LOGARITHMEN DER KUGELFUNCTIONEN DER ERSTEN FÜNF ORDNUNGEN VON FÜNF ZU FÜNF GRAD.

VON DR. AD. SCHMIDT (GOTHA .

In der von mir im ersten Hefte dieser Zeitschrift mitgetheilten Untersuchung habe ich (S. 20) anstatt der gewöhnlich benutzten Kugelfunctionen gewisse Vielfache davon angewendet, die ich R_m^n nannte und durch die Gleichungen

$$R_m^n(\mu) = 1.3.5. \dots (2n-1) \sqrt{\epsilon_m \frac{2n+1}{(n-m)!(n+m)!}} P_m^n(\mu) \\ = \sqrt{\epsilon_m \frac{(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}} T_m^n(\mu)$$

mit $T_m^n(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m}$, $\mu = \cos u$, $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = 2$ definierte.

Die Vereinfachung, die bei der dort behandelten Aufgabe die analytische Entwicklung dadurch erfuhr (wobei übrigens der Factor $(2n+1)$ ohne Bedeutung war), hätte nicht hingereicht, die Abweichung von den üblichen Bezeichnungsweisen zu rechtfertigen. Was mich bereits an einer anderen Stelle zur Einführung der Functionen R_m^n veranlasste und was mich ihre allgemeine Verwendung hier befürworten lässt, ist der Vorteil, den sie in numerischen Entwicklungen gewähren.

Die einzelnen Functionen P_m^n und T_m^n sind von merklich verschiedener Grössenordnung; so sind die Maximalwerte von P_1^1 , P_3^3 , P_5^5 , P_7^7 gleich 1, 0.275, 1, 0.082, 1, diejenigen von T_1^1 , T_3^3 , T_5^5 , T_7^7 gleich 1, 2.06, 15, 3.23, 945. Die einzelnen Glieder einer nach diesen Functionen entwickelten Reihe sind daher bei gleicher Grösse ihrer Coefficienten von sehr verschiedener Bedeutung, was schon in diesem einfachsten Falle und noch mehr bei beliebigen Coefficientenwerten den Ueberblick über ihren Einfluss auf die dargestellte Grösse sehr erschwert und auch die Berechnung in manchen Beziehungen unbequem macht. Die Functionen R_m^n sind dagegen so gewählt, dass der auf die ganze

Kugelfläche bezogene quadratische Mittelwert von $R_m^n \cos m\lambda$ und $R_m^n \sin m\lambda$ (hier mit Ausschluss des Falles $m=0$) bei allen derselbe (und zwar gleich 1) ist. Auch ihre Maximalwerte sind daher nicht sehr verschieden, z. B. 1.73 bei R_0^1 und R_1^1 , 3.32 by R_0^5 , 2.33 bei R_5^5 . In einer nach den R_m^n fortschreitenden Reihe ist demnach die Bedeutung jedes Reihengliedes dem absoluten Werte seines Coefficienten proportional, ein Umstand, mit dem noch manche (zum Teil auch in der Eingangs erwähnten Untersuchung hervortretende) Vorteile für die Durchführung der Zahlenrechnung verknüpft sind.

Um nun die Benutzung dieser Functionen zu erleichtern, gebe ich auf den folgenden Seiten eine kleine Tafel ihrer Logarithmen, die trotz ihrer weitgehenden Beschränkung für die meisten Zwecke, besonders für die Auswertung gegebener Reihen, ausreichen dürfte. Eine Erweiterung und Vervollständigung der Tafel, insbesondere zur Erleichterung der Berechnung der Reihencoefficienten, behalte ich mir für später vor.

Es ist nicht meine Ansicht, dass man die Functionen R_m^n auch in den analytischen Entwicklungen stets gebrauchen solle; in manchen Fällen wird es zweckmässig sein, diese in der bisher üblichen Form durchzuführen und die R_m^n erst in die Schlussresultate einzusetzen. Um diese Umformung möglichst bequem zu gestalten, habe ich der Tafel die Logarithmen der Quotienten der verschiedenen Functionen hinzugefügt. Es ist dabei

$$P_m^n = \tau_m^n R_m^n, \quad T_n^m = \tau_n^m R_n^m$$

gesetzt worden. Dazu ist noch zu bemerken, dass für $n=0$, $m=0$ alle drei Functionen übereinstimmend gleich 1 sind.

Zur Berechnung der mitgeteilten Zahlen dienten siebenstellige Logarithmen, die in einigen Fällen bei der Abrundung auf fünf Dezimalen eine Unsicherheit in der letzten Stelle bestehen liessen. Als möglicher Fehler der Zahlen ist daher nicht eine halbe, sondern eine ganze Einheit dieser Stelle anzusehen.

α	$\log. R_0^I$	$\log. R_I^I$	$\log. R_0^2$	$\log. R_I^2$	$\log. R_2^2$	
0°	0.23856	—∞	0.34949	—∞	—∞	180°
5	0.23690	9.17886	0.34451	9.52669	8.16761	175
10	0.23191	9.47823	0.32938	9.82107	8.76636	170
15	0.22350	9.65156	0.30350	9.98599	9.11301	165
20	0.21155	9.77261	0.26569	0.09508	9.35512	160
25	0.19584	9.86451	0.21405	0.17127	9.53891	155
30	0.17609	9.93753	0.14537	0.22455	9.68496	150
35	0.15193	9.99715	0.05408	0.26000	9.80420	145
40	0.12281	0.04663	9.92954	0.28037	9.90315	140
45	0.08805	0.08805	9.74743	0.28702	9.98599	135
50	0.04663	0.12281	9.42781	0.28037	0.05552	130
55	9.99715	0.15193	8.16340 π	0.26000	0.11374	125
60	9.93753	0.17609	9.44640 π	0.22455	0.16208	120
65	9.86451	0.19584	9.71514 π	0.17127	0.20157	115
70	9.77261	0.21155	9.86074 π	0.09508	0.23299	110
75	9.65156	0.22350	9.95102 π	9.98599	0.25690	105
80	9.47823	0.23191	0.00727 π	9.82107	0.27372	100
85	9.17886	0.23690	0.03844 π	9.52669	0.28370	95
90	—∞	0.23856	0.04846 π	—∞	0.28702	90

	$\log. (-R_0^I)$	$\log. R_I^I$	$\log. R_0^2$	$\log. (-R_I^2)$	$\log. R_2^2$	α
$\log. \pi_m^n$	9.76144	9.76144	9.47442	9.41195	9.71298	
$\log. \tau_m^n$	9.76144	9.76144	9.65051	9.88908	0.19011	

α	$\log. R_0^3$	$\log. R_I^3$	$\log. R_2^3$	$\log. R_3^3$	$\log. R_4^4$	
0°	0.42255	—∞	—∞	—∞	0.47712	180°
5	0.41257	9.74778	8.58850	7.14138	0.46042	175
10	0.38186	0.03461	9.18226	8.03950	0.40818	170
15	0.32789	0.18664	9.52050	8.55948	0.31262	165
20	0.24530	0.27702	9.75065	8.92264	0.15379	160
25	0.12293	0.32785	9.91874	9.19833	9.86900	155
30	9.93411	0.34787	0.04504	9.41740	8.84703	150
35	9.58517	0.34016	0.14011	9.59626	9.71119 π	145
40	8.82152 π	0.30412	0.20995	9.74469	9.98092 π	140
45	9.66997 π	0.23514	0.25802	9.86894	0.08591 π	135
50	9.89999 π	0.12153	0.28614	9.97325	0.10809 π	130
55	0.01207 π	9.93246	0.29488	0.06058	0.06279 π	125
60	0.06353 π	9.54504	0.28360	0.13309	9.93811 π	120
65	0.07113 π	9.19610 π	0.25006	0.19232	9.66804 π	115
70	0.03851 π	9.80071 π	0.18959	0.23945	8.05691 π	110
75	9.96022 π	0.01737 π	0.09245	0.27532	9.63376	105
80	9.81592 π	0.13194 π	9.93594	0.30054	9.90184	100
85	9.53340 π	9.19109 π	9.64655	0.31552	0.01716	95
90	—∞	0.20956 π	—∞	0.32049	0.05115	90

	$\log. (-R_0^3)$	$\log. R_I^3$	$\log. (-R_2^3)$	$\log. R_3^3$	$\log. R_4^4$	α
$\log. \pi_m^n$	9.17951	9.09147	9.29044	9.67951	8.88190	
$\log. \tau_m^n$	9.57745	9.96653	0.46653	0.85560	9.52288	

u	$\log. R_1^f$	$\log. R_2^f$	$\log. R_3^f$	$\log. R_4^f$	$\log. R_5^f$	
0°	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0.52070	180°
5	9.90995	8.87942	7.61684	6.10725	0.49552	175
10	0.18660	9.46648	8.50997	7.30475	0.41501	170
15	0.32091	9.79335	9.02154	7.99805	0.25878	165
20	0.38468	0.00708	9.37275	8.48227	9.95444	160
25	0.39758	0.15311	9.63273	8.84986	7.46497	155
30	0.36374	0.25088	9.83205	9.14195	9.86953 _n	150
35	0.27676	0.30959	9.98675	9.38043	0.08784 _n	145
40	0.11183	0.33313	0.10607	9.57834	0.14362 _n	140
45	9.77300	0.32146	0.19555	9.74401	0.09548 _n	135
50	9.09987 _n	0.27003	0.25844	9.88308	9.92637 _n	130
55	9.89029 _n	0.16620	0.29630	9.99952	9.45924 _n	125
60	0.10847 _n	9.97467	0.30917	0.09619	9.47418	120
65	0.20126 _n	9.53746	0.29539	0.17517	9.89747	115
70	0.22079 _n	9.42857 _n	0.25062	0.23801	0.03666	110
75	0.17631 _n	9.91960 _n	0.16544	0.28584	0.05565	105
80	0.05352 _n	0.10828 _n	0.01733	0.31947	9.96943	100
85	9.78306 _n	0.19751 _n	9.73294	0.33944	9.71843	95
90	$-\infty$	0.22455 _n	$-\infty$	0.34607	$-\infty$	90

	$\log. (-R_1^f)$	$\log. R_2^f$	$\log. (-R_3^f)$	$\log. R_4^f$	$\log. (-R_5^f)$	u
$\log. \pi_m^n$	8.77984	8.93036	9.20239	9.65393	8.58305	
$\log. \tau_m^n$	0.02288	0.65051	1.22358	1.67512	9.47930	

u	$\log. R_1^s$	$\log. R_2^s$	$\log. R_3^s$	$\log. R_4^s$	$\log. R_5^s$	
0°	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	180°
5	0.03740	9.10422	7.95938	6.62629	5.06824	175
10	0.30113	9.68285	8.84624	7.81879	6.56511	170
15	0.41234	9.99521	9.34718	8.50369	7.43174	165
20	0.43971	0.18756	9.68309	8.97595	8.03702	160
25	0.39614	0.30400	9.92264	9.32783	8.49650	155
30	0.26870	0.36161	0.09570	9.60017	8.86161	150
35	9.99004	0.36540	0.21726	9.81449	9.15972	145
40	8.21988	0.31070	0.29492	9.98329	9.40710	140
45	9.93020 _n	0.17666	0.33165	0.11419	9.61419	135
50	0.16889 _n	9.88516	0.32623	0.21184	9.78803	130
55	0.24383 _n	8.62951 _n	0.27168	0.27881	9.93358	125
60	0.21782 _n	9.90120 _n	0.14863	0.31585	0.05441	120
65	0.08231 _n	0.13642 _n	9.89447	0.32181	0.15314	115
70	9.72311 _n	0.22154 _n	8.88072	0.29276	0.23169	110
75	9.38486	0.21468 _n	9.79287 _n	0.21953	0.29148	105
80	9.97493	0.11442 _n	0.08168 _n	0.07984	0.33352	100
85	0.15575	9.85620 _n	0.20340 _n	9.80043	0.35848	95
90	0.20565	$-\infty$	0.23913 _n	$-\infty$	0.36676	90

	$\log. R_1^s$	$\log. (-R_2^s)$	$\log. R_3^s$	$\log. (-R_4^s)$	$\log. R_5^s$	u
$\log. \pi_m^n$	8.47213	8.59365	8.80663	9.13324	9.63324	
$\log. \tau_m^n$	0.06735	0.79093	1.48103	2.10867	2.60867	