nennen kann. Dass die Schiebung prop. K sei, wird durch die Versuche bestätigt.

Diese lehren weiter, dass wenn die Schiebung, durch welche der Block anisotrop wurde, die Richtung des Pfeils hat, dann die durch den Zug K eintretende dieselbe Richtung hat; hieraus kann man schliessen, dass $E_3 > E_1$ oder dass der Elasticitätscoëfficient für die Richtung, in welcher die permanente Dehnung stattgefunden hat, kleiner ist, als für die Richtung, in welcher die permanente Compression eingetreten ist.

III. *Ueber stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit; von G. Kirchhoff.*

(Aus dem Monatsber. d. k. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 15. Mai 1879.)

Unter den wenigen Flüssigkeitsbewegungen, für welche man die Differentialgleichungen bisher hat integriren können, nehmen eine wesentliche Stelle die unendlich kleinen Schwingungen ein, die eine schwere, nicht reibende, incompressible Flüssigkeit in einem verticalen, cylindrischen oder prismatischen Gefässe mit horizontalem Boden ausführen kann. Die Schwingungen einer solchen Flüssigkeit in einem Gefässe, dessen Boden nicht horizontal ist, sind meines Wissens bis jetzt nicht behandelt. Es sollen im Folgenden einige hierher gehörige Fälle, und zwar Fälle, in denen der Boden aus einer schiefen Ebene oder aus zwei schiefen Ebenen gebildet ist, erörtert werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Bewegung nur von einer horizontalen Ordinate abhängt, die Flüssigkeit also in einer Richtung durch zwei parallele, verticale Wände begrenzt ist.

Es sei x die horizontale Ordinate eines Punktes, die diesen Wänden parallel ist, z die verticale Ordinate und φ das Geschwindigkeitspotential in diesem Punkte zur Zeit t ; dann ist:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{oder:}$$

$$(1) \quad \varphi = F(z + ix) + G(z - ix),$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist, und F und G Functionszeichen sind. Die Functionen F und G müssen conjugirt sein, da φ reell ist. Die freie Oberfläche der Flüssigkeit weiche unendlich wenig von der Ebene $z = 0$ ab, die positive z -Axe sei abwärts gekehrt, und g bezeichne die Beschleunigung eines frei fallenden Körpers, dann ist für $z = 0$:

$$g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

und $\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ist die Tiefe eines Punktes der freien Oberfläche unter einer festen horizontalen Ebene.

Nun werde vorausgesetzt, dass φ gleich:

$$\sin nt\pi,$$

multiplicirt mit einem von t unabhängigen Factor ist, wobei n die Zahl der einfachen Schwingungen bedeutet, die jedes Flüssigkeitstheilchen in der Zeiteinheit ausführt. Es ist dann:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -n^2 \pi^2 \varphi,$$

also für $z = 0$:

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -a \varphi, \quad \text{wo} \quad a = \frac{n^2 \pi^2}{g}.$$

Setzt man hier den Werth von φ aus der Gleichung (1) ein und bezeichnet durch F' und G' die Differentialquotienten von F und G nach ihren Argumenten, so erhält man:

$$F'(ix) + G'(-ix) = -a(F(ix) + G(-ix)).$$

Diese Gleichung braucht nur für reelle Werthe x erfüllt zu werden, und zwar für solche, die Punkten der freien Flüssigkeitsoberfläche entsprechen; das kann aber nur geschehen, wenn sie auch für jeden complexen Werth von x erfüllt wird. Bezeichnet daher u eine complexe Variable, so muss allgemein:

$$F'(u) + G'(-u) = -a(F(u) + G(-u))$$

oder auch:

$$(3) \quad \frac{d}{du}(F(u) - G(-u)) = -a(F(u) + G(-u))$$

sein.

Es ist nun noch die Bedingung aufzustellen, der an der nicht freien Flüssigkeitsoberfläche, abgesehen von den der

xz -Ebene parallelen Wänden, zu genügen ist. Diese Bedingung ist die, dass diese Oberfläche die Flächen:

$$\varphi = \text{const.}$$

senkrecht schneidet, dass also für jeden zusammenhängenden Theil derselben:

$$F(z + ix) - G(z - ix) = \text{const.}$$

ist. Es soll angenommen werden, dass die ganze nicht freie Oberfläche zusammenhängend ist; der Werth der zuletzt eingeführten Constanten kann dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit beliebig gewählt, die Bedingung also dahin ausgesprochen werden, dass für die nicht freie Oberfläche:

$$(4) \quad F(z + ix) - G(z - ix) = 0 \quad \text{ist.}$$

Die nicht freie Oberfläche sei nun die Ebene:

$$\frac{z}{x} = \text{tg } \alpha$$

oder wenn man: $x = \rho \cos \vartheta$, $z = \rho \sin \vartheta$

setzt, die Ebene: $\vartheta = \alpha$,

und die Flüssigkeit befinde sich auf der Seite dieser Ebene, nach der die positive x -Axe gekehrt ist, d. h. sie erfülle den Raum, für den: $\vartheta < \alpha$

ist. Die Gleichung (4) wird dann:

$$F(\rho i e^{-i\alpha}) - G(-\rho i e^{+i\alpha}) = 0.$$

Diese Gleichung, die zunächst nur für positive reelle Werthe von ρ erfüllt zu werden braucht, muss eben deswegen auch für complexe gelten; bezeichnet u wiederum eine complexe Variable, und setzt man: $e^{-i2\alpha} = \beta$, so hat man daher:

$$(5) \quad G(u) = F(-\beta u),$$

und infolge der Gleichung (3):

$$(6) \quad \frac{d}{du} (F(u) - F(\beta u)) = -\alpha (F(u) + F(\beta u)).$$

Es sei α mit π commensurabel und:

$$\alpha = \frac{m}{n} \pi,$$

wo m und n zwei ganze Zahlen sind, die keinen gemeinsamen Factor haben, also:

$$\beta = e^{-i \frac{2m\pi}{n}}.$$

Es ist dann β eine primitive n te Wurzel der Einheit, und unter einer sogleich abzuleitenden Bedingung lässt sich der Gleichung (6) genügen durch:

(7) $F(u) = A_0 e^{\lambda a u} + A_1 e^{\beta \lambda a u} + A_2 e^{\beta^2 \lambda a u} + \dots + A_{n-1} e^{\beta^{n-1} \lambda a u}$,
 wo λ eine willkürliche Constante ist, $A_0, A_1, \dots$ Constanten sind, deren Verhältnisse auf passende Weise bestimmt werden müssen. Setzt man nämlich diesen Ausdruck von F in die Gleichung (6), so erhält man die folgenden Bedingungs-
 gleichungen:

$$\lambda(A_0 - A_{n-1}) = -(A_0 + A_{n-1}),$$

$$\beta \lambda(A_1 - A_0) = -(A_1 + A_0),$$

$$\beta^2 \lambda(A_2 - A_1) = -(A_2 + A_1)$$

$$\dots \dots \dots \beta^{n-1} \lambda(A_{n-1} - A_{n-2}) = -(A_{n-1} + A_{n-2})$$

oder:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0(\lambda + 1) = A_{n-1}(\lambda - 1), \\ A_1(\beta \lambda + 1) = A_0(\beta \lambda - 1), \\ A_2(\beta^2 \lambda + 1) = A_1(\beta^2 \lambda - 1) \\ \dots \dots \dots \\ A_{n-1}(\beta^{n-1} \lambda + 1) = A_{n-2}(\beta^{n-1} \lambda - 1). \end{array} \right.$$

Multiplicirt man sie mit einander, so erhält man:

$$\lambda^n - (-1)^n = \lambda^n - 1,$$

da: $1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^{n-1}$

die Wurzeln der Gleichung:

$$\lambda^n - 1 = 0$$

sind. Es folgt daraus, dass, wenn n ungerade ist, die Gleichungen (8) nicht bestehen können, ohne dass alle A verschwinden; wenn n gerade ist, aber diese Gleichungen bei einem beliebigen Werthe von λ und einem beliebigen Werthe einer der Grössen A erfüllt werden können. Demgemäss soll n als gerade angenommen werden.

Die Hälfte der Glieder des in (7) für F aufgestellten Ausdrucks verschwindet, wenn man λ einer ganzen Potenz von β gleichsetzt. Wählt man eine andere ganze Potenz, so erhält man einen nur scheinbar verschiedenen Ausdruck für F . Man mache:

$$\lambda = \beta^{\frac{n}{2}} = -1;$$

es verschwinden dann die A , deren Index $\frac{n}{2}$ oder grösser als $\frac{n}{2}$ ist, A_0 kann beliebig gewählt werden und es ist:

$$A_1 = A_0 \frac{\beta + 1}{\beta - 1}, \quad A_2 = A_1 \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2 - 1} \dots A_{\frac{n}{2}-1} = A_{\frac{n}{2}-2} \frac{\beta^{\frac{n}{2}-1} + 1}{\beta^{\frac{n}{2}-2} - 1}$$

und:

$$F(u) = A_0 e^{-au} + A_1 e^{-\beta au} + \dots + A_{\frac{n}{2}-1} e^{-\beta^{\frac{n}{2}-1} au}.$$

Statt der Constanten A mögen hier Constanten B durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} A_0 &= B_0 e^{-i\pi \frac{n-2}{8}}, & A_2 &= B_2 e^{-i\pi \frac{n-10}{8}}, \\ A_1 &= B_1 e^{-i\pi \frac{n-6}{8}}, & A_{\frac{n}{2}-1} &= B_{\frac{n}{2}-1} e^{i\pi \frac{n-2}{8}} \end{aligned}$$

eingeführt werden; man hat dann:

$$(9) \left\{ \begin{aligned} F(u) &= B_0 e^{-au - i\pi \frac{n-2}{8}} + B_1 e^{-\beta au - i\pi \frac{n-6}{8}} \\ &+ B_2 e^{-\beta^2 au - i\pi \frac{n-10}{8}} + \dots + B_{\frac{n}{2}-1} e^{-\beta^{\frac{n}{2}-1} au + i\pi \frac{n-2}{8}}, \end{aligned} \right.$$

es ist B_0 willkürlich und:

$$B_1 = B_0 \operatorname{ctg} \alpha, \quad B_2 = B_0 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} 2\alpha,$$

$$B_3 = B_0 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} 2\alpha \operatorname{ctg} 3\alpha \dots B_{\frac{n}{2}-1} = B_0 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} 2\alpha \dots \operatorname{ctg} \left(\frac{n}{2}-1\right)\alpha;$$

woraus folgt:

$$B_0 = \pm B_{\frac{n}{2}-1}, \quad B_1 = \pm B_{\frac{n}{2}-2}, \quad B_2 = \pm B_{\frac{n}{2}-3}, \dots$$

wo die Zeichen $-$ gelten, wenn $\frac{n}{2}$ und zugleich $\frac{m+1}{2}$ gerade ist, während in allen anderen Fällen die Zeichen $+$ zu nehmen sind. Bildet man nach (5) und (9) den Ausdruck von $G(v)$ und kehrt die Reihenfolge der Glieder um, so erhält man hiernach:

$$\begin{aligned} \pm G(v) &= B_0 e^{-av + i\pi \frac{n-2}{8}} + B_1 e^{-a \frac{v}{\beta} + i\pi \frac{n-6}{8}} \\ &+ B_2 e^{-a \frac{v}{\beta^2} + i\pi \frac{n-10}{8}} + \dots + B_{\frac{n}{2}-1} e^{-a \frac{v}{\beta^{\frac{n}{2}-1}} + i\pi \frac{n-2}{8}}, \end{aligned}$$

wo über das Doppelzeichen nach derselben Regel zu entscheiden ist. Nach (1) ist:

$$\varphi = F(u) + G(v),$$

wenn:

$$u = z + ix, \quad v = z - ix$$

gesetzt wird, und $F(u)$ und $G(v)$ sind conjugirt. Die Exponenten in den entsprechenden Gliedern der für diese Functionen aufgestellten Ausdrücke sind conjugirt; daraus folgt, dass B_0 reell sein muss, wenn nicht $\frac{n}{2}$ und $\frac{m+1}{2}$ gerade sind, rein imaginär, wenn diese beiden Zahlen gerade sind. In beiden Fällen ist φ gleich dem Doppelten des reellen Theiles des in (9) für $F(u)$ aufgestellten Ausdrucks.

Führt man statt x und z wieder die Polarcoordinaten ρ und ϑ ein, so hat man:

$$u = \rho (\sin \vartheta + i \cos \vartheta), \quad \beta u = \rho (\sin (2\alpha + \vartheta) + i \cos (2\alpha + \vartheta)),$$

$$\beta^2 u = \rho (\sin (4\alpha + \vartheta) + i \cos (4\alpha + \vartheta)) \dots$$

$$\beta^{\frac{n}{2}-1} u = \rho (\sin ((n-2)\alpha + \vartheta) + i \cos ((n-2)\alpha + \vartheta)).$$

Man ersieht hieraus, dass im allgemeinen bei den hier aufgestellten Formeln φ unendlich wird innerhalb des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes, in dem ρ von 0 bis unendlich, ϑ von 0 bis α variirt; nur, wenn:

$$m = 1, \quad \alpha = \frac{\pi}{n}$$

ist, findet dieses nicht statt, und für $\rho = \infty$ wird, wenn man $2 B_0 = 1$ macht,

$$2 F(z + ix) = e^{-az-i\left(ax+\pi\frac{n-2}{8}\right)}, \quad \varphi = e^{-az} \cos\left(ax + \pi\frac{n-2}{8}\right).$$

Bei beliebigen Werthen von x und z hat man dann

für $n = 2$:

$$2 F(z + ix) = e^{-a(z+ix)}, \quad \varphi = e^{-az} \cos ax;$$

für $n = 4$:

$$2 F(z + ix) = \frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{-az-iax} + \frac{1+i}{\sqrt{2}} e^{-az+iax},$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-az} (\cos ax - \sin ax) + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-az} (\cos ax + \sin ax);$$

für $n = 6$:

$$2 F(z + ix) = -ie^{-a(z+ix)} + \sqrt{3} e^{-\frac{a}{2}(z+x\sqrt{3}) + i\frac{a}{2}(z\sqrt{3}-x)} \\ + ie^{\frac{a}{2}(z-x\sqrt{3}) + i\frac{a}{2}(z\sqrt{3}+x)}, \\ \varphi = -e^{-ax} \sin ax + \sqrt{3} \cdot e^{-\frac{a}{2}(z+x\sqrt{3})} \cos \frac{a}{2}(z\sqrt{3}-x) \\ - e^{\frac{a}{2}(z-x\sqrt{3})} \sin \frac{a}{2}(z\sqrt{3}+x).$$

Nimmt man in der Gleichung (7) λ unendlich klein an und entwickelt die Exponentialgrößen nach Potenzen der Exponenten, so erhält man für $F(u)$ eine ganze rationale Function von u . Die allgemeinste Function dieser Art, die der Gleichung (6) genügt, findet man, indem man in diese Gleichung:

$$F(u) = A_h u^h + A_{h+1} u^{h+1} + \dots + A_{h'} u^{h'}$$

setzt, wo h und h' ganze Zahlen bedeuten, und $h' > h$ ist. Es ergibt sich dann:

$$1 - \beta^h = 0, \quad 1 + \beta^{h'} = 0, \quad A_k = -a A_{k-1} \frac{1}{k} \frac{1 + \beta^{k-1}}{1 - \beta^k},$$

wo k jede der Zahlen $h+1, h+2, \dots, h'$ sein kann, während A_h willkürlich bleibt. Man kann diesen Bedingungen genügen, indem man $h=0$ oder einem Vielfachen von n und:

$$h' = h + \frac{n}{2}$$

setzt.

Ein besonderes Interesse hat der Fall, dass die auf diese Weise gebildete Function $F(u)$ vom zweiten Grade ist; das findet statt, wenn $n=4$ ist und $h=0$ gewählt wird. Es sei:

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \text{also } \beta = -i;$$

dann hat man:

$$F(u) = A_0 \left(1 - au(1-i) - \frac{\alpha^2 u^2}{2} i \right),$$

woraus nach (5) folgt:

$$G(v) = A_0 \left(1 - av(1+i) + \frac{\alpha^2 v^2}{2} i \right).$$

Da $F(u)$ und $G(v)$ conjugirt sind, so muss hiernach A_0 reell sein. Setzt man $A_0 = \frac{1}{2}$, so erhält man:

$$\varphi = 1 - \alpha(z + x) + \alpha^2 zx,$$

und als Gleichung der Stromlinien, d. h. der Linien, welche die Linien $\varphi = \text{const.}$ senkrecht schneiden:

$$\text{const.} = \alpha(z - x) - \frac{\alpha^2}{2}(z^2 - x^2).$$

Zu diesen Linien gehört auch die Gerade $z - x = 0$; für sie ist die mit const. bezeichnete Grösse $= 0$; eine zweite Gerade muss zu derselben Stromlinie gehören; sie ist die Gerade:

$$z + x = \frac{2}{\alpha},$$

die die erste in dem Punkte $z = x = \frac{1}{\alpha}$ schneidet. Die gedachte Bewegung kann daher auch bestehen, wenn die Flüssigkeit ausser durch die Wand $z = x$ noch durch die Wand $z + x = \frac{2}{\alpha}$ begrenzt ist; wenn sie also in einem prismatischen Gefässe sich befindet, dessen Kante nach unten gekehrt, dessen Winkel ein rechter ist, und dessen Seitenflächen gegen die Verticale gleich geneigt sind; $\frac{1}{\alpha}$ ist die grösste Tiefe der Flüssigkeit.

Für $z = 0$ (wie für jeden constanten Werth von z) wird φ eine lineare Function von x ; daraus folgt, dass die freie Oberfläche der Flüssigkeit bei der Bewegung stets eine Ebene bleibt. Die Dauer einer einfachen Schwingung ist der Gleichung (2) zufolge:

$$= \frac{\pi}{\sqrt{ag}},$$

d. h. gleich der Schwingungsdauer eines einfachen Pendels, dessen Länge der grössten Tiefe der Flüssigkeit gleich ist. Die Flüssigkeitstheilchen bewegen sich in den gleichseitigen Hyperbeln, deren Asymptoten die Gefässwände bilden.

Die beschriebene Bewegung ist eine von unendlich vielen Schwingungsarten, die eine Flüssigkeit in einem Gefässe der bezeichneten Art ausführen kann. Auch die anderen schnelleren Schwingungen lassen sich theoretisch verfolgen. Man kommt auf sie, wenn man die Constanten λ und α in dem

für $F(u)$ in der Gleichung (7) aufgestellten Ausdruck so zu bestimmen sucht, dass für $z + x = 2c$ (wo c die grösste Tiefe der Flüssigkeit bedeutet):

$$F(z + ix) - G(z - ix) = 0$$

ist. Nach der Gleichung (5), in der für β sein Werth $-i$ zu setzen ist, wird diese Bedingung:

$$F(u) = F(-u + 2c(1+i)).$$

Die Gleichung (7) ist hier:

$$(10) \quad F(u) = A_0 e^{\lambda a u} + A_1 e^{-i \lambda a u} + A_2 e^{-\lambda a u} + A_3 e^{i \lambda a u},$$

und zwischen den Constanten A hat man die Gleichungen:

$$(11) \quad \begin{cases} A_1(-i\lambda + 1) = A_0(-i\lambda - 1), & A_2(-\lambda + 1) = A_1(-\lambda - 1), \\ A_3(i\lambda + 1) = A_2(i\lambda - 1), \end{cases}$$

die neue, eben abgeleitete Bedingung gibt zwei Gleichungen, nämlich:

$$A_2 = A_0 e^{\lambda a 2c(1+i)} \quad \text{und} \quad A_3 = A_1 e^{\lambda a 2c(1-i)}.$$

Diese fünf Gleichungen reichen gerade aus zur Bestimmung der fünf Grössen $A_1, A_2, A_3, \lambda, a$. Durch Elimination der drei ersten erhält man:

$$e^{\lambda a 2c(1+i)} = \frac{(1+\lambda)(1+i\lambda)}{(1-\lambda)(1-i\lambda)}, \quad e^{\lambda a 2c(1-i)} = \frac{(1+\lambda)(1-i\lambda)}{(1-\lambda)(1+i\lambda)}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen einmal, dividirt sie das andere mal und zieht jedesmal die Quadratwurzel, so sieht man, dass entweder:

$$e^{2\lambda a c} = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \quad \text{und} \quad e^{i2\lambda a c} = \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$$

oder:

$$e^{2\lambda a c} = -\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \quad \text{und} \quad e^{i2\lambda a c} = -\frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$$

sein muss. Man setze:

$$\lambda a c = p,$$

so hat man im ersten Falle die Gleichungen:

$$e^{2p} = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}, \quad e^{i2p} = \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$$

oder:

$$\lambda = \operatorname{tg} p, \quad e^{2p} = \operatorname{tg}\left(p + \frac{\pi}{4}\right),$$

im zweiten:

$$e^{2p} = -\frac{1+\lambda}{1-\lambda}, \quad e^{i2p} = -\frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$$

oder: $\lambda = -\operatorname{ctg} p, \quad e^{2p} = \operatorname{ctg}\left(p + \frac{\pi}{4}\right).$

Die beiden transcendenten Gleichungen, deren einer p genügen muss, lassen sich in die eine:

$$\cos 2p \frac{e^{2p} + e^{-2p}}{2} = 1$$

zusammenfassen, welches die Gleichung ist, die die Schwingungszahlen eines elastischen, an beiden Enden freien Stabes bestimmt. Die Wurzeln derselben sind bekannt; aus diesen Wurzeln findet man hier die Schwingungszahlen der Flüssigkeitsmasse, nämlich die Werthe der Grösse α (die den Quadraten der Schwingungszahlen proportional sind) im ersten der beiden unterschiedenen Fälle durch die Gleichung:

$$\alpha c = \frac{p}{\operatorname{tg} p},$$

im zweiten durch die Gleichung:

$$\alpha c = -p \operatorname{tg} p.$$

Die Gleichung $e^{2p} = \operatorname{tg}\left(p + \frac{\pi}{4}\right)$ hat zunächst die dreifache Wurzel $p = 0$; bei dem Probleme des elastischen, schwingenden Stabes hat dieselbe keine Bedeutung, da sie dort einer unendlich grossen Schwingungsdauer entspricht; anders ist es hier, für $p = 0$ wird hier:

$$\alpha c = 1;$$

der hierdurch bestimmte Werth von α bezieht sich auf die vorher erörterten Schwingungen, bei denen die Oberfläche der Flüssigkeit stets eben bleibt. Die folgenden Wurzeln der genannten Gleichung für p sind etwas kleiner als:

$$\frac{5\pi}{4}, \quad \frac{9\pi}{4}, \quad \frac{13\pi}{4}, \dots$$

Die Genauigkeit dieser Näherungswerthe ist um so grösser, je grösser ihre Ordnungszahl; schon bei dem ersten ist sie bedeutend, es ist nämlich:

$$\frac{5\pi}{4} = 3,92699,$$

während der entsprechende Werth von p :

$$= 3,92660 \text{ ist.}$$

Die Gleichung $e^{2p} = \operatorname{ctg}\left(p + \frac{\pi}{4}\right)$ hat die einfache Wurzel $p = 0$, die aber einer unendlichen Schwingungsdauer entspricht; ihre folgenden Wurzeln sind etwas grösser als:

$$\frac{3\pi}{4}, \quad \frac{7\pi}{4}, \quad \frac{11\pi}{4}, \dots$$

Die erste von ihnen ist genauer 2,36502,

während: $\frac{3\pi}{4} = 2,35620$ ist.

Nennt man die Schwingungsart, bei der die Oberfläche der Flüssigkeit eine Ebene bleibt, die erste, und setzt ihre Schwingungszahl $= 1$, so sind hiernach die Schwingungszahlen der Schwingungsarten ungerader Ordnungszahl:

$$1, \quad 1,9824, \quad 2,6586, \quad 3,1953,$$

und die der Schwingungsarten gerader Ordnungszahl:

$$1,5243, \quad 2,3448, \quad 2,9393.$$

Neben der Schwingungszahl sind für jede der möglichen Schwingungsarten von Interesse gewisse ausgezeichnete Punkte der Oberfläche, die Knoten nämlich, d. h. die Punkte, in denen die verticale Bewegung Null ist, und die Bäuche, in denen die verticale Bewegung ein Maximum ist, die Tangente an die Oberfläche also horizontal bleibt. Um diese zu finden, muss der Ausdruck von φ aufgestellt werden.

Für die Schwingungsarten ungerader Ordnungszahl sind die Gleichungen (11):

$$A_1 = -e^{i2p} A_0, \quad A_2 = -e^{2p} A_1, \quad A_3 = -e^{-i2p} A_2,$$

nach (10) ist also, wenn man über die willkürliche Constante A_0 auf gewisse Weise verfügt:

$$2iF(u) = e^{p\left(\frac{u}{c}-1-i\right)} - e^{-ip\left(\frac{u}{c}-1-i\right)} \\ + e^{-p\left(\frac{u}{c}-1-i\right)} - e^{ip\left(\frac{u}{c}-1-i\right)},$$

oder kürzer:

$$iF(u) = \cos p\left(\frac{ui}{c} + 1 - i\right) - \cos p\left(\frac{u}{c} - 1 - i\right),$$

und nach (5):

$$iG(v) = -\cos p\left(\frac{vi}{c} - 1 - i\right) + \cos p\left(\frac{v}{c} - 1 + i\right).$$

Um $i\varphi$ zu erhalten, hat man diese beiden Gleichungen zu addiren und $u = z + ix$, $v = z - ix$ zu setzen. Man braucht φ nur für die Oberfläche kennen zu lernen, man kann also $z = 0$ setzen; überdies möge:

$$\frac{x}{c} = 1 - \xi$$

gemacht werden; es ergibt sich dann:

$$i\varphi = \cos p(\xi - i) - \cos p(1 + i\xi) - \cos p(\xi + i) + \cos p(1 - i\xi)$$

oder: $\varphi = (e^p - e^{-p}) \sin p\xi + \sin p(e^{p\xi} - e^{-p\xi}).$

Nach der transcendenten Gleichung, der p genügt, ist:

$$\frac{e^p - e^{-p}}{2} = \frac{\sin p}{\sqrt{\cos 2p}},$$

wo das Vorzeichen der Quadratwurzel mit dem Vorzeichen von $\sin p$ übereinstimmen muss; abgesehen von einem constanten Factor hat man daher auch:

$$\varphi = \sin p\xi + \sqrt{\cos 2p} \frac{e^{p\xi} - e^{-p\xi}}{2}.$$

In den Knoten ist $\varphi = 0$, in den Bäuchen $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0$, d. h.:

$$0 = \cos p\xi + \sqrt{\cos 2p} \frac{e^{p\xi} + e^{-p\xi}}{2}.$$

Für die Schwingungsarten gerader Ordnungszahl ist:

$$A_1 = A_0 e^{i2p}, \quad A_2 = A_1 e^{2p}, \quad A_3 = A_2 e^{-i2p},$$

und daher, wenn man wiederum über A_0 auf gewisse Weise verfügt:

$$2F(u) = e^{p\left(\frac{u}{c} - 1 - i\right)} + e^{-ip\left(\frac{u}{c} - 1 - i\right)} + e^{-p\left(\frac{u}{c} - 1 - i\right)} + e^{ip\left(\frac{u}{c} - 1 - i\right)}$$

oder:

$$F(u) = \cos p\left(\frac{ui}{c} + 1 - i\right) + \cos p\left(\frac{u}{c} - 1 - i\right),$$

$$G(v) = \cos p\left(\frac{vi}{c} - 1 - i\right) + \cos p\left(\frac{v}{c} - 1 + i\right),$$

und für die Oberfläche:

$$\varphi = \cos p(\xi - i) + \cos p(1 + i\xi) + \cos p(\xi + i) + \cos p(1 - i\xi)$$

oder: $\varphi = (e^p + e^{-p}) \cos p \xi + \cos p (e^{p\xi} + e^{-p\xi}).$

Es ist aber: $\frac{e^p + e^{-p}}{2} = \frac{\cos p}{\sqrt{\cos 2p}},$

wo das Vorzeichen der Wurzelgrösse mit dem von $\cos p$ übereinstimmen muss. Abgesehen von einem constanten Factor hat man daher auch:

$$\varphi = \cos p \xi + \sqrt{\cos 2p} \frac{e^{p\xi} + e^{-p\xi}}{2}.$$

Auch hier ist in den Knoten $\varphi = 0$, in den Bäuchen $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0$,

d. h.: $0 = \sin p \xi - \sqrt{\cos 2p} \frac{e^{p\xi} - e^{-p\xi}}{2}.$

Die folgende Tafel enthält für die einzelnen Schwingungsarten die Ordnungszahl, die Schwingungszahl und die Werthe von ξ , die den Knoten und Bäuchen entsprechen.

Ordnungszahl	Schwingungszahl	Knoten	Bäuche
1	1	0	—
2	1,5243	$\pm 0,55170$	0
3	1,9824	0	$\pm 0,38325$
—	—	$\pm 0,73580$	—
4	2,3448	$\pm 0,28838$	0
—	—	$\pm 0,81111$	$\pm 0,56000$
5	2,6586	0	$\pm 0,22263$
—	—	$\pm 0,44644$	$\pm 0,65776$
—	—	$\pm 0,85310$	—

IV. Ueber die Fortführung der Electricität durch strömendes Wasser in Röhren und verwandte Erscheinungen; von E. Dorn in Breslau.¹⁾

15. Mein experimentelles Resultat steht in Widerspruch mit dem von Hrn. Edlund erhaltenen²⁾, der bei gleicher Ge-

1) Fortsetzung von 9. p. 552.

2) Edlund, Wied. Ann. 1. p. 173. 1877 u. 8. p. 127 ff. 1879.