gestirnes) ausgehen, Hyperbeln, deren gemeinsamer Brennpunkt mit dem Mittelpunkte der (kugelförmig gedachten) Sonne zusammenfällt und die demnach ihre konkave Seite diesem Mittelpunkte zuwenden. Die Lichtgeschwindigkeit ist variabel, hat ihren größten Wert an der Oberfläche der Sonne (für $r = r_0 = \text{Sonnenradius}$), und nähert sich mit zunehmender Entfernung für $r \rightarrow \infty$ einem Grenzwerte v_0 , für welchen man aus (1) hat

$$v_0^2 = k^2 m/a \quad (2)$$

Dieses v_0 ist demnach eine untere Grenze für die Lichtgeschwindigkeit.

Wir wollen gleich hier feststellen, daß in einem statischen Gravitationsfelde das c der Relativitätstheorie eine obere Grenze der Lichtgeschwindigkeit darstellt. Denn in dieser ist die Lichtgeschwindigkeit mit genügender Näherung gegeben mittels⁵⁾

$$v = c - k^2 m/cr \quad (3)$$

und c ist obere Grenze für $m \rightarrow 0$ oder $r \rightarrow \infty$. Im *Newtonschen* Falle hat $m \rightarrow 0$ keinen Sinn.

¹⁾ l. c. p. 593-604, wo auch weitere Literaturangaben aufgeführt sind.

²⁾ l. c. tome I, p. 301-317. (Digression sur le mouvement de la lumière.)

³⁾ l. c. p. 316-317.

⁴⁾ Vgl. auch *Lenards* Abhandlung »Über Äther und Uräther« im Jahrb. d. Radioaktiv. u. Elektronik, Bd. 17, p. 307-356.

⁵⁾ *Weyl*, Raum, Zeit, Materie, 4. Aufl. 1921, p. 220 und 231. — *Paulis* Referat in der Encycl. d. mathem. Wissensch. p. 712 Formel (391) und p. 716 Formel (394a). — *Einstein*, Die Grundlagentheorie d. allg. Rel.-Theorie, 1916, p. 63 ist die Formel für die Lichtgeschwindigkeit offenbar durch einen Druckfehler entstellt.

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$v^2 = v_0^2 (1 + 2a/r) \quad (4)$$

und folglich, mit genügender Annäherung,

$$v = v_0 (1 + a/r) = v_0 + k^2 m / (v_0 r). \quad (5)$$

Ferner aus (2) auch

$$a = k^2 m / v_0^2. \quad (6)$$

Dieser letztere Ausdruck ist identisch mit der Formel (70a) in *Einsteins »Grundlage«* (p. 60); er wird in der Relativitätstheorie auch Gravitationsradius genannt¹⁾. Hier, unter der *Newtonschen* Annahme, erscheint diese Größe einfach als die halbe reelle Achse der hyperbolischen Trajektorien (verschiedener Exzentrizität) sämtlicher Lichtstrahlen, die von der Oberfläche eines Gestirns ausgehen. Setzen wir in (5) die üblichen Werte für Sonnenmasse, Sonnenhalbmesser und Gravitationskonstante, so wird an der Sonnenoberfläche

$$v = v_0 (1 + 2 \cdot 10^{-6})$$

wie bei *Poisson*.

Die Lichtgeschwindigkeit wäre demnach variabel und die Trajektorie, in Übereinstimmung mit dem *Huyghensschen* Prinzip, eine krumme Linie. Auch *Lenard* im »Äther u. Uräther« nimmt variable Lichtgeschwindigkeit an (besonders p. 322).

Die Formel (5) gilt aber auch für Strahlen, die von andern Gestirnen ausgehend in der Nähe der Masse m vorbeigehen. Für alle diese Strahlen ist a dasselbe [aus (6)], und wenn r_1 die Entfernung zwischen dem Scheitel der Hyperbel und dem Massenmittelpunkte von m , ferner ϵ die numerische Exzentrizität, b die halbe imaginäre Achse bedeutet, so ist

$$a^2 \epsilon^2 = (a + r_1)^2 = a^2 + b^2$$

$$b = r_1 (1 + 2a/r_1)^{1/2} \rightarrow r_1 (1 + a/r_1 + \dots).$$

Ist daher ϵ der Winkel zwischen der Asymptote und der imaginären Achse, so ist mit genügender Genauigkeit

$$\text{tg } \epsilon \rightarrow \epsilon = a/b = (a/r_1) (1 + a/r_1)^{-1} \rightarrow a/r_1$$

und folglich die Ablenkung des Lichtstrahles

$$2\epsilon = 2a/r_1 = 2k^2 m / (v_0^2 r_1). \quad (7)$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit dem B der Formel (74) in *Einsteins »Grundlage«* (p. 63). *Soldner* findet dieses Resultat auf einem unnötig komplizierten Wege. Man vergleiche auch die Ableitung bei *Weyl*, l. c. p. 235 und die Bemerkungen *Laues* in dessen »Relativitätstheorie«, Bd. II. p. 228. Nach der Relativitätstheorie beträgt die Gesamtablenkung genau das Doppelte des *Newtonschen* Wertes (7), und sieht diese Theorie hierin den Beweis, daß der Streckenraum in der Nähe z. B. der Sonne nichteuklidisch beschaffen ist.

Aber auch für die *Newtonsche* Annahme ist (7) noch nicht der volle Wert, sondern vielmehr nur eine lokale Krümmung. Denn konsequenterweise müssen wir eine Wirkung der Gesamtmasse des Universums zugeben. Auch wir können, genau so wie die Relativitätstheorie²⁾, eine endliche Gesamtmasse und endliches Volumen der Welt annehmen. Die uns umgebende »Welt« wäre hiernach nur eine kleine Masseninsel im euklidischen Raume. Wie *Charlier* nachgewiesen hat³⁾, können solche Welten in unendlicher Anzahl existieren, ohne

daß das *Newtonsche* Gesetz zu Unbestimmtheiten führe. Dann muß das Licht in unserem interstellaren Raume auch eine »kosmische« Krümmung erfahren. Nehmen wir z. B. an, unsere Sternenwelt sei kugelförmig begrenzt und die mittlere Dichte konstant, so sind die kosmischen Trajektorien des Lichtes Ellipsen, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte des Universums zusammenfällt. Hiernach ist aber die kosmische Krümmung des Lichtes verschieden, je nach der Entfernung der Sterne von der Sonne und vom Weltmittelpunkte, unterschiedlich von der Relativitätstheorie, laut welcher das Licht aller Sterne dieselbe Krümmung zeigt. Auch könnte laut der *Newtonschen* Auffassung bei einer Sonnenfinsternis nur die lokale Krümmung beobachtet werden, während die kosmische auf anderem Wege ermittelt werden müßte.

2. Als eine andere unmittelbare Folge ergibt sich aus (5) die Rot-, resp. Violett-Verschiebung der Spektrallinien, wenn man annimmt, daß die Schwingungszahl unverändert bleibt. Man vergleiche bezüglich der Erhaltung der Schwingungszahlen die Ausführungen *Laues* (l. c. p. 188–191). *Lenard* in seiner bereits zitierten Schrift »Über Äther und Uräther« (p. 322) gelangt auf einem ganz verschiedenen und unabhängigen Wege zur Forderung der Unveränderlichkeit der Frequenz.

Es sei n die konstante Schwingungszahl. Für die Masse m ist dann laut (5) die entsprechende Wellenlänge

$$\lambda = v/n = (v_0/n) (1 + a/r_0)$$

und für eine andere Masse m' die derselben Frequenz entsprechende Wellenlänge

$$\lambda' = v'/n = (v_0/n) (1 + a'/r'_0)$$

wenn r_0 und r'_0 die Halbmesser von m und m' , a und a' die halben reellen Hyperbelachsen, v und v' die Lichtgeschwindigkeiten auf der Oberfläche von m resp. m' bezeichnen. Hiernach ist die Linienverschiebung

$$(\lambda - \lambda')/\lambda' = (a/r_0 - a'/r'_0) (1 + a'/r'_0)^{-1}$$

oder mit genügender Annäherung

$$(\lambda - \lambda')/\lambda' = a/r_0 - a'/r'_0 = (k^2/v_0^2) (m/r_0 - m'/r'_0) \quad (8)$$

was eine Rotverschiebung bedeutet, wenn $a/r_0 > a'/r'_0$, Violettverschiebung im entgegengesetzten Falle.

In genau derselben bemerkenswerten Form, — als Potentialdifferenz, — finden wir die Rotverschiebung z. B. bei *Pauli*⁴⁾. Nur figuriert dort den Annahmen der Relativitätstheorie entsprechend die variable Frequenz. Hätten wir die Wellenlänge als konstant und entsprechend die Frequenz als variabel betrachtet, so ginge die linke Seite von (8) in die entsprechende Form der Frequenz über⁵⁾. Einen Ansatz zu einer ähnlichen Ableitung macht *Mohorovičić* in den »Annalen der Physik«⁶⁾, wobei aber die Schwingungszahl als veränderlich angenommen und die nicht zutreffende Folgerung gezogen wird, daß die Farbe mit wachsender Entfernung sich gegen das rote Ende des Spektrums verschiebe. Unsere Formel zeigt hingegen, daß die Verschiebung von einer Potentialdifferenz abhängt und nach Rot, Violett oder auch gar nicht erfolgt, je nachdem $m/r_0 \gtrless m'/r'_0$. Ein selbstleuchtender kleiner

¹⁾ *Weyl*, l. c. p. 232; *Pauli*, l. c. p. 728.

²⁾ *Einstein*, Kosmologische Betrachtungen z. allgem. Relativitätstheorie, Sitzb. d. Kgl. Preuß. Akd. d. Wiss. 1917, p. 152.

³⁾ *Arkiv f. Mat. Astr. och Fys.* Bd. 16. No. 22.

⁴⁾ l. c. p. 714, Formel (393).

⁵⁾ Vgl. auch die Ausführungen bei *Weyl*, l. c. p. 223.

⁶⁾ Bd. 66, 1921, p. 227–228.

Planet z. B. müßte demnach von der Erde aus beobachtet Violettverschiebung zeigen, vorausgesetzt daß keine abnormalen Dichteverhältnisse vorhanden sind.

3. Aus (5) folgt auch sofort, daß der scheinbare Durchmesser eines selbstleuchtenden Gestirns eine Vergrößerung erfahren muß. Denn geschieht die Ausbreitung des Lichtes in Hyperbeln und nicht in Geraden, so gelangen in unser Auge noch Strahlen, die von Punkten ausgehen, die hinter dem Berührungskreise des tangierenden Kegels liegen. Ist z. B. ϱ die Entfernung Erde-Sonne, und r_0 der Sonnenradius senkrecht auf ϱ , so gelangt noch ein hyperbolischer Strahl in unser Auge vom äußeren Endpunkte der Gesamtheit der r_0 . Solch ein Strahl schließe mit ϱ am Beobachtungsorte den Winkel β' ein. Wir haben dann mit genügender Näherung

$$\operatorname{tg} \beta' \rightarrow \beta' = (a + r_0)/\varrho$$

wohingegen, wenn β den scheinbaren Sonnenhalbmesser unter Voraussetzung geradliniger Lichtausbreitung bedeutet,

$$\sin \beta \rightarrow \beta = r_0/\varrho$$

somit die relative Vergrößerung

$$(\beta' - \beta)/\beta = a/r_0 = k^2 m/(v_0^2 r_0). \quad (9)$$

Dies ist genau derselbe Wert, den auch die Relativitätstheorie findet¹⁾.

4. Kehren wir zu unserer früheren Annahme über eine endliche Gestaltung der Welt zurück. Es sei M ihre Gesamtmasse, R ihr Halbmesser, σ ihre mittlere Dichte und es bezeichne $\alpha = \frac{4}{3}\pi k^2 \sigma$. Soll das Licht in den Außenraum gelangen können, so muß das von der sphärisch gedachten Grenzfläche der Welt ausgehende Licht laut (1) zumindest eine Geschwindigkeit

$$v^2 = 2k^2 M/R = 2\alpha R^2 \quad (10)$$

besitzen in bezug auf den Massenmittelpunkt der Welt. Für einen Strahl innerhalb der Welt gelten unter den gemachten Voraussetzungen die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} d^2r/dt^2 - r d\varphi/dt &= -\alpha r \\ r^2 d\varphi/dt &= \text{const.} \end{aligned} \quad (11)$$

wo r die Entfernung vom Weltmittelpunkte bedeutet. Es folgt hieraus für die Geschwindigkeit

$$v^2 = \beta - \alpha r^3 \quad (12)$$

wo β eine Integrationskonstante.

Hiernach erreicht die größtmögliche Geschwindigkeit, v_m , ein durch das Zentrum gehender Strahl, und es ist $\beta = v_m^2$. An der Grenze der Sphäre ist demnach

$$v^2 = v_m^2 - \alpha R^2. \quad (13)$$

Soll dieser Strahl aus dem Innern der Welt in den Außenraum gelangen können, so muß (13) mindestens gleich der Geschwindigkeit (10) sein, d. h.

$$v^2 = 2\alpha R^2 = v_m^2 - \alpha R^2$$

woraus

$$v_m^2 = 3\alpha R^2 = 4\pi k^2 \sigma R^2. \quad (14)$$

Diese Formel drückt — natürlich nur der Größenordnung nach — einen einfachen Zusammenhang zwischen dem Krümmungsradius der Welt und der maximalen Lichtgeschwindigkeit aus. Ganz genau derselbe Zusammenhang wurde von

Einstein in seinen »Kosmologischen Betrachtungen« aufgestellt²⁾. Nur tritt dort an Stelle unseres v_m , — das eine obere Grenze für die Lichtgeschwindigkeit darstellt, — das c der Relativitätstheorie, das einer früheren Bemerkung nach eigentlich ebenfalls eine obere Grenze ist.

Nach (4) und (13) haben wir auch, wenn r_0 der Halbmesser des leuchtenden Sternes ist,

$$v_m^2 = v_0^2 (1 + 2a/r_0) + \alpha R^2 \quad (15)$$

und folglich mit (14)

$$v_0^2 (1 + 2a/r_0) = 2\alpha R^2 \quad (16)$$

sowie

$$v_m^2 = \frac{3}{2} v_0^2 (1 + 2a/r_0) \quad (17)$$

zwei interessante Relationen. Nach der letzteren ist

$$v_m = V^{3/2} \cdot v_0 (1 + a/r_0). \quad (18)$$

Ist v_m tatsächlich kleiner als dieser Wert, so kann das Licht unsere Welt nicht verlassen. Sie bliebe demnach für andere, entfernte Welten unsichtbar, und auch für uns wären andere Welten ähnlicher Struktur unsichtbar. Das *Chesapeake-Olberssche* Problem fände demnach eine einfache Lösung.

Könnte ein äußerer Lichtstrahl in bezug auf M eine hyperbolische Geschwindigkeit erreichen und ist A die entsprechende Halbachse, so wäre

$$v_0^2 (1 + 2A/R) = v_0^2 + 2\alpha R^2 = 3\alpha R^2 = v_m^2 \quad (19)$$

also $v_0^2 = \alpha R^2$, und als äußerste Grenze

$$v_m^2 = 3v_0^2. \quad (20)$$

Aus (18) und (20) folgt

$$V^3 \geq v_m/v_0 \geq V^{3/2}. \quad (21)$$

Es könnte demnach die Lichtgeschwindigkeit, $v_0 = 3 \cdot 10^5 \text{ km sec}^{-1}$ vorausgesetzt, 520000 km überhaupt nicht überschreiten, und das Licht könnte unsere Welt nicht verlassen, wenn $v_m < 367422 \text{ km}$ wäre. Dadurch ist auch der »Verödung« vorgebeugt.

Zur experimentellen Überprüfung dieser Fragen wäre eine direkte Messung der Geschwindigkeit des Lichtes der Fixsterne nötig, wie es in anderem Zusammenhange auch *Lenard* vorschlägt³⁾.

Um zu einer Vorstellung der Größenordnung von R zu gelangen, nehmen wir an, die Masse der Sonne sei gleichmäßig in einer Kugel verteilt, deren Halbmesser einer Parallaxe von 0.5 entspricht. Das Mittel der fünfzig bestbestimmten und größten Fixsternparallaxen ist nahezu 0.25, und die entsprechende Entfernung kann man als eine mittlere Distanz der Fixsterne ansehen, deren Masse der Größenordnung nach ja nicht allzuweit von der Sonnenmasse abweicht. Denkt man sich die Masse jedes Fixsternes in eine Kugel vom Halbmesser 0.5 verteilt, so ergibt sich eine ziemlich gleichmäßige Massenverteilung im Universum. Nimmt man noch 367000 km als äußerste Lichtgeschwindigkeit, so findet man $R \rightarrow 3 \cdot 10^7$ Lichtjahre, und die Gesamtzahl aller Sterne ist $9.4 \cdot 10^{19}$.

Verteilt man die Sonnenmasse in einer Kugel, deren Halbmesser einer Parallaxe von 1" entspricht, und nimmt als Lichtgeschwindigkeit 300000 km, so findet man $R \rightarrow 8.6 \cdot 10^6$ Lichtjahre, und die Gesamtzahl der Sterne ist $1.8 \cdot 10^{19}$. Dies wären möglichst kleine Werte.

¹⁾ *Laue*, l. c. p. 227, Fußnote.

²⁾ l. c. p. 152, Formel (14). — *Pauli*, l. c. p. 747. — *Haas*, Einf. i. d. theor. Physik, Bd. 2, 1921, p. 243.

³⁾ *Äther und Uräther* p. 354.

Shapley¹⁾, fand für die Entfernung des kugelartigen Sternhaufens NGC 7006 von der Sonne $2.2 \cdot 10^5$ Lichtjahre. Unser erstes R ist etwa 130 mal, das zweite etwa 40 mal so groß als diese Shapleysche Entfernung. Es könnten demnach noch weit entferntere Objekte entdeckt werden, die noch immer zu unserer Weltinsel gehören.

Auch die Gesamtzahl der Sterne erscheint bedeutend größer als man bisher angenommen hat. Nach *Kapteyn* und *van Rhijn* wäre bis zur 16. Größe inklusive diese Zahl nahe $1.1 \cdot 10^8$. Es ist aber klar, daß dies nicht die Gesamtzahl aller Sterne darstellt.

5. Ohne auf die Frage speziell der Merkur-Perihelbewegung einzugehen, wollen wir nur bemerken, daß aus der Gesamtwirkung der Weltmasse in den gewöhnlichen Bewegungsgleichungen des Zweikörperproblems ein störendes Zusatzglied resultiert, das eine Perihelbewegung nach sich zieht. Nimmt man z. B. die Bahnebene des Planeten senkrecht zur Verbindungslinie Sonne-Weltmittelpunkt an, so wäre nach unseren früheren Voraussetzungen dieses Zusatzglied $= -\alpha r$, (r = Entfernung Planet-Sonne). Wäre es möglich, solche »kosmische« Perihelbewegung bei den Planeten oder Doppelsternen nachzuweisen, so könnte man Schlüsse auf die Lage des Sonnensystems in unserer Welt, oder auf σ ziehen.

6. Ist die Krümmung des Lichtstrahles eine reelle Erscheinung, so folgt, daß sich sowohl bei Fixsternen als auch bei Planeten eine Art jährliche Refraktion zeigen muß²⁾, und daß auch der *Kimura*-Term mit den hier besprochenen Erscheinungen im Zusammenhange stehen dürfte.

Auch muß man konsequenterweise dem Lichte Trägheit zuschreiben und muß es der Wirkung der Zentrifugalkraft unterliegen. Bei dem vom Rande eines Gestirns ausgehenden Lichte fällt diese letztere Wirkung mit dem gewöhnlichen *Doppler*-Effekt zusammen, gegen die Mitte der Scheibe geht er allmählich in eine Aberrations-Erscheinung über. Es folgt hieraus eine Deformation der scheinbaren Gestirnscheiben ähnlich, wie sie durch Refraktion und Parallaxe verursacht werden. Ferner muß das Licht eine Akzeleration erfahren, wenn es sich einer großen Masse nähert.

7. Wir sehen, daß auch die gewöhnliche *Newtonsche* Gravitationstheorie im gewöhnlichen euklidischen Raume in erster Näherung zu Ergebnissen führt, die mit einzelnen Resultaten der Relativitätstheorie genau übereinstimmen, von anderen sich aber nur sehr wenig unterscheiden. Zu ersteren gehört speziell die Verschiebung der Spektrallinien, von welcher

Budapest, Universität, 30. Juli 1922.

¹⁾ Contrib. fr. the Mount Wilson Observ. No. 156, p. 2. — Annual Report of the director of the Mount Wilson Observ. 1921, p. 265.

²⁾ *Bottlinger*, Die astron. Prüfungsmöglichkeiten der Relativitätstheorie, im Jahrb. für Radioakt. u. Elektronik, Bd. 17, 1920, p. 146–60.

³⁾ Über Äther und Uräther, p. 335; Ann. d. Phys. I. c. p. 600.

⁴⁾ S. *Weyl*, I. c. p. 223.

noch *Lenard* sagt³⁾, daß sie eine Voraussage sei, die bis jetzt ohne die Relativitätstheorie nicht erhältlich sei. Wenn aber Erscheinungen durch verschiedene Theorien in übereinstimmender Weise sich ergeben, so kann ihr experimenteller Nachweis nicht als Beweis für irgend eine dieser Theorien gelten.

Es ist aber ein Unterschied zwischen beiden Theorien, der sich nicht überbrücken läßt. Er folgt aus den Formeln (3) und (5) und besteht darin, daß nach der *Newtonschen* Annahme die Lichtgeschwindigkeit an der Oberfläche einer großen Masse größer ist als in weiterer Entfernung von ihr, und daß nach der Relativitätstheorie die Lichtgeschwindigkeit sich entgegengesetzt verhält⁴⁾, sie ist z. B. für eine Lichtquelle im Meeresniveau kleiner als für eine hohe Bergspitze.

Um uns hierüber Rechnung zu geben, schreiben wir die Formel (5)

$$v = v_0 + h^2 m / (v_0 r) = v_0 + \alpha r_0^3 / (v_0 r)$$

wo r_0 wieder der Halbmesser von m , und $r > r_0$ ist. Ist h die Höhe über dem Meeresniveau und $h < r_0$, so haben wir $r = r_0 + h$, und die Lichtgeschwindigkeit $v^{(h)}$ in dieser Höhe

$$v^{(h)} = v_0 + (\alpha r_0^2 / v_0) (1 - h/r_0)$$

aber für $h = 0$

$$v^{(0)} = v_0 + \alpha r_0^2 / v_0$$

also $v^{(0)} > v^{(h)}$.

Aus Formel (3) folgt hingegen auf ähnliche Weise

$$v^{(h)} = c - (\alpha r_0^2 / c) (1 - h/r_0)$$

$$v^{(0)} = c - \alpha r_0^2 / c$$

also $v^{(0)} < v^{(h)}$.

Auf der Erde wäre demnach für eine Lichtquelle im Meeresniveau die Lichtgeschwindigkeit um 3 mm größer als für eine Lichtquelle in 10 km Höhe, wenn die Hypothese *Newtons* oder vielmehr *Poissons* richtig ist. Sie ist hingegen um ebenso viel kleiner, wenn die Annahmen der allgemeinen Relativitätstheorie der Wahrheit entsprechen. Dieser Unterschied ist aber so gering, daß er sich auf der Erdoberfläche kaum wird experimentell nachweisen lassen, wenn es nicht gelingt, für diesen Zweck ein solch empfindliches Vorgehen zu finden, wie es z. B. *Eötös* für den Gradienten der Schwere geschaffen hat.

Es ist schließlich noch zu bemerken, daß unsere sämtlichen Ableitungen ohne irgendwelche Zusatzannahmen einheitlich einem einzigen Prinzip entspringen, was bei den entsprechenden Sätzen der Relativitätstheorie nicht der Fall ist.

J. Wodetsky.

Positionen von 48 Sternen der B.D. Von *L. Okulicz*.

Die vorliegenden Sternpositionen sind bei der Bearbeitung meiner Beobachtungen der »Selected Areas« nach Prof. *Kapteyn* benutzt worden. Da die Sterne sich in einer Deklinationszone befinden, in der man sehr oft Asteroiden- und Kometenbeobachtungen anstellt, und ihre Positionen bisher nur in der B.D. enthalten sind, dürfte ihre Veröffentlichung sowohl für die Beobachter an Refraktoren als auch für die Berechner von definitiven Kometenbahnen von Nutzen

sein. Jeder Stern wurde im Zeitraum 1911 bis 1915 zweimal an benachbarte AG-Sterne am 15-zölligen Refraktor der Pulkowaer Sternwarte angeschlossen: als Epoche ist das Mittel der Beobachtungsjahre 1913.0 gewählt. Die Sterne 30, 31 und 46a sind nur einmal beobachtet, und den Ort des Sterns 21 bestimmte ich aus Messungen einer photographischen Platte, die Herr Dr. *Kostinsky* gütigst zu diesem Zweck aufgenommen hatte. Alle Beobachtungen sind bei roter Feldbeleuchtung und