MÉMOIRE

SUR L'INTÉGRATION SOUS FORME FINIE

DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU SECOND ORDRE

ET A COEFFICIENTS RATIONNELS.

PAR LE P. PEPIN, S. J.

On trouvera dans ce mémoire une solution générale du problème suivant:
 « Étant donnée l'équation différentielle

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + Q \cdot \frac{dz}{dx} + R z = 0, \quad (1)$$

où Q et R désignent deux fonctions rationnelles de la variable x , décider s'il existe une intégrale de la forme

$z =$ une fonction finie explicite de x ,

c. à d. une fonction que l'on puisse écrire avec un nombre limité de signes algébriques, exponentiels, logarithmiques, et de signes $\int$ d'intégration indéfinie relative à la variable x . »

Monsieur Liouville est le premier qui se soit occupé de ce genre de recherches. Dans deux mémoires qui font partie du recueil *des savants étrangers*, il a donné une méthode pour déterminer les intégrales algébriques des différentielles algébriques, et les intégrales rationnelles des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. Il a aussi résolu quelques cas particuliers du problème ci-dessus énoncé, et les beaux résultats qu'il en a déduits soit relativement aux intégrales Elliptiques considérées comme fonctions du module, soit à la recherche des cas d'intégrabilité de l'équation de Riccati, montrent assez que la solution générale de ce problème ne peut être ni sans intérêt, ni sans importance.

Quant à la méthode suivie dans ce mémoire, on pourra s'en former une idée en lisant l'esquisse rapide que voici.

Après avoir ramené l'équation proposée à la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = P \cdot y. \quad (2)$$

en posant

$$z = y \cdot e^{-\frac{1}{2} \int Q dx}, \quad \left(\frac{1}{4} Q^2 + \frac{1}{2} \frac{dQ}{dx} - R \right) = P,$$

je rappelle un théorème fondamental dû à M. Liouville.

« Si l'intégrale complète de l'équation (2) n'est pas algébrique, on pourra toujours satisfaire à l'équation

$$\frac{dt}{dx} + t^2 = P \quad (3),$$

en prenant pour t , une fonction rationnelle de x , ou une racine d'une équation algébrique du second degré à coefficients rationnels. »

Je démontre ensuite que, si l'intégrale complète de l'équation (2) est algébrique la valeur correspondante de la fonction t ou $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$, qui vérifie l'équation (3) sera déterminée par une équation algébrique du premier, du second, ou du quatrième degré, à coefficients rationnels.

La démonstration de ce théorème découle d'une propriété remarquable des équations irréductibles dont les racines satisfont à l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = P.y$. Non seulement leurs racines sont des fonctions rationnelles de l'une quelconque d'entre elles, mais encore celles qui se déduisent l'une de l'autre par une même opération rationnelle forment une série récurrente périodique dont l'échelle de relation est $\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) - 1$, ρ désignant une racine imaginaire de l'unité. On déduit de là que, si dans l'équation irréductible $f(y) = 0$ dont les racines satisfont à l'équation (2), on désigne par μ le nombre des racines qui se déduisent l'une de l'autre par une même opération rationnelle θ , on pourra obtenir une seconde équation $F(y) = 0$ de même degré, dont les racines satisferont aussi à l'équation (2), et dans laquelle les exposants de y seront tous multiples du nombre μ . Nous supposons que l'équation $F(y) = 0$ est de degré minimum parmi toutes les équations irréductibles dont les racines satisfont à l'équation (2), et que, de plus, le plus grand commun diviseur μ des exposants de y a la plus grande valeur possible. Dès lors, si dans cette équation on désigne par $\theta(y)$ une racine qui n'ait pas avec y un rapport constant, on aura

$$\theta(y) = a.y + b.\psi(y),$$

$\psi(y)$ désignant un polynôme dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x et dans lequel tous les exposants de y sont de la forme $(i\mu - 1)$; a et b désignent deux constantes dont la première a vérifie l'équation

$$a = \frac{\left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right) - \frac{1}{\rho} \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)}{\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)};$$

ρ désigne une racine imaginaire quelconque de l'équation $x^\mu = 1$, β et β_1 sont deux racines imaginaires de l'unité qui vérifient les deux équations

$$\theta^2(y) = \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) \cdot \theta(y) - y; \quad (\theta\rho)^2(y) = \left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right) \cdot (\theta\rho)(y) - y.$$

De cette propriété de l'équation $F(y) = 0$, il résulte que si l'on désigne par $\theta(y)$ une racine quelconque de cette équation, et par m le plus petit nombre entier qui vérifie la formule $\theta^m(y) = y$, le nombre m ne pourra avoir avec μ aucun facteur commun autre que 2 ou 4, sans être un diviseur de μ . De ce théorème et des propriétés des racines primitives d'une équation binôme on conclut que si le nombre m n'est pas égal à l'un des nombres 2, 3, 4, ou 6, il doit être nécessairement un diviseur du nombre μ .

Au moyen de ces théorèmes nous démontrerons que, si le plus grand commun diviseur μ des exposants de y dans $F(y)$ n'est pas égal à l'un des trois nombres 6, 8, ou 10, la fonction t ou $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$ sera racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels. Si μ est égal à 8 ou à 10, la fonction t est encore déterminée par une équation du second degré. Mais si μ est égal à 6, et que l'équation $F(y) = 0$ ne se réduise pas à une équation binôme, cette équation sera du douzième ou du vingt-quatrième degré, et la fonction t sera déterminée par une équation algébrique du second ou du quatrième degré. En réunissant ces divers théorèmes nous concluons que dans tous les cas, si l'équation (2) $\frac{d^2y}{dx^2} = Py$ admet une intégrale qui soit une fonction finie explicite de x , dans le sens expliqué plus haut, l'équation (3) $\frac{dt}{dx} + t^2 = P$ sera vérifiée par une valeur de t rationnelle, ou par les racines d'une équation du second ou du quatrième degré.

Le problème proposé se trouve ainsi ramené au suivant:

« Décider si l'équation différentielle $\frac{dt}{dx} + t^2 = P$, où P représente une fonction rationnelle de x , peut ou ne peut pas être vérifiée par une valeur de t rationnelle, ou qui soit déterminée par une équation du second ou du quatrième degré. »

Comme, pour chaque valeur de P , on pourra aisément résoudre ce dernier problème par la méthode des coefficients indéterminés, on peut considérer le problème comme suffisamment résolu. Néanmoins, si la théorie exposée dans ce mémoire mérite l'approbation des savants, je me propose de la compléter dans un second mémoire, où je traiterai directement ce dernier problème.

Considérons l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + Q \frac{dz}{dx} + R z = 0 \quad (1).$$

Pour en faire disparaître le second terme, nous poserons

$$z = y \cdot e^{-\frac{1}{2} \int Q dx}$$

y sera déterminé par l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = P \cdot y \quad (2)$$

dans laquelle

$$P = \frac{1}{4} Q^2 + \frac{1}{2} \frac{dQ}{dx} - R.$$

Ainsi, pour que l'intégrale z de la première équation soit une fonction finie explicite de x , il faut et il suffit que l'intégrale y de l'équation (2) soit une fonction finie explicite de x .

I.

Considérons d'abord le cas où l'intégrale générale de l'équation (2) n'est pas algébrique. M. Liouville (Journal des Mathématiques... t. IV. p. 435) a démontré les théorèmes suivants:

1.^{er} *Théorème.* « Si on peut satisfaire à l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = P \cdot y$, en prenant pour y une fonction finie explicite de x , on pourra toujours la vérifier par une valeur de la forme $y = e^{\int t dx}$, t désignant une fonction algébrique de x , qui satisfait à l'équation (3) $\frac{d t}{dx} + t^2 = P$. »

2. *Théorème.* « Si l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = P y$ n'admet pas d'intégrale algébrique, l'équation irréductible et à coefficients rationnels $\omega(x, t) = 0$ qui détermine l'intégrale algébrique de l'équation (3) $\frac{d t}{dx} + t^2 = P$, ne peut pas être d'un degré supérieur au second. » - (V. le mémoire cité. t. IV. p. 446).

3. *Théorème.* « Si l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = P y$ admet une intégrale algébrique, sans que l'intégrale complète soit elle-même algébrique, l'équation (3) admettra toujours une intégrale rationnelle. »

Démonstration. Soit $f(x, y) = 0$, l'équation algébrique irréductible et à coefficients rationnels qui détermine l'intégrale y de l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = P y$. Si on substitue

dans cette dernière équation la valeur de $\frac{d^2 y}{dx^2}$ déduite de l'équation $f(x, y) = 0$, on a

$$-\frac{f''_{x^2} \bar{f}_y^2 - 2 f'_x f'_y \cdot f''_{xy} + \bar{f}_x^2 f''_{y^2}}{\bar{f}_y^3} - P y = 0$$

Le premier membre de cette équation est une fonction rationnelle de x et de y . Comme elle est vérifiée par une racine y de l'équation irréductible $f(x, y) = 0$, elle doit l'être aussi par toutes les autres. Les racines de cette équation seront toutes égales au produit de l'une d'entre elle multipliée par une constante : car si deux de ces racines y_1, y_2 n'avaient pas entre elles un rapport constant, comme ces deux racines sont des solutions particulières de l'équation (2), l'intégrale générale serait

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2,$$

et par conséquent cette intégrale serait algébrique contrairement à l'hypothèse. Ainsi en désignant par y une racine de l'équation $f(x, y) = 0$, toutes les racines de cette équation seront de la forme cy , c désignant une constante. La fonction

$$t = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

sera donc une fonction symétrique des racines de l'équation $f(x, y) = 0$, c . à $.d$. elle sera une fonction rationnelle de x . C. Q. F. D.

En réunissant ces théorèmes nous pouvons conclure avec M. Liouville la première proposition énoncée d'abord:

« Si l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = P \cdot y$ peut être satisfaite par une fonction finie explicite de x , et que son intégrale complète ne soit pas algébrique, on pourra toujours satisfaire à l'équation (3) en prenant pour t une fonction algébrique de x déterminée par une équation du premier ou du second degré à coefficients fonctions rationnelles de x . »

II.

L'intégrale complète de l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = Py$ est algébrique.

Si une racine d'une équation algébrique irréductible $f(x, y) = 0$ satisfait à l'équation différentielle $\frac{d^2 y}{dx^2} = Py$, on verra, comme au théorème 3.^{me} que les autres racines satisfont aussi à la même équation. De plus l'équation $f(x, y) = 0$ appartient à la classe des fonctions abéliennes, c . à $.d$. que toutes ses racines s'expriment rationnellement en fonction de l'une quelconque d'entre elles. En effet; soit y_1 l'une des

racines de cette équation. Puisque y_1 est une intégrale particulière de l'équation (2) l'intégrale complète sera donnée par la formule

$$y = A y_1 + B. y_1 \int \frac{dx}{y_1^2} \quad (a),$$

A et B désignant deux constantes arbitraires. Toutes les solutions de l'équation (2), et par conséquent toutes les racines de l'équation $f(x, y) = 0$ peuvent se déduire de cette formule en donnant aux constantes A et B des valeurs convenables. Le second membre de cette équation est, par hypothèse, une fonction algébrique de x .

L'intégrale $\int \frac{dx}{y_1^2}$ est donc algébrique, et par conséquent elle peut s'exprimer rationnellement en fonction de x et de y_1 . (V. Le mémoire de M. Liouville sur les intégrales dont la valeur est algébrique). On sait d'ailleurs que toute fonction rationnelle des racines d'une équation de degré n , peut être égale à une fonction entière du degré $n - 1$ par rapport à cette racine. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

4.^{me} Théorème.

« Si l'intégrale complète de l'équation (2) est algébrique et qu'on désigne par n le degré de l'équation irréductible $f(x, y) = 0$, dont l'une des racines y_1 satisfait à cette équation (2) $\frac{d^2 y}{dx^2} = Py$;

1° Toutes les racines de l'équation $f(x, y) = 0$ vérifieront l'équation (2), et se déduiront de la formule

$$y = A. y_1 + B y_1 \int \frac{dx}{y_1^2} \quad (a)$$

en attribuant des valeurs convenables aux constantes A et B.

2° On aura

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{y_1^2} = \alpha + \beta y_1 + \gamma y_1^2 + \dots + \lambda y_1^{n-1}$$

$\alpha, \beta, \gamma \dots \lambda$, désignant des fonctions rationnelles de x . »

Or soit

$$y_2 = a y_1 + b. y_1 (\alpha + \beta y_1 + \gamma y_1^2 + \dots + \lambda y_1^{n-1}) = \theta(y_1)$$

une seconde racine de l'équation $f(x, y) = 0$. L'équation $f[x, \theta(y_1)] = 0$ aura une racine commune y_1 avec l'équation irréductible $f(x, y) = 0$; elle sera donc vérifiée par toutes les racines de cette dernière équation. Or $\theta(y_1)$ est une racine de cette équation, $\theta.\theta(y_1)$ le sera donc aussi, et généralement si l'on désigne par $\theta^m(y)$ le résultat obtenu en effectuant sur la fonction $\theta^{m-1}(y)$ l'opération rationnelle indiquée

par θ , tous les termes de la suite

$$y_1, \theta(y_1), \theta^2(y_1), \theta^3(y_1), \dots, \theta^m(y_1) \dots$$

seront des racines de l'équation $f(x, y) = 0$, et satisferont à l'équation différentielle (2). De plus le nombre μ des termes distincts de cette suite, c. à d. le plus petit nombre entier qui satisfasse à l'équation $\theta^\mu(y) = y$, est un diviseur du nombre n qui exprime le degré par rapport à y de l'équation $f(x, y) = 0$.

Ce sont là des propriétés bien connues des équations Abéliennes, et dont nous ferons un fréquent usage dans tout ce qui va suivre. De plus, comme il y a évidemment une limite inférieure pour le degré des équations irréductibles dont les racines satisfont à l'équation différentielle proposée, nous supposons que le degré n de l'équation $f(x, y) = 0$ ou $f(y) = 0$ est ce degré minimum.

5.^{me} Théorème.

« Soit $f(y) = 0$ une équation irréductible dont les racines satisfont à l'équation (2), soient $y_1, \theta(y_1)$ deux racines de cette équation dont le rapport ne soit pas constant, et soit μ le nombre des termes distincts de la suite $y_1, \theta(y_1), \theta^2(y_1) \dots$, les termes de cette suite formeront une série récurrente périodique dont l'échelle de relation est $\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) - 1$, ρ désignant une racine primitive de l'équation $\rho^\mu = 1$. »

Démonstration. On a

$$\theta(y_1) = a. y_1 + b. y_1 \int_{x_0}^x \frac{dx}{y_1^2}$$

d'où

$$D_x \left(\frac{\theta(y_1)}{y_1} \right) - \frac{b}{y_1^2} = 0.$$

Le premier membre de cette dernière équation est une fonction rationnelle de x et de y_1 ; comme elle est vérifiée par une racine y_1 de l'équation irréductible $f(y) = 0$, elle sera aussi vérifiée par toutes les autres racines, par ex. par $\theta(y_1)$; on aura donc

$$D_x \left(\frac{\theta^2(y_1)}{\theta(y_1)} \right) - \frac{b}{\theta(y_1)^2} = 0.$$

En combinant cette équation avec la précédente pour éliminer la constante b , en effectuant les différentiations indiquées et réduisant, nous trouverons

$$[y_1 + \theta^2(y_1)] d\theta(y_1) = \theta(y_1) d[y_1 + \theta^2(y_1)]$$

d'où

$$\text{Log}[y_1 + \theta^2(y_1)] = \text{Log} \theta(y_1) + \text{Log} h;$$

h désignant une constante. On aura donc

$$y_1 + \theta^2(y_1) = h \theta(y_1) \quad \text{ou} \quad \theta^2(y_1) = h \theta(y_1) - y_1.$$

Cette dernière équation, étant vérifiée par la racine y_1 de l'équation irréductible $f(y) = 0$, le sera encore par toutes les autres; car $\theta^2(y_1)$ et $\theta(y_1)$ désignant deux fonctions rationnelles de x et de y_1 . On a donc généralement

$$\theta^m(y) = h \theta^{m-1}(y) - \theta^{m-2}(y) \quad (\text{A}).$$

Les termes de la suite $y, \theta(y), \theta^2(y), \theta^3(y), \dots$ forment donc une série récurrente dont l'échelle de relation est $h - 1$. Or si l'on désigne par ρ et $\frac{1}{\rho}$ les deux racines de l'équation $\rho^2 - \rho h + 1 = 0$, la solution générale de l'équation (A) sera

$$A \rho^m + B \rho^{-m}$$

A et B désignant deux quantités arbitraires indépendantes de m . On aura donc

$$\theta^m(y) = A \rho^m + B \rho^{-m}$$

A et B étant déterminés par les deux équations

$$y = A + B \quad \theta(y) = A \rho + B \frac{1}{\rho}$$

d'où
$$A = \frac{\theta(y) - \frac{1}{\rho} y}{\rho - \frac{1}{\rho}}, \quad B = - \frac{\theta(y) - \rho y}{\rho - \frac{1}{\rho}}.$$

On a donc, en posant pour abréger,
$$P_m = \frac{\rho^m + \frac{1}{\rho^m}}{\rho - \frac{1}{\rho}},$$

$$\theta^m(y) = P_m \theta(y) - P_{m-1} y. \quad (4)$$

Si on fait $m = \mu$ dans cette équation, elle deviendra, eu égard à l'hypothèse $\theta^\mu(y) = y$,

$$\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) y = \left(\rho^\mu - \frac{1}{\rho^\mu}\right) \theta(y) - \left(\rho^{\mu-1} - \frac{1}{\rho^{\mu-1}}\right) y.$$

Or l'on peut supposer que $\theta(y)$ ait été réduit au degré $n - 1$ par rapport à y , au moyen de l'équation $f(y) = 0$. De plus cette fonction doit être d'un degré supérieur au premier: car on a

$$\theta(y) = a y + b \cdot y \int_{x_0}^x \frac{dx}{y^2};$$

pour que $\theta(y)$ ne fût que du premier degré, il faudrait que l'intégrale $\int_x^x \frac{dx}{y^2}$ fût rationnelle, ce qui exigerait que y^2 fût rationnel contrairement à l'hypothèse.

L'équation précédente doit donc être identiquement nulle, ce qui donne

$$\rho^\mu - \frac{1}{\rho^\mu} = 0 \text{ et } \rho^{\mu-1} - \frac{1}{\rho^{\mu-1}} = \frac{1}{\rho} - \rho; \text{ d'où } \rho^\mu = 1.$$

D'ailleurs ρ doit être une racine primitive de l'équation $\rho^\mu = 1$; car, si l'on avait $\rho^i = 1$, i étant inférieur à μ , l'équation (4) donnerait $\theta^i(y) = y$; ce qui est impossible, puisque μ est le plus petit nombre tel qu'on ait $\theta^\mu(y) = y$. Comme $h = \rho + \frac{1}{\rho}$, nous pouvons conclure que l'échelle de la série récurrente

$$y, \theta(y), \theta^2(y), \theta^3(y) \dots \text{ est } \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) - 1,$$

ρ désignant une racine primitive de l'équation $\rho^\mu = 1$. C. Q. F. D.

6.^{me} Théorème.

« Soient y et $\theta(y)$ deux racines quelconques de l'équation $f(y) = 0$; soit μ le nombre des termes distincts de la suite $y, \theta(y), \theta^2(y), \theta^3(y) \dots$; on pourra toujours former une équation du même degré n par rapport à y , et à coefficients rationnels, dont toutes les racines satisferont à l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = P y$, et dans la quelle les exposants de y seront tous multiples du nombre μ . »

Démonstration. L'équation (A) obtenue dans le dernier théorème peut s'écrire:

$$\left\{ \theta^m(y) - \rho \theta^{m-1}(y) \right\} = \frac{1}{\rho} \left\{ \theta^{m-1}(y) - \rho \theta^{m-2}(y) \right\}. \quad (B)$$

posons

$$z_i = \varphi(y_i) = \left\{ \theta(y_i) - \rho y_i \right\}^\mu,$$

et admettons que les n racines de l'équation $f(y) = 0$, aient été distribuées en m groupes de μ racines chacun, comme il suit

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 \quad \theta(y_1) \quad \theta^2(y_1) \quad . \quad . \quad . \quad \theta^{\mu-1}(y_1), \\ y_2 \quad \theta(y_2) \quad \theta^2(y_2) \quad . \quad . \quad . \quad \theta^{\mu-1}(y_2), \\ y_3 \quad \theta(y_3) \quad \theta^2(y_3) \quad . \quad . \quad . \quad \theta^{\mu-1}(y_3), \\ y_m \quad \theta(y_m) \quad \theta^2(y_m) \quad . \quad . \quad . \quad \theta^{\mu-1}(y_m), \end{array} \right.$$

L'équation $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_m) = T(z) = 0$

sera du degré m en z , et tous ses coefficients seront des fonctions rationnelles de x ; car les fonctions symétriques des racines de l'équation $T(z) = 0$, sont aussi des fonctions symétriques des racines des l'équation $f(y) = 0$, ainsi qu'on le voit par les équations suivantes

$$z_i = \varphi(y_i) = \varphi[\theta(y_i)] = \varphi[\theta^2(y_i)] = \dots = \varphi[\theta^{\mu-1}(y_i)],$$

lesquelles se déduisent immédiatement de l'expression de z_i et de la formule (B).

D'ailleurs, en désignant par z l'une quelconque de ces racines, on aura

$$z^{\frac{1}{\mu}} = \rho^h \{ \theta(y) - \rho y \}$$

$z^{\frac{1}{\mu}}$ est donc une intégrale de l'équation (2). Posons $z = y^\mu$ dans l'équation $T(z) = 0$; nous obtiendrons une équation de la forme suivante

$$F(y) = y^{m\mu} + p_1 y^{(m-1)\mu} + p_2 y^{(m-2)\mu} + \dots + p_{m-1} y^\mu + p_m = 0 \quad (D)$$

$p_1, p_2, \dots, p_m$ désignant des fonctions rationnelles de x . Or toutes les racines de cette équation satisfont à l'équation différentielle proposée, elle est du degré minimum $n = m\mu$, et les exposants de y sont tous multiples du nombre μ . Le théorème énoncé est donc démontré.

7.^{me} Théorème.

« Dans l'équation (D) obtenue précédemment, si on désigne par $\theta(y)$ une racine qui n'ait pas avec y un rapport constant, on pourra poser

$$\theta(y) = a y + b \psi(y),$$

a et b désignant deux constantes, $\psi(y)$ un polynome du degré $n - 1$, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x , et dans lequel les exposants de y sont tous de la forme $i\mu - 1$, i désignant un nombre entier. »

Démonstration. Quelle que soit la racine de l'équation $F(y) = 0$, que l'on représente par y , on a (voyez le commencement de la démonstration du 5.^{me} théorème)

$$D_x \left\{ \frac{\theta(y)}{y} \right\} - \frac{b}{y^2} = 0.$$

On pourra donc remplacer y , par ρy , ρ désignant une racine primitive de l'équation $\rho^\mu = 1$. On a donc

$$D_x \left\{ \frac{\theta(\rho y)}{\rho y} \right\} - \frac{1}{\rho^2} \frac{b}{y^2} = 0.$$

Intégrons cette équation et la précédente à partir de $x = x_0$, nous aurons

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\theta(y)}{y} = \frac{\theta(y_0)}{y_0} + b \cdot \int_{x_0}^x \frac{dx}{y^2} \\ \frac{\theta(\rho y)}{\rho y} = \frac{\theta(\rho y_0)}{\rho y_0} + \frac{b}{\rho^2} \int_{x_0}^x \frac{dx}{y^2}. \end{array} \right.$$

D'ailleurs (4.^{me} théorème),

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{y^2} = \alpha + \mathcal{C} y + \delta y^2 + \dots + \lambda y^{n-1};$$

$\alpha, \mathcal{C}, \delta, \dots, \lambda$, désignant des fonctions rationnelles de x . On pourra donc poser

$$y \int_{x_0}^x \frac{dx}{y^2} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_{n-1} y^{n-1} = \varphi(y)$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, désignant aussi des fonctions rationnelles de x . Les deux équations précédentes deviendront

$$\begin{cases} \theta(y) = \frac{\theta(y_0)}{y_0} y + b \cdot \varphi(y) \\ \theta(\rho y) = \frac{\theta(\rho y_0)}{y_0} y + \frac{b}{\rho} \varphi(y). \end{cases}$$

Puisque ces équations doivent être vérifiées par toutes les racines de l'équation $F(y) = 0$, nous remplacerons dans la première y par ρy , puis nous en retrancherons la dernière équation, ce qui nous donnera

$$0 = c y + \varphi(\rho y) - \frac{1}{\rho} \varphi(y),$$

en posant, pour abréger,

$$\rho \left(\frac{\theta(y_0)}{y_0} - \frac{\theta(\rho y_0)}{\rho y_0} \right) = bc.$$

En remplaçant $\varphi(\rho y)$ et $\varphi(y)$ par leurs valeurs dans l'équation précédente, et ordonnant le résultat on obtient:

$$\begin{aligned} 0 = a_0 \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) + \left[c + a_1 \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \right] y + a_2 \left(\rho^2 - \frac{1}{\rho} \right) y^2 + a_3 \left(\rho^3 - \frac{1}{\rho} \right) y^3 \\ + \dots + a_{n-1} \left(\rho^{n-1} - \frac{1}{\rho} \right) y^{n-1}. \end{aligned}$$

Cette équation doit être identique par rapport à y ; et comme on ne peut avoir $\rho^m - \frac{1}{\rho} = 0$ qu'autant que le nombre m est de la forme $i\mu - 1$, i désignant un nombre entier, il faut que a_m soit nul, excepté quand $m = 1$, ou quand $m = i\mu - 1$. On a donc

$$\varphi(y) = a_1 y + a_{\mu-1} y^{\mu-1} + a_{2\mu-1} y^{2\mu-1} + \dots + a_{m\mu-1} y^{m\mu-1}; \quad m\mu = n.$$

Si donc nous posons $\frac{\theta(y_0)}{y_0} + b a_1 = a$, et que nous remplacions $a_{\mu-1}, a_{2\mu-1}, \dots, a_{m\mu-1}$, par $\alpha, \mathcal{C}, \dots, \lambda$, la racine $\theta(y)$ sera représentée par la formule

$$\theta(y) = a y + b (\alpha y^{\mu-2} + \epsilon y^{2\mu-1} + \gamma y^{3\mu-1} + \dots + \lambda y^{m\mu-1}) = a y + b \psi(y).$$

8.^{me} Théorème.

« Dans la formule $\theta(y) = a y + b \psi(y)$, qui peut représenter toutes les racines de l'équation $F(y) = 0$, au moyen de valeurs convenables attribuées aux constantes a et b , on a toujours

$$a = \frac{\left(\beta_i + \frac{1}{\beta_i}\right) - \frac{1}{\rho^i} \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)}{\left(\rho^i - \frac{1}{\rho^i}\right)}$$

ρ désignant une racine primitive de l'équation $\rho^\mu = 1$, i un nombre entier, β , β_i deux racines de l'unité telles que l'on ait

$$\theta^2(y) = \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) \theta(y) - y, \quad (\theta \rho^i)^2 y = \left(\beta_i + \frac{1}{\beta_i}\right) (\theta \rho^i) y - y. \quad »$$

Démonstration. L'équation $\theta(y) = a y + b \psi(y)$ est encore vérifiée quand on y remplace la racine y , par la racine $\rho^i y$. On a donc

$$\theta(\rho^i y) = a \cdot \rho^i y + b \psi(\rho^i y) = a \cdot \rho^i y + \frac{b}{\rho^i} \psi(y).$$

Cette équation doit être vérifiée par toutes les racines de l'équation irréductible $F(y) = 0$; nous pouvons donc remplacer y par $\theta \rho^i y$, ce qui donne

$$(\theta \rho^i)^2 (y) = a \rho^i \cdot (\theta \rho^i) y + \frac{b}{\rho^i} \psi(\theta \rho^i y) = \left(\beta_i + \frac{1}{\beta_i}\right) (\theta \rho^i) y - y$$

En faisant la même substitution dans la première équation, on a

$$\theta^2(\rho^i y) = a \cdot (\theta \rho^i) y + b \cdot \psi(\theta \rho^i y) = \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) (\theta \rho^i) y - \rho^i y.$$

En éliminant $\psi(\theta \rho^i y)$ entre ces deux équations, on trouve

$$a (\rho^{2i} - 1) \cdot (\theta \rho^i) y = \left[\rho^i \left(\beta_i + \frac{1}{\beta_i}\right) - \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) \right] \cdot (\theta \rho^i) y$$

$$d'où \quad a = \frac{\left(\beta_i + \frac{1}{\beta_i}\right) - \frac{1}{\rho^i} \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)}{\left(\rho^i - \frac{1}{\rho^i}\right)}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque 1^{re} Nous supposons que, parmi les équations irréductibles du degré

minimum n , dont les racines vérifient l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = P \cdot y$, l'équation $F(y) = 0$ est celle dans laquelle le plus grand commun diviseur μ des exposants de y est le plus grand possible. De cette hypothèse et du 6.^{me} théorème, nous concluons, que, si $\theta(y)$ désigne une racine quelconque de l'équation $F(y) = 0$, distincte de y , le nombre μ' des termes distincts de la suite $y, \theta(y), \theta^2(y)$ etc. ne pourra jamais surpasser μ .

2° Si l'équation $F(y) = 0$ a une racine $\varphi(y)$ dont le rapport avec y ne soit pas constant, et que le nombre des termes distincts de la suite $y, \varphi(y), \varphi^2(y) \dots$ soit égal à m , on peut supposer dans la valeur précédente de a , que la racine de l'unité β appartient à un exposant m_0 égal à un diviseur quelconque de m ; car il suffit pour cela de prendre $\theta(y) = \varphi^{\frac{m}{m_0}}(y)$, d'où $\theta^{m_0}(y) = \varphi^m(y) = y$.

9.^{me} Théorème.

« $\psi(y)$ conservant la même signification qu'au théorème 7.^{me} supposons que dans la fonction $\varphi(y) = A y + B \cdot \psi(y)$ les deux constantes A et B soient différentes de 0. Si on égale successivement y à toutes les racines de l'équation $F(y) = 0$, le nombre des valeurs de cette fonction $\varphi(y)$, qui n'ont de rapport constant ni entre elles, ni avec y ou $\psi(y)$, est toujours multiple de $\frac{\mu}{2}$ ou de μ , suivant que μ est pair ou impair. »

Démonstration. Soit ρ une racine primitive de l'équation $\rho^\mu = 1$, et désignons par μ' le nombre $\frac{\mu}{2}$ ou le nombre μ , suivant que μ est pair ou impair.

D'abord les μ' valeurs suivantes de $\varphi(y)$

$$\varphi(y), \varphi(\rho y), \varphi(\rho^2 y), \dots, \varphi(\rho^{\mu'-1} y), \quad (1)$$

n'auront aucun rapport constant ni entre elles, ni avec y ni avec $\psi(y)$. Car on a

$$\varphi(\rho^i y) = A \rho^i y + B \rho^i \cdot \psi(y);$$

or, quelle que soit la valeur de i , comme A et B sont différents de zéro, $\varphi(\rho^i y)$ ne peut avoir de rapport constant ni avec y , ni avec $\psi(y)$.

D'ailleurs, si l'on supposait $\varphi(\rho^i y) = c \varphi(\rho^{ii} y)$, c désignant une constante, on devrait avoir

$$A \rho^i \cdot y + \frac{B}{\rho^i} \psi(y) = c A \rho^{ii} y + \frac{c B}{\rho^i} \psi(y);$$

et par conséquent

$$A \rho^i = c A \cdot \rho^{ii}, \quad B \rho^i = c B \rho^i$$

On devrait donc avoir $\rho^{i-ii} = \rho^{ii-i}$ ou $\rho^{2(i-ii)} = 1$; ce qui est impossible, puisque

nous supposons i et i' différents l'un de l'autre et inférieurs à μ' . Donc les termes de la suite (I) n'ont pas entre eux de rapport constant. Nous avons donc μ' valeurs de $\varphi(y)$ satisfaisant aux conditions énoncées, et, s'il n'en existe pas d'autre, notre assertion est démontrée.

S'il y a une autre valeur de $\varphi(y)$, qui ne soit d'aucune des trois formes $c.y$, $c\psi(y)$, $c\varphi(\rho^i y)$, (c , désignant une constante), soit $\varphi(\theta y) = \varphi_1(y)$ cette valeur. On aura

$$\varphi_1(y) = A \theta(y) + B \psi[\theta(y)].$$

Comme $\theta(y)$ et $\psi(\theta y)$ sont de la forme $ay + b\psi(y)$, a , et b désignant deux constantes, $\varphi_1(y)$ sera de la même forme, et l'on pourra poser

$$\varphi_1(y) = A_1 y + B_1 \psi(y).$$

Or les μ' valeurs suivantes

$$\varphi_1(y), \varphi_1(\rho y), \varphi_1(\rho^2 y), \dots, \varphi_1(\rho^{\mu'-1} y) \quad (\text{II})$$

n'ont de rapport constant, ni entre elles deux à deux, ni avec y ou avec $\psi(y)$; (la démonstration est la même que pour les termes de la suite (I)). Elles n'ont pas non plus de rapport constant avec les termes de la suite (I): car si on avait

$$\varphi_1(\rho^l y) = c \varphi(\rho^l y)$$

en remplaçant dans cette équation y par $\rho^{-l} y$ et posant $l' - l = i$, on aurait $\varphi_1(y) = c \varphi(\rho^i y)$, contrairement à l'hypothèse. Ainsi les valeurs de $\varphi(y)$ renfermées dans les deux suites (I), (II) satisfont aux conditions énoncées, et s'il n'y en a pas d'autre, notre théorème est démontré.

En continuant ainsi, on voit que les valeurs de $\varphi(y)$ qui n'ont aucun rapport constant, ni entre elles deux à deux, ni avec y ou $\psi(y)$, peuvent se distribuer en un certain nombre k de suites semblables aux suites (I) et (II), de telle sorte que le nombre de ces valeurs sera toujours un multiple de μ' égal à $k \times \mu'$; ce nombre sera donc toujours multiple de $\frac{\mu}{2}$ ou de μ , suivant que μ sera pair ou impair.

10.^{me} Théorème.

« Soit $\theta(y)$ une racine de l'équation $F(y) = 0$; soit μ le plus grand commun diviseur des exposants de y dans $F(y)$; soit enfin m le plus petit nombre entier qui satisfasse à l'équation $\theta^m(y) = y$. Le nombre m ne peut avoir avec μ un facteur commun autre que 2 ou 4 sans être un diviseur de μ . »

Démonstration. Soit

$$\theta(y) = a y + b \psi(y).$$

Je dis que si m n'est égal ni à 4, ni à un diviseur de μ , aucune des constantes a et b n'est nulle.

1° b n'est pas nul. Car celles des racines de l'équation $F(y) = 0$, qui ont un rapport constant avec y , sont de la forme $\rho^i y$. On aurait donc $\theta^\mu(y) = \rho^{i\mu} y = y$, et par conséquent le plus petit nombre entier qui satisfasse à l'équation $\theta^m(y) = y$, devrait être diviseur de μ .

2° a n'est pas nul. Si a était nul, la formule obtenue au 8.^{me} théorème donnerait

$$\left(\beta_i + \frac{1}{\beta_i}\right) = \rho^i \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right);$$

or ρ^i étant imaginaire, cette équation ne peut subsister qu'autant que l'on a

$$\beta_1 + \frac{1}{\beta_1} = 0, \quad \beta + \frac{1}{\beta} = 0 \quad \text{d'où} \quad \beta^4 = 1.$$

On aurait donc $\theta^4(y) = y$, et par conséquent $m = 4$ contrairement à l'hypothèse.

Nous pourrions donc appliquer ici le théorème précédent en prenant $\varphi(y) = \theta(y)$. Ainsi en substituant successivement dans $\theta(y)$ toutes les racines de l'équation $F(y) = 0$, le nombre des valeurs de $\theta(y)$ qui n'auront aucun rapport constant ni entre elles deux à deux, ni avec y ou avec $\psi(y)$ sera $\mu' \times k$, μ' désignant $\frac{\mu}{2}$ ou μ , suivant que μ est pair ou impair. Le nombre des valeurs distinctes de $\theta(y)$, et par conséquent le degré n de l'équation $F(y) = 0$, sera de l'une des deux formes suivantes

$$\mu(k\mu' + 2), \quad \mu(k\mu' + 1),$$

savoir, de la première quand l'équation $F(y) = 0$ admet une racine de la forme $c\psi(y)$, et de la seconde dans le cas contraire.

Soit β la racine primitive de l'équation $\beta^m = 1$, pour la quelle on a (5.^{me} th.).

$$\theta^2(y) = \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) \theta(y) - y.$$

Posons $z = \varphi(y) = [\theta(y) - \beta y]$, et formons l'équation $T(z) = 0$ dont les racines sont les n valeurs que prend la fonction $\varphi(y)$, quand on égale successivement y à chacune des racines de l'équation $F(y) = 0$. L'équation ainsi obtenue sera du degré n , et aucune de ses racines n'aura un rapport constant avec y ou avec $\psi(y)$, à moins que m ne soit un diviseur de μ . En effet, si l'on avait $\varphi(\theta_1 y) = cy$ ou $c\psi(y)$ en remplaçant dans cette équation y par $\rho^i y$, on obtiendrait $\varphi(\theta_1 \rho^i y) = c\rho^i y$ ou $c\rho^{-i}(y)$; on aurait donc $\varphi(\theta_1 \rho^i y) = \rho^{\pm i} \cdot \varphi(\theta_1 y)$. L'équation $T(z) = 0$ serait donc vérifiée par les μ valeurs représentées par la formule $\rho^i \cdot \varphi(\theta_1 y)$; les exposants de

z dans $T(z)$ seraient donc tous multiples de μ . D'ailleurs ils sont déjà multiple de m , puisque l'on a

$$[\theta^2(y) - \beta \cdot \theta(y)] = \frac{1}{\beta} \cdot [\theta(y) - \beta y] \quad \text{c. à d.} \quad \varphi(\theta y) = \frac{1}{\beta} \cdot \varphi(y).$$

Les exposants de z dans $T(z)$ seraient donc divisibles par le plus petit multiple commun de μ et de m , et par conséquent par un nombre supérieur à μ , ce qui est impossible (v. 8.^{me} théorème, Remarque 1.^o). Le nombre des valeurs de $\varphi(y)$ qui n'ont entre elles aucun rapport constant sera donc un multiple de μ' (9.^{me} théorème); et comme chacune de ces valeurs fournit pour $\varphi(y)$ les m valeurs comprises dans la formule $\beta^i \cdot \varphi(y)$, le nombre total des valeurs de $z = \varphi(y)$ sera égal à un multiple de μ' multiplié par m . Ce nombre z sera donc $n = m \times \mu' \times p$, p désignant un nombre entier. On aura donc l'une des deux équations

$$m \times \mu' \cdot p = \mu (k \mu' + 2) \quad \text{ou} \quad m \cdot \mu' \cdot p = \mu (k \mu' + 1).$$

1.^o Soit μ impair. On aura $\mu' = \mu$, et les deux équations précédentes donneront

$$m \cdot p = k \mu + 2 \quad \text{ou} \quad m \cdot p = k \mu + 1;$$

dans l'un et l'autre cas m et μ seront premiers entre eux.

2.^o Soit μ pair. On aura $\mu' = \frac{\mu}{2}$ et les deux équations précédentes donneront

$$m \cdot p = k \mu + 4 \quad \text{ou} \quad m p = k \mu + 2.$$

Si donc m n'est pas un diviseur de μ , ainsi que nous l'avons supposé pour parvenir aux équations précédentes, les nombres m et μ ne pourront avoir aucun diviseur commun autre que 2 ou 4. C. Q. F. D.

11.^{me} Théorème.

« Soit $\theta(y)$ une racine de l'équation $F(y) = 0$; soit toujours μ le plus grand commun diviseur des exposants de y dans $F(y)$, et désignons par m_0 le plus petit nombre entier qui satisfasse à l'équation $\theta^{m_0}(y) = y$. Si m_0 n'est pas égal à l'un des nombres 2, 3, 4 ou 6, il sera égal à un diviseur de μ . »

Démonstration. En posant $\theta(y) = a y + b \psi(y)$, nous avons obtenu (8.^{me} th.)

$$a = \frac{\left(\beta_i + \frac{1}{\beta_i}\right) - \frac{1}{\rho^i} \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)}{\left(\rho^i - \frac{1}{\rho^i}\right)} \quad (E)$$

i désignant un nombre entier quelconque : ρ et β sont respectivement des racines primitives des équations $\rho^\mu = 1$; $\beta^{m_0} = 1$; β_i est une racine de l'unité qui vérifie l'équation

$$(\theta \rho^i)^2 y = \left(\beta_i + \frac{1}{\beta_i} \right) (\theta \rho^i) y - y.$$

Egalons successivement le nombre i à $+1$ et à -1 . En comparant les deux valeurs de a nous aurons;

$$\left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) = \left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1} \right) + \left(\beta_{-1} + \frac{1}{\beta_{-1}} \right).$$

Soient m_1 et m_{-1} les plus petits nombres entiers qui vérifient respectivement les équations $\beta_1^{m_1} = 1$, $\beta_{-1}^{m_{-1}} = 1$. Désignons par m le plus petit commun multiple des quatre nombres μ , m_0 , m_1 , m_{-1} , et par x une racine primitive de l'équation $x^m = 1$. L'équation précédente pourra s'écrire sous la forme suivante

$$(x^r + x^{-r})(x^{tn} + x^{-tn}) = x^{tnl} + x^{-tnl} + x^{t'n''} + x^{-t'n''}. \quad (a)$$

en posant $r = \frac{m}{\mu}$, $n = \frac{m}{m_0}$, $n' = \frac{m}{m_1}$, $n'' = \frac{m}{m_{-1}}$, et désignant par t , t' , t'' des nombres premiers avec m .

Comme l'équation dont les racines sont les racines primitives de l'équation $x^m = 1$ est irréductible, l'équation (a) ne peut être vérifiée par une racine x de cette équation, sans l'être aussi par toutes les autres. On pourra donc remplacer dans l'équation (a) x par x^l , l désignant un nombre entier quelconque premier avec m . Or, si m_0 n'a aucune des valeurs exceptées 2, 3, 4 ou 6, ou pourra toujours déterminer deux nombres l , l' premiers avec m de la forme, $l = 1 + \theta \cdot \mu$, $l' = 1 + \eta \frac{4m}{a \mu}$.

(a désigne le plus petit des nombres 1, 2, 4 pour lequel $\frac{a \mu}{4} =$ un nombre entier),

et tels qu'aucun des deux nombres $(l+1)$, $(l-1)$ ne soit divisible par $\frac{4m}{a \mu}$, et qu'aucun des deux nombres $(l'+1)$, $(l'-1)$ ne soit divisible par μ . (voyez la note à la fin du mémoire). Supposons donc que nous ayons déterminé deux nombres l , l' satisfaisant à ces conditions, et après avoir remplacé x par x^l dans l'équation (a) retranchons du résultat cette même équation. Le premier membre de l'équation obtenue sera

$$(x^r + x^{-r}) [(x^{t'n} + x^{-t'n}) - (x^{tn} + x^{-tn})];$$

dans cette nouvelle équation remplaçons x par $x^{l'}$, et, remarquant que $x^{l'n} = x^n$, retranchons cette même équation du résultat ainsi obtenu; le premier membre sera

$$[(x^{l'r} + x^{-l'r}) - (x^r + x^{-r})] [x^{t'n} + x^{-t'n}] - (x^{tn} + x^{-tn}),$$

et je dis que le second membre est nul. En effet, chacun des deux nombres m_1 ,

m_{-1} étant ou un diviseur de μ , ou un nombre premier avec $\frac{a\mu}{4}$ chacun des deux quotiens $\frac{m}{m_1} = n'$, $\frac{m}{m_{-1}} = n''$ est, ou multiple de $\frac{m}{\mu}$, ou multiple de $\frac{a\mu}{4}$. La première soustraction fait disparaître du second membre les puissances de x dont l'exposant est multiple de $\frac{m}{\mu}$, la seconde soustraction en fait disparaître les puissances de x dont l'exposant est multiple de $a\frac{\mu}{4}$; et par conséquent le réduit à zéro. On devrait donc vérifier l'une des deux équations $x^{lr} + x^{-lr} = x^r + x^{-r}$, ou $x^{ln} + x^{-ln} = x^n + x^{-n}$. Pour vérifier la première, il faudrait que l'un des deux nombres $l' + 1$, $l' - 1$ fût divisible par $\frac{m}{r} = \mu$, et, pour vérifier la seconde, il faudrait que l'un des deux nombres $l + 1$, $l - 1$ fût divisible par $\frac{4m}{a\mu}$; or les nombres l , l' ont été choisis de manière à rendre ces divisions impossibles. L'équation (a) est donc elle-même impossible. Donc si m_0 désigne le plus petit nombre entier qui satisfasse à l'équation $\theta^{m_0}(y) = y$, m_0 ne pourra pas avoir une valeur différente de 2, 3, 4 ou 6, sans être un diviseur de μ . C. Q. F. D.

12.^{me} Théorème.

« Si l'équation $F(y) = 0$ a une racine $\theta(y)$ dont le rapport avec y ne soit pas constant; et que μ ne soit égal à aucun des trois nombres 6, 8, ou 10 on aura nécessairement $\theta^2(y) = -y$. »

Démonstration. Soit $\theta(y)$ celle des racines de l'équation $F(y) = 0$ pour laquelle le plus petit nombre entier qui satisfasse à l'équation $\theta^m(y) = y$ ait la plus grande valeur possible. Je démontrerai d'abord que, si m n'est pas égal à 4, c. à d. si l'on n'a pas $\theta^2(y) = -y$, le nombre m doit être égal à μ ; et ensuite que le nombre μ ne peut avoir que l'une des trois valeurs 6, 8 ou 10.

Dans l'équation obtenue plus haut (théorème 11).

$$\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right) + \left(\beta_{-1} + \frac{1}{\beta_{-1}}\right)$$

les exposants m_1 , m_{-1} auxquels appartiennent les racines de l'unité β_1 , β_{-1} , ne pourront pas, par suite de l'hypothèse faite, surpasser le nombre m auquel appartient β . De plus comme on a

$$\theta^{2t}(y) = \left(\beta^t + \frac{1}{\beta^t}\right)\theta^t(y) - y$$

on pourra supposer que β désigne celle des racines primitives de l'équation $\beta^m = 1$, pour laquelle on a $\beta + \frac{1}{\beta} = 2 \cos \frac{2\pi}{m}$; car si cela n'était pas, on remplacerait $\theta(y)$ par $\theta'(y)$, le nombre l étant choisi de telle sorte que la condition précédent fût remplie. De même on supposera qu'on ait choisi celle des racines primitives de l'équation $\rho^\mu = 1$, qui vérifie la relation $\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) = 2 \cos \frac{2\pi}{\mu}$. Dès lors en désignant par k et k' deux nombres entiers tels que les deux fractions $\frac{2k}{m_1}$, $\frac{2k'}{m_{-1}}$ soient inférieures à l'unité, on pourra écrire l'équation précédente comme il suit:

$$2 \cos \frac{2\pi}{\mu} \cos \frac{2\pi}{m} = \cos \frac{2k\pi}{m_1} + \cos \frac{2k'\pi}{m_{-1}}, \quad (a)$$

ou encore

$$\cos \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{\mu} \right) 2\pi + \cos \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\mu} \right) 2\pi = \cos \frac{2k\pi}{m_1} + \cos \frac{2k'\pi}{m_{-1}}. \quad (a)$$

1° Pour que cette équation soit possible, il faut que chacune des deux fractions $\frac{k}{m_1}$, $\frac{k'}{m_{-1}}$ soit inférieure à $\frac{1}{m} + \frac{1}{\mu} < \frac{2}{m}$; car si on avait $\frac{k}{m_1} =$ ou $> \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{\mu} \right)$ on aurait $\cos \frac{2k\pi}{m_1} =$ ou $< \cos \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{\mu} \right) 2\pi$, et comme on a nécessairement $\cos \frac{2k'\pi}{m_{-1}} < \cos \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\mu} \right) 2\pi$, le second membre de l'égalité précédente serait inférieur au premier membre. Comme m_1 et m_{-1} ne peuvent pas surpasser le nombre m , les deux inégalités $\frac{k}{m_1} < \frac{2}{m}$, $\frac{k'}{m_{-1}} < \frac{2}{m}$, exigent que k et k' soient inférieurs à 2, on a donc $k = k' = 1$. De plus le 11.^{me} théorème nous apprend que si l'un des nombres m , m_1 , m_{-1} , n'est pas diviseur de μ il ne peut avoir que l'une des trois valeurs 3, 4 ou 6.

2° Cela posé, nous allons démontrer que si m est supérieur à 4, il doit être égal à μ . D'abord si μ est pair on ne peut pas supposer m impair: car au lieu de la racine $\theta(y)$, considérons la racine $\varphi(y) = [(-1)\theta](y)$; on aura

$$\varphi^m(y) = (-1)^m \cdot \theta^m(y) = (-1)^m \cdot y;$$

et si m est impair on aurait $\varphi^m(y) = -y$; l'équation $F(y) = 0$, aurait donc une racine $\varphi(y)$ qui appartiendrait à une période dont l'indice serait $2m > m$, contrairement à l'hypothèse. Quelle que soit la valeur de μ supérieure à 6, on ne pourra pas supposer que m ne soit pas diviseur de μ ; car alors chacun des trois nombres

m, m_1, m_{-1} , serait égal à l'un des nombres 3, 4 ou 6, et comme nous supposons que m n'est pas égal à 4, on déduirait de la première équation (a) $\text{Cos} \frac{2\pi}{\mu} =$ un nombre rationnel, ce qui est impossible.

Soit donc $m = \frac{\mu}{a}$. On aura $\frac{1}{m} + \frac{1}{\mu} = \frac{a+1}{a} \cdot \frac{1}{m}$, et par conséquent les inégalités obtenues plus haut (1°) deviendront

$$\frac{1}{m_1} < \frac{a+1}{a} \cdot \frac{1}{m}, \quad \frac{1}{m_{-1}} < \frac{a+1}{a} \cdot \frac{1}{m}.$$

Or cela est impossible si l'on suppose que l'un des nombres m_1, m_{-1} soit un diviseur de μ autre que m . Soit en effet, $m_1 = \frac{\mu}{b} = \frac{am}{b}$. Comme m_1 est au plus égal à m , si b diffère de a , il sera au moins égal à $(a+1)$, et par conséquent, la fraction $\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{m}$ ou $\frac{1}{m_1}$ sera au moins égale à $\frac{a+1}{a} \cdot \frac{1}{m}$, et l'inégalité

$$\frac{1}{m_1} < \frac{a+1}{a} \cdot \frac{1}{m}$$

sera impossible. Si donc m_1 n'est pas égal à m , il ne pourra avoir que l'une des trois valeurs 3, 4 ou μ .

La première équation donnerait alors pour $\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$ une valeur égale à une fonction rationnelle de $\left(\rho^a + \frac{1}{\rho^a}\right)$. Or cela est impossible :

En effet, soit $\mu = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$, et posons $M = \mu \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots$; ρ désignant une racine primitive de l'équation $\rho^\mu = 1$, $\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$ sera racine d'une équation irréductible du degré $\frac{M}{2}$; tandis que $\left(\rho^a + \frac{1}{\rho^a}\right)$ sera racine d'une équation irréductible du degré $\frac{M}{2a}$ excepté le seul cas où l'on aurait en même temps

$a = 2, \alpha = 1$, mais ce cas d'exception doit être écarté, puisque $\frac{\mu}{a}$ et μ doivent être en même temps pairs ou impairs. Or toute fonction rationnelle d'une racine d'une équation de degré n peut être déterminée par une équation du même degré. Nous serions donc conduits à cette absurdité qu'une équation irréductible du degré

$\frac{M}{2}$ pourrait avoir une racine commune avec une équation de même forme et d'un degré moindre $\frac{M}{2a}$. On doit donc avoir $a = 1$ et $m = \mu$.

3° L'équation (b) deviendra donc

$$\cos \frac{4\pi}{\mu} + 1 = \cos \frac{2\pi}{m_1} + \cos \frac{2\pi}{m_{-1}},$$

et l'on aura $m_1 > \frac{\mu}{2}$, $m_{-1} > \frac{\mu}{2}$. D'abord si les deux nombres m_1 et m_{-1} sont des diviseurs de μ , pour vérifier les inégalités précédentes, il faut que l'on ait

$$m_1 = m_{-1} = \mu.$$

Mais alors l'équation précédente est impossible; car elle devient

$$\cos \frac{4\pi}{\mu} + 1 = 2 \cos \frac{2\pi}{\mu};$$

et comme

$$\cos \frac{2\pi}{\mu} + 1 = \cos \frac{2\pi}{\mu} \cdot \cos \frac{2\pi}{\mu};$$

on conclurait que $\cos \frac{2\pi}{\mu} = 1$, ce qui est impossible. Il faut donc que l'un des nombres m_1 , m_{-1} ne soit pas diviseur de μ . Dès lors il ne pourra pas être supérieur à 6, et pour que l'inégalité $m_1 > \frac{\mu}{2}$ soit vérifiée, il faudra que μ soit inférieur à 12.

De plus μ doit être un nombre pair; car si μ est impair, m , m_1 et m_{-1} le seront aussi. Si $\mu = 3$, les quatre nombres m , m_1 , m_{-1} et μ sont égaux, et nous retombons ainsi dans le cas que nous venons de démontrer impossible. Si μ a une valeur impaire autre que 3, on aura $m = \mu$; dans la première équation on pourra poser $\beta = \rho$, et comme μ est impair on pourra choisir pour valeur de ρ celle des racines de l'équation $\rho^\mu = 1$ pour la quelle on a

$$\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) = 2 \cos \frac{\mu - 1}{2} \frac{2\pi}{\mu};$$

ainsi, au lieu de l'équation (a) on aura

$$\cos \frac{2\pi}{\mu} + 1 = \cos \frac{2k\pi}{m_1} + \cos \frac{2k'\pi}{m_{-1}}$$

k et k' étant deux nombres entiers choisis de telle sorte que les fractions $\frac{2k}{m_1}$, $\frac{2k'}{m_{-1}}$ soient inférieures à l'unité. Or quelle que soit cette valeur entière de k ou de k' ;

aucune des deux fractions $\frac{2k}{m_1}$, $\frac{2k'}{m_{-1}}$ ne peut devenir inférieure $\frac{2}{\mu}$; le plus grand des deux cosinus du second membre sera au plus égal à $\cos \frac{2\pi}{\mu}$; et comme l'autre est nécessairement inférieur à l'unité cette équation est impossible.

Ainsi le nombre μ ne peut avoir que des valeurs paires inférieures à 12, c. à d. qu'il ne peut avoir que l'une des 4 valeurs 4, 6, 8 ou 10. D'ailleurs si $\mu = 4$, l'équation $F(y)$ ne peut avoir aucune racine qui ne satisfasse à l'équation $\theta^4(y) = y$.

Donc si l'équation $F(y) = 0$ a une racine $\theta(y)$ dont le rapport avec y ne soit pas constant, et qui ne vérifie pas l'équation $\theta^2(y) = -y$, le nombre μ ne peut avoir que l'une des trois valeurs 6, 8, ou 10. C. Q. F. D.

13.^{me} Théorème.

« Si $\mu = 6$ et que l'équation $F(y) = 0$ ait une racine $\theta(y)$, qui n'ait pas avec y un rapport constant, et pour laquelle on n'ait pas $\theta^2(y) = -y$, la fonction $\left(\frac{1}{y} \frac{dy}{dx}\right)$ est déterminée par une équation algébrique du quatrième degré.

Démonstration. $\theta(y)$ n'ayant pas avec y un rapport constant, on pourra écrire $\theta(y) = a y + b \psi(y)$, et la constante a sera déterminée (8.^{me} théorème) par la formule

$$a = \frac{\left(\beta^i + \frac{1}{\beta^i}\right) - \frac{1}{\rho^i} \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)}{\left(\rho^i - \frac{1}{\rho^i}\right)}. \quad (E)$$

Si dans cette formule nous faisons successivement $i = 1$, $i = -1$, la comparaison des valeurs de a donnera en remarquant que $\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) = 1$,

$$\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right) + \left(\beta_{-1} + \frac{1}{\beta_{-1}}\right) \quad (a)$$

β , β_1 et β_{-1} doivent vérifier l'une des deux équations $x^4 = 1$, $x^6 = 1$. Les trois termes de l'équation (a) ne pourront avoir que l'une des trois valeurs 0, + 1, ou - 1.

1° Nombre des valeurs de a , en supposant que l'on n'ait pas $\theta(y) = ay$.

Pour que l'équation (a) soit possible, il faut, ou bien que les trois binômes soient nuls, ou bien que l'un d'eux au moins soit nul; car autrement on aurait

$$\pm 1 = \pm 1 \pm 1,$$

ce qui est impossible. Si nous supposons $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = 1$, $\left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right)$ n'aura que l'une des deux valeurs 0, + 1, et la formule (E), en y faisant $i = 1$, ne donne pour a que les deux valeurs

$$\frac{-\rho^{-1}}{\rho - \frac{1}{\rho}}, \quad \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}}.$$

Si nous supposons $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = -1$, $\left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right)$ n'aura que l'une des deux valeurs 0, - 1, et la formule (E), donnera pour valeurs correspondantes de a

$$\frac{+\rho^{-1}}{\rho - \frac{1}{\rho}}, \quad \frac{-\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}}.$$

Si enfin nous supposons $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = 0$ la constante a ne peut avoir que l'une des trois valeurs 0, $\frac{+\ 1}{\rho - \frac{1}{\rho}}$, $\frac{-1}{\rho - \frac{1}{\rho}}$. De telle sorte que, quelle que soit la racine $\theta(y)$,

dont le rapport avec y n'est pas constant, si nous posons $\theta(y) = a y + b \psi(y)$, la constante a se réduira à zéro, ou à l'une des six valeurs comprises dans la formule

$$\frac{\rho^i}{\rho - \frac{1}{\rho}}, \quad i \text{ désignant un entier.}$$

2°. L'équation $F(y) = 0$ n'admet pas de racine de la forme $c \psi(y)$.

Puisque, par hypothèse, cette équation admet au moins un racine qui ne vérifie pas la formule $\theta^2(y) = -y$, et qui n'a pas avec y un rapport constant, on reconnaît aisément qu'elle doit en admettre une qui vérifie l'équation $\theta^3(y) = -y$. La valeur correspondante de $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)$ sera 1, et la valeur correspondante de a sera

$$\frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}}, \quad \text{ou} \quad \frac{\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\left(\frac{1}{\rho}\right) - \left(\frac{1}{\rho}\right)};$$

d'ailleurs ρ désignant une racine primitive quelconque de l'équation $\rho^6 = 1$, et $\left(\frac{1}{\rho}\right)$ étant aussi bien que ρ racine primitive de cette équation, nous pouvons prendre

$$a = \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} ;$$

de telle sorte que nous aurons en même temps:

$$\theta^2(y) = \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \theta(y) - y \quad \text{et} \quad \theta(y) = \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} y + b \psi(y).$$

Nous considérerons la fonction $\varphi(y) = [\theta(y) - \rho y]$, et les diverses valeurs qu'elle prend quand on égale y successivement à toutes les racines de l'équation $F(y) = 0$; nous montrerons que ces diverses valeurs n'ont pas de rapport constant avec les racines de l'équation $F(y) = 0$, et que cependant quelques unes d'entre elles doivent être de la forme $c\psi(y)$. Nous concluons de là qu'aucune racine de l'équation $F(y) = 0$ ne peut être de cette même forme.

Supposons qu'en remplaçant dans $\varphi(y)$, y par $\theta(y) = a_1 y + b_1 \psi(y)$, on obtienne une valeur de la forme cy , c. à d. supposons que l'on ait

$$cy = \varphi(\theta_1 y) = \left[\frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} - \rho \right] \theta_1(y) + b \psi(\theta_1 y) = \frac{2}{\rho - \frac{1}{\rho}} \theta_1(y) + b \psi(\theta_1 y). \quad (b)$$

Nous avons d'ailleurs

$$\theta_1^2(y) = a_1 \theta_1(y) + b_1 \psi(\theta_1 y) \quad \text{et} \quad \theta_1^2(y) = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \theta_1(y) - y, \quad (c)$$

$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)$ ayant l'une des trois valeurs 0, -1, -1. En combinant les équations (b) et (c), on trouve:

$$c \cdot y = \left[\frac{2}{\rho - \frac{1}{\rho}} + \frac{b}{b_1} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} - a_1 \right) \right] \theta_1(y) - \frac{b}{b_1} y. \quad (d)$$

D'un autre côté

$$\theta(\theta_1 y) = \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} \theta_1(y) + b \psi(\theta_1 y) = \left(\frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} + \frac{b}{b_1} \left[\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) - a_1 \right] \right) \theta_1(y) - \frac{b}{b_1} y \quad (e)$$

si b_1 était nul, on aurait

$$\varphi(\theta_1 y) = \varphi(\rho^i y) = \frac{2\rho^i}{\rho - \frac{1}{\rho}} y + b\rho^{-i} \psi(y),$$

et dès lors l'équation (b) serait impossible, b_1 n'est donc pas nul. De même l'équation (d) n'est possible qu'autant qu'on annule le facteur de $\theta_1(y)$, ce qui donne

$$\frac{b}{b_1} = \frac{2}{\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\left(a_1 - \alpha - \frac{1}{\alpha}\right)}.$$

L'équation (e) deviendra

$$\theta(\theta_1 y) = \frac{\rho - 2}{\rho - \frac{1}{\rho}} \theta_1(y) - \frac{b}{b_1} y = \left[\frac{\rho - 2}{\rho - \frac{1}{\rho}} a_1 - \frac{b}{b_1} \right] y + \frac{\rho - 2}{\rho - \frac{1}{\rho}} b \psi(y).$$

$\theta \theta_1 y$ étant racine de l'équation $F(y) = 0$, et n'ayant pas avec y un rapport constant, sera de la forme

$$\theta(\theta_1 y) = \frac{\rho^i}{\rho - \frac{1}{\rho}} y + b_2 \psi(y).$$

On doit donc avoir

$$\frac{\rho - 2}{\rho - \frac{1}{\rho}} a_1 - \frac{b}{b_1} = \frac{\rho^i}{\rho - \frac{1}{\rho}}, \quad \text{d'où} \quad \frac{b}{b_1} = \frac{\rho - 2}{\rho - \frac{1}{\rho}} a_1 - \frac{\rho^i}{\rho - \frac{1}{\rho}}.$$

La comparaison de cette valeur et de la précédente nous donnera

$$2 = [(\rho - 2) a_1 - \rho^i] \left[a_1 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right] \quad (f).$$

Dans cette équation $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)$ ne peut avoir que l'une des trois valeurs

$$0, +1, -1.$$

Supposons $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) = 0$. Comme a_1 ne peut pas être nul en même temps, on

aura $a_1 = \frac{\pm \rho}{\rho - \frac{1}{\rho}}$ et l'équation (f) devient

$$2 \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)^2 = \left[\left(\rho - 2 \right) \mp \rho^i \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \right],$$

ce qui est impossible; car le module du premier membre est 6, tandis que la somme des modules des 4 termes du second membre est 5, et par conséquent le module du second membre est < 5 .

Supposons $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = 1$. La valeur correspondante de a_i sera (v. 1.^o) $\frac{l \cdot \rho^i}{\rho - \frac{1}{\rho}}$, en faisant $\pm 1 = l$. On aura

$$a_i - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{l \rho^i}{\rho - \frac{1}{\rho}} - 1 = \frac{l \rho^{-i}}{\rho - \frac{1}{\rho}},$$

et par conséquent l'équation (f) deviendra

$$2 \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2 = l \cdot \rho^{-i} \left[\left(\rho - 2\right) l \cdot \rho^{-i} - \rho^i \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \right];$$

le module du premier nombre est 6, la somme des modules des termes du second membre est 5; cette équation est donc impossible.

Supposons enfin $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = -1$, ce qui donne pour a_i l'une des deux valeurs $\frac{-l \rho^i}{\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)}$; l'équation (f) est impossible pour la même raison que dans le dernier cas.

Donc dans tous les cas l'équation (f) est impossible, et par conséquent, il est impossible que parmi les diverses valeurs que prend $\varphi(y)$ quand on y remplace successivement y par les diverses racines de l'équation $F(y) = 0$, il y en ait une de la forme $c y$. Si en même temps aucune de ces valeurs de $\varphi(y)$ n'était de la forme $c \psi(y)$, on conclurait du 9.^{me} théorème que le nombre des valeurs de $\varphi(y)$ qui n'ont pas entre elles deux à deux de rapport constant est un multiple de 3, et que le nombre total des valeurs de $\varphi(y)$, c. à d. le degré n de $F(y)$, est un multiple de 6×3 . Mais d'après le 10.^{me} théorème, ce nombre n doit être de l'une des deux formes $6(3k + 2)$ ou $6(3k + 1)$; on devrait donc avoir $6 \times 3 \times m = 6(3k + 2)$ ou $= 6(3k + 1)$; ce qui est impossible. Il est donc nécessaire que parmi les valeurs considérées de $\varphi(y)$ il y en ait quelqu'une de la forme $c \psi(y)$. On aura donc $\varphi[\theta_i(y)] = c \psi(y)$. Cette équation subsistera encore quand on remplacera y par toutes les autres racines de l'équation $F(y) = 0$. Or si le second membre $c \psi(y)$ était égal à une racine de la même équation $F(y) = 0$, à un facteur constant près, les diverses valeurs de $\psi(y)$ seraient, à ce facteur constant près, les diverses racines de $F(y) = 0$, de telle sorte qu'on aurait $\varphi(\theta_i y) = c y$, ce qui a été démontré impossible. L'équation $F(y) = 0$ ne peut donc pas avoir des racines de la forme $c \psi(y)$, et par conséquent (11.^{me} théorème) le degré n de $F(y)$ sera donné par la formule

$$n = 6(3m + 1). \quad (g)$$

3°. Le degré n de $F(y)$ ne peut pas être supérieur à 48.

Considérons comme dans le cas précédent celle des racines de l'équation $F(y) = 0$, qui vérifie les deux conditions

$$\theta(y) = \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} y + b \psi(y) \quad \text{et} \quad \theta^2(y) = \theta(y) - y.$$

Soit $\theta_1(y) = a_1 y + b_1 \psi(y)$ l'une quelconque des racines de la même équation, dont le rapport avec y n'est pas constant $\theta_1 \theta(y)$ sera aussi une racine de la même équation, et par conséquent on pourra poser, $\theta_1 \theta(y) = a_2 y + b_2 \psi(y)$. D'ailleurs on a

$$\theta_1(\theta y) = a_1 \theta(y) + b_1 \psi(\theta y) \quad \text{et} \quad \theta^2(y) = \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} \theta(y) + b \psi(\theta y) = \theta(y) - y$$

Donc.

$$\begin{aligned} a_2 y + b_2 \psi(y) &= a_1 \theta(y) - \frac{b_1}{b} \left(\frac{\frac{1}{\rho}}{\rho - \frac{1}{\rho}} \right) \theta y - \frac{b_1}{b} y \\ &= \left\{ \frac{a_1 \rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} - \frac{b_1}{b} \frac{1}{\left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)^2} - \frac{b_1}{b} \right\} y + \left\{ a_1 b - b_1 \frac{\frac{1}{\rho}}{\rho - \frac{1}{\rho}} \right\} \psi(y). \end{aligned}$$

On aura donc

$$\frac{a_1 \rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} - \frac{b_1}{b} \frac{1}{\left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)^2} - \frac{b_1}{b} = a_2 \quad \left[a_1 - \frac{b_1}{b} \frac{\frac{1}{\rho}}{\rho - \frac{1}{\rho}} \right] b = b_2$$

Or, si b_2 n'est pas nul, a_2 ne peut avoir que l'une des six valeurs comprises dans la formule $\frac{\rho^i}{\rho - \frac{1}{\rho}}$. Donc, si b_2 n'est pas nul, à une même valeur de a_1 , il ne peut

correspondre que six valeurs de b_1 . D'ailleurs, si $b_2 = 0$, b_1 n'a qu'une seule valeur $b \rho \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) a_1$. Donc dans tous les cas une même valeur de a_1 ne peut répondre qu'à 7 valeurs différentes de b_1 . Comme d'ailleurs a_1 ne peut avoir que six valeurs, le nombre des racines de l'équation $F(y) = 0$, qui n'ont pas avec y un rapport constant ne pourra pas surpasser le produit 6×7 . Ajoutez les 6. racines comprises dans la formule $\rho^i y$, le nombre total des racines de l'équation $F(y) = 0$ ne pourra pas surpasser 6×8 .

4°. Nous avons vu (1°) que l'équation (a) n'est possible qu'autant que l'une des racines de l'unité $\beta, \beta_1, \beta_{-1}$, vérifie l'équation $x^2 = -1$, à laquelle correspond $\theta^2(y) = -y$. Le degré n de $F(y)$ doit donc être divisible par 4. D'ailleurs (2°) ce degré est donné par la formule $n = 6(3m + 1)$ et doit être (3°) inférieur à 6×8 . Pour satisfaire à la première condition, il faut que $3m + 1$ soit pair et par conséquent m impair. On aura donc, en faisant successivement $m = 1, 3, 5, \dots$

$$n = 6 \times 4, \quad n = 6 \times 10, \quad n = 6 \times 16.$$

Mais la première seule de ces valeurs est inférieure à 6×8 . On a donc

$$n = 6 \times 4 = 24.$$

La fonction $t = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$, ne pourra donc avoir que quatre valeurs distinctes, et par conséquent elle sera déterminée par une équation du quatrième degré. C.Q.F.D.

14.^{me} Théorème.

« Soit $\mu = 8$. Si $\theta(y)$ désigne une racine de l'équation $F(y) = 0$ dont le rapport avec y ne soit pas constant, on aura $\theta^2(y) = -y$. »

Démonstration. Soit $\theta(y) = ay + b\psi(y)$, l'une quelconque des racines de l'équation $F(y) = 0$, dont le rapport avec y n'est pas constant. Si l'on n'a pas $\theta^2(y) = -y$, la valeur de $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)$ dans la formule (E) sera différente de 0, (8.^{me} th.) la constante a ne peut pas être nulle. D'ailleurs on aura nécessairement l'une des équations suivantes

$$\theta^4(y) = \pm y, \quad \theta^3(y) = \pm y$$

Cherchons quelles peuvent être les diverses valeurs de a dans ces différents cas.

Faisons $i = 1$ dans la formule (E), ce qui nous donnera

$$a = \frac{\left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right) - \frac{1}{\rho} \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)}{\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)} \quad (E)$$

Nous obtiendrions aussi comme au théorème 11.^{me} la formule

$$\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right) + \left(\beta_{-1} + \frac{1}{\beta_{-1}}\right) \quad (a)$$

Et comme nous pourrions partir de la racine $(\theta\rho)y$, nous obtiendrions de la même manière la formule

$$\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right) = \left(\beta_2 + \frac{1}{\beta_2}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) \quad (b)$$

ρ désignant une racine primitive de l'équation $x^8 = 1$, et β_i une racine de l'unité qui vérifie la formule

$$(\theta \rho^i)^2 (y) = \left(\beta_i + \frac{1}{\beta_i}\right) (\theta \rho^i) (y) - y.$$

nous savons que dans le cas présent β_i doit être racine ou de l'équation $x^8 = 1$ ou de l'équation $x^6 = 1$. La racine ρ étant à notre choix, nous prendrons

$$\rho + \frac{1}{\rho} = \sqrt{2}.$$

1° $\theta^4(y) = -y$. La valeur correspondante de $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)$ sera $\pm \sqrt{2}$. L'équation (a) deviendra donc

$$\pm 2 = \left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right) + \left(\beta_{-1} + \frac{1}{\beta_{-1}}\right),$$

ce qui exige qu'on ait

$$\left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right) = \left(\beta_{-1} + \frac{1}{\beta_{-1}}\right) = \pm 1,$$

le signe étant le même que dans la formule

$$\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \pm \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right).$$

La formule (E) donnera pour α , les deux valeurs

$$\frac{\pm \rho^2}{\rho - \frac{1}{\rho}}.$$

2° $\theta^2(y) = -y$. On aura $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = 0$. L'équation (a) donne

$$\left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right) = -\left(\beta_{-1} + \frac{1}{\beta_{-1}}\right).$$

Mais on voit par l'équation (b) que $\left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right)$ ne peut pas avoir l'une des deux valeurs $\pm \sqrt{2}$, car alors on aurait $\pm 2 = \left(\beta_2 + \frac{1}{\beta_2}\right)$, ce qui est impossible. On

aura donc $\beta_1 + \frac{1}{\beta_1} = 0$ ou ± 1 . La constante a ne pourra donc avoir que l'une des trois valeurs

$$0, \frac{\pm 1}{\rho - \frac{1}{\rho}}.$$

Nota. Si a n'est pas nul, l'équation (b) donnera $\left(\beta_2 + \frac{1}{\beta_2}\right) = \pm \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$.

3° $\theta^3(y) = \pm y$. On aura $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \pm 1$, et par conséquent l'équation (a)

deviendra $\pm \sqrt{2} = \left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right) + \left(\beta_{-1} + \frac{1}{\beta_{-1}}\right);$

Or cette équation n'est possible qu'autant que l'un des deux binômes du second membre se réduira à zéro, et l'autre à $\pm \sqrt{2} = \pm \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$. La formule (E)

donnera pour (a) l'une des quatre valeurs $\frac{\pm \rho^3}{\rho - \frac{1}{\rho}}, \frac{\pm \rho}{\rho - \frac{1}{\rho}}$, le signe étant le

même que dans la formule $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \pm 1$.

Donc, si $\theta(y) = ay + b\psi(y)$, désigne une racine de l'équation $F(y) = 0$ qui n'ait pas avec y un rapport constant, la constante a sera nulle, ou bien elle aura une des huit valeurs renfermées dans la formule $\frac{\rho^i}{\rho - \frac{1}{\rho}}$.

De même la constante b , pour les racines qui n'ont pas de rapport constant ni avec y ou avec $\psi(y)$, ne peut avoir que huit valeurs différentes. En effet, si toutes les racines n'ont pas un rapport constant avec y ou avec $\psi(y)$, il y aura une racine $\theta(y)$ qui vérifiera en même temps les deux formules

$$\theta(y) = \frac{\rho^2}{\rho - \frac{1}{\rho}} y + b\psi(y) \quad \text{et} \quad \theta^2(y) = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \theta(y) - y.$$

Car, excepté le cas où tous les binômes seraient nuls, nous avons vu dans la discussion précédente qu'il y a toujours un de ces binômes égal à $\pm \sqrt{2} = \pm \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$; prenons ce binôme pour celui que nous avons désigné par $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)$, la valeur cor-

respondante de a sera
$$\frac{\pm \rho^2}{\rho - \frac{1}{\rho}}. \quad (1^\circ)$$

On a donc
$$\theta^2(y) = \left\{ \frac{\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \rho^2}{\rho - \frac{1}{\rho}} - 1 \right\} y + b \cdot \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cdot \psi(y) = b \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \psi(y).$$

Nous pouvons supposer que $b \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) = 1$, car cela revient à multiplier les coefficients de $\psi(y)$ par une constante convenable. On aura donc $\theta^2(y) = \psi(y)$, et par conséquent $\psi(y)$ sera une racine de l'équation $F(y) = 0$.

Or, si dans une racine quelconque de la même équation, $\theta_1(y) = a_1 y + b_1 \psi(y)$, nous remplaçons la racine y par $\psi(y)$ en remarquant que $\psi^3(y) = -y$, nous aurons

$$\theta_1(\psi y) = -b_1 y + a_1 \psi(y).$$

Si donc aucune des deux constantes a_1 , b_1 n'est nulle, nous pouvons appliquer ici à $(-b_1)$ ce que nous avons démontré précédemment pour a , $(-b_1)$ ne peut avoir que l'une des huit valeurs représentées par la formule
$$\frac{\rho^i}{\rho - \frac{1}{\rho}}.$$

Si donc nous représentons les racines de l'équation $F(y) = 0$ par la formule

$$\theta_i(y) = a_i y + b_i \psi(y)$$

le nombre de celles de ces racines qui ne sont d'aucune des deux formes $\rho^i y$, $\rho^i \psi(y)$ ne pourra pas surpasser le nombre des combinaisons des 8 valeurs de a_i avec les huit valeurs de b_i , c. à d. $8 \times 8 = 64$. Le nombre de toutes les racines, et par conséquent le degré n de l'équation $F(y) = 0$ ne pourra pas surpasser $(64 + 16) = 80$. Or en appliquant ici le raisonnement fait au commencement du 10.^{me} théorème pour déterminer la forme du nombre n , et se rappelant que $\psi(y)$ est racine de l'équation $F(y) = 0$, nous trouvons $n = 8(4m + 2)$. Mais comme le nombre n doit être divisible par 3 et inférieur à 8×12 , cette formule donne pour elle une valeur unique $8 \times 6 = 48$.

Si donc les racines de l'équation $F(y) = 0$ ne sont pas de l'une des deux formes $\rho_i y$, $\rho_i \psi(y)$, le degré n de cette équation est égal à 8×6 .

Or cela est impossible:

Pour le démontrer considérons les deux racines $\theta_1(y) = \frac{1}{\rho} \theta(y)$, $\theta_2(y) = \frac{1}{\rho^2} \theta(y)$,

$\theta(y)$ désignant toujours la même racine que plus haut:

$$\theta(y) = \frac{\rho^2}{\rho - \frac{1}{\rho}} y + \frac{\rho^2}{\rho - \frac{1}{\rho}} \psi(y).$$

On aura
$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1(y) = \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} y + \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} \psi(y), \quad \theta_2(y) = \frac{1}{\rho - \frac{1}{\rho}} y + \frac{1}{\rho - \frac{1}{\rho}} \psi(y). \\ \theta_1^2(y) = \theta_1(y) - y \quad \text{et} \quad \theta_2^2(y) = -y; \end{array} \right.$$

les deux premières équations sont évidentes. Les deux autres en sont une conséquence, par ce que dans toute autre hypothèse, le coefficient de y dans $\theta_1(y)$ et $\theta_2(y)$ serait différent de $\frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}}$, et de $\frac{1}{\rho - \frac{1}{\rho}}$.

Désignons par β une racine primitive de l'équation $x^6 = 1$, et posons

$$\varphi(y) = \theta_1(y) - \beta y.$$

L'équation $\theta_1^2(y) = \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) \theta_1(y) - y$ donnera $\theta_1^2(y) - \beta \theta_1(y) = \frac{1}{\beta} \{\theta_1(y) - \beta y\}$, et par conséquent

$$\varphi(\theta_1 y) = \frac{1}{\beta} \varphi(y) \quad \text{et} \quad \varphi(\theta_1^i y) = \frac{1}{\beta^i} \varphi(y).$$

La fonction $z = \varphi(y)$ sera donc racine d'une équation du degré n dans laquelle les exposants de z seront multiples de 6. Pour que le degré n de cette équation fût égal à 6×8 , il faudrait que le nombre des valeurs de z qui n'ont pas entre elles deux à deux de rapport constant fût égal à 8; car à chacune de ces valeurs correspondent pour z 6 valeurs distinctes représentées par la formule $\beta^i z$. Or le nombre de ces valeurs de z est au moins égal à 12. En effet posons

$$\varphi[\psi(y)] = \varphi_1(y) \quad \text{et} \quad \varphi(\theta_2 y) = \varphi_2(y).$$

Les douze valeurs renfermées dans les trois suites

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(y), \quad \varphi(\rho y), \quad \varphi(\rho^2 y), \quad \varphi(\rho^3 y) \\ \varphi_1(y), \quad \varphi_1(\rho y), \quad \varphi_1(\rho^2 y), \quad \varphi_1(\rho^3 y) \\ \varphi_2(y), \quad \varphi_2(\rho y), \quad \varphi_2(\rho^2 y), \quad \varphi_2(\rho^3 y) \end{array} \right.$$

n'ont aucun rapport constant deux à deux. Pour celles qui forment une même suite, la démonstration est la même qu'au 9.^{me} théorème, de telle sorte qu'il nous suffira de démontrer l'impossibilité des trois équations

$$\varphi_1(y) = c(\rho^i y), \quad \varphi_2(y) = c\varphi_1(\rho^i y), \quad \varphi_2(y) = c\varphi(\rho^i y).$$

D'abord la constante c ne peut être qu'une puissance de β : car si l'équation en z admet deux racines de la forme z et cz , elle admet nécessairement toutes les racines renfermées dans la formule $c^m z$; si donc l'on n'avait pas $c^6 = 1$, le plus grand commun diviseur des exposants de z dans l'équation algébrique qui détermine cette fonction serait un multiple de 6 supérieur à 6, et par conséquent supérieur à 8, ce qui est impossible. Cela posé, l'impossibilité de la première équation

$$\varphi_1(y) = \beta^h \varphi(\rho^i y)$$

est manifeste, puisque
$$\varphi(y) = \left\{ \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} - \beta \right\} y + \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} \psi(y),$$

tandis que
$$\varphi_1(y) = \left\{ \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} - \beta \right\} \psi(y) - \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} y.$$

Pour démontrer l'impossibilité des deux autres, mettons $\varphi_2(y)$ sous la forme $a_2 y + b_2 \psi(y)$.

On a
$$\varphi_2(y) = \varphi(\theta_2 y) = \left\{ \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} - \beta \right\} \theta_2(y) + \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} \psi(\theta_2 y);$$

Or les équations relatives à $\theta_2(y)$ donnent

$$\frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} \psi(\theta_2 y) = \rho \left\{ \theta_2^2(y) - \frac{1}{\rho - \frac{1}{\rho}} \theta_2(y) \right\} = -\rho y - \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} \theta_2(y).$$

donc
$$\varphi_2(y) = -\beta \theta_2(y) - \rho y = - \left\{ \frac{\beta}{\rho - \frac{1}{\rho}} + \rho \right\} y - \frac{\beta}{\rho - \frac{1}{\rho}} \psi(y).$$

Ainsi pour vérifier l'une des deux équations $\varphi_2(y) = \beta^h \varphi(\rho^i y)$, $\varphi_2(y) = \beta^h \varphi_1(\rho^i y)$, on devrait vérifier, en donnant aux exposants i et h des valeurs entières, l'un des deux systèmes d'équations:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-\beta}{\rho - \frac{1}{\rho}} - \rho = \beta^h \rho^i \left\{ \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} - \beta \right\} \quad \text{et} \quad \frac{-\beta}{\rho - \frac{1}{\rho}} = \beta^h \cdot \rho^{-i}. \\ \text{ou bien,} \\ \frac{-\beta}{\rho - \frac{1}{\rho}} - \rho = -\beta^h \rho^i \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} \quad \text{et} \quad \frac{-\beta}{\rho - \frac{1}{\rho}} = \beta^h \rho^{-i} \left\{ \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} - \beta \right\}. \end{array} \right.$$

Or chacun de ces deux systèmes est impossible, et par conséquent les 12 valeurs de z renfermées dans le tableau précédent n'ont aucun rapport constant entre elles deux à deux. Le nombre total des valeurs de z et par conséquent le degré n de l'équation, serait au moins égal à 6×12 . Or cela est impossible, puisque nous avons démontré que, si les racines de l'équation $F(y) = 0$ ne sont pas toutes comprises dans les deux expressions $\rho^i y$ et $\rho^i \psi(y)$, on aura $n = 8 \times 6$. On ne peut donc pas supposer que l'équation $F(y) = 0$ ait une racine, dont le rapport avec y ne soit pas constant, et qui ne vérifie pas l'équation $\theta^2(y) = -y$. C. Q. F. D.

15.^{me} Théorème.

« Si $\mu = 10$, l'équation $F(y) = 0$ n'aura aucune racine dont le rapport avec y ou avec $\psi(y)$ ne soit pas constant. »

Démonstration. Soit $\theta(y) = a y + b \psi(y)$ (1)

une racine quelconque de l'équation $F(y) = 0$, je veux démontrer que si b n'est pas nul, a le sera nécessairement, c. à d. que $\theta(y)$ aura nécessairement un rapport constant avec y ou avec $\psi(y)$.

Si b n'est pas nul, on aura comme dans le théorème précédent

$$a = \frac{\left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right) - \frac{1}{\rho} \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)}{\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)} (E), \text{ et } \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right) + \left(\beta_{-1} + \frac{1}{\beta_{-1}}\right) (a)$$

ρ est une racine primitive de l'équation $x^{10} = 1$, β , β_1 , β_{-1} sont ou des puissances de ρ , ou des racines de l'une des deux équations $x^2 = -1$, $x^3 = \pm 1$. Si $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = 0$, quelle que soit la racine $\theta(y)$ pour la quelle b n'est pas nul dans la formule (1), on aura en même temps $a = 0$, et notre théorème est démontré.

Si les racines de l'unité β , β_1 , β_{-1} ne vérifient par toutes l'équation $\beta + \frac{1}{\beta} = 0$, l'une d'elles au moins sera une puissance de ρ ; car autrement la formule (a) donnerait pour $\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$ une valeur rationnelle. La racine correspondante $\theta(y)$ vérifiera donc l'équation $\theta^5(y) = \pm y$. Du reste comme $\theta(-y) = -\theta(y)$, si l'on a $\theta^5(y) = y$, en posant $\theta(-1)(y) = \theta_1(y)$, on aura $\theta_1^5(y) = -y$.

Donc, si parmi les racines de l'équation $F(y) = 0$, il y en avait une pour laquelle dans la formule (1) aucune des deux constantes a et b ne fût nulle, il y en aurait nécessairement une qui satisferait à l'équation $\theta^5(y) = -y$. Or nous allons démontrer que cela est impossible.

Si $\theta^5(y) = -y$, la valeur de β dans la formule $\theta^2(y) = \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) \theta(y) - y$ sera une racine primitive de l'équation $x^{10} = 1$, et par conséquent $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)$ aura l'une des deux valeurs $\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$, $\left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3}\right)$.

1° Soit $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \pm \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$, et cherchons quelles peuvent être les valeurs correspondantes de a . La formule (a) devient

$$\pm \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} + 2\right) = \pm \left(\rho + \frac{1}{\rho} + 1\right) = \left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right) + \left(\beta_{-1} + \frac{1}{\beta_{-1}}\right).$$

Chacun des binômes du second membre ne peut avoir que l'une des sept valeurs, $0, \pm 1, \pm \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right), \pm \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)$; or l'on reconnaît aisément que $\left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right)$ ne peut avoir que l'une des valeurs $\pm 1, \pm \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$, le signe étant ici le même que dans la formule $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \pm \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$. En substituant ces valeurs dans la formule (E) on reconnaît que la constante a ne peut avoir que l'une des valeurs suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2}{\rho - \frac{1}{\rho}} \text{ ou } \frac{\rho^3}{\rho - \frac{1}{\rho}}, & \quad \text{si } \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = + \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \\ \frac{-\rho^2}{\rho - \frac{1}{\rho}} \text{ ou } \frac{-\rho^3}{\rho - \frac{1}{\rho}}, & \quad \text{si } \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = - \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right). \end{aligned}$$

2° Soit $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3}\right)$. Si dans la formule (4) (5.^{me} théorème) nous donnons à m deux valeurs m et $2m$, l'élimination de $\theta(y)$ entre les deux équations ainsi obtenue donnera, en remplaçant ρ par β

$$\theta^{2m}(y) = \left(\beta^m + \frac{1}{\beta^m}\right) \theta^m(y) - y. \quad (5)$$

Faisons $m = 2, m = 3$; en remarquant que dans le cas présent,

$$\beta^2 + \frac{1}{\beta^2} = \left(\rho^6 + \frac{1}{\rho^6}\right) = - \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right), \quad \text{et} \quad \beta^3 + \frac{1}{\beta^3} = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right),$$

*

nous aurons

$$\theta^4(y) = - \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \theta^2(y) - y, \quad \text{et} \quad \theta^6(y) = \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \theta^3(y) - y.$$

si donc nous posons $\theta^2(y) = a_2 y + b_2 \psi(y)$, $\theta^3(y) = a_3 y + b_3 \psi(y)$, il résulte de ce que nous avons démontré précédemment (1°) que l'on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = \frac{-\rho^3}{\rho - \frac{1}{\rho}} \quad \text{ou} \quad a_2 = \frac{-\rho^3}{\rho - \frac{1}{\rho}} \\ a_3 = \frac{+\rho^2}{\rho - \frac{1}{\rho}} \quad \text{ou} \quad a_3 = \frac{+\rho^3}{\rho - \frac{1}{\rho}} \end{array} \right.$$

Or les deux formules

$$\theta^2(y) = \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^3} \right) \theta(y) - y \quad \text{et} \quad \theta^3(y) = \left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3} \right) \theta^2(y) - \theta(y),$$

jointes à la formule (1) donnent

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta^2(y) = \left\{ \left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3} \right) a - 1 \right\} y + \left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3} \right) b \psi(y) \\ \theta^3(y) = \left\{ \left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3} \right) a_2 - a \right\} y + \left\{ \left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3} \right) b_2 - b \right\} \psi(y). \end{array} \right.$$

On a donc

$$a_2 = \left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3} \right) a - 1 \quad \text{et} \quad a_3 = \left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3} \right) a_2 - a.$$

En éliminant a entre ces deux équations et remarquant qu'on a

$$\left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3} \right) = - \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) = 1 - \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right),$$

On trouve

$$a_3 - a_2 = \frac{1}{\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \right)}.$$

En donnant à a_3 et à a_2 toutes les valeurs comprises dans le tableau précédent, on obtient les trois équations suivantes

$$2\rho^2 = \frac{\rho - \frac{1}{\rho}}{\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}}, \quad 2\rho^3 = \frac{\rho - \frac{1}{\rho}}{\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}}, \quad \text{et} \quad \frac{\rho^2 + \rho^3}{\rho - \frac{1}{\rho}} = \frac{1}{\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}} \quad \text{ou} \quad \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) = \left(\frac{1}{\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}} \right).$$

On reconnaît aisément que ces équations sont impossibles. Il est donc impossible que parmi les racines de l'équation $F(y) = 0$, dont le rapport avec y n'est pas constant, il y en ait une qui vérifie la formule

$$\theta^2(y) = \left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3}\right)\theta(y) - y.$$

Or, s'il y en avait une qui vérifiait la formule $\theta^2(y) = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\theta(y) - y$; la racine $\theta^3(y)$ vérifierait la formule précédente. Il n'y en a donc aucune qui vérifie l'une de ces deux formules, et par conséquent il n'y en a aucune qui satisfasse à l'équation $\theta^5(y) = -y$. Or nous avons vu plus haut que, si l'équation $F(y) = 0$ admettait une racine qui n'eût de rapport constant ni avec y ni avec $\psi(y)$, il y en aurait nécessairement une qui vérifierait l'équation $\theta^5(y) = -y$. Donc etc... C.Q.F.D

16.^{me} Théorème.

« Si l'intégrale générale de l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = Py$ est algébrique, il y aura toujours un intégrale particulière y , telle que la fonction t ou $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$ soit une fonction rationnelle de x , ou une racine d'une équation du second ou du quatrième degré. »

Démonstration. Pour vérifier cette assertion il suffit de prendre pour intégrale particulière l'une quelconque des racines de l'équation $F(y) = 0$ définie dans la 1.^{re} remarque du théorème 8.^{me} En effet, si le plus grand commun diviseur μ des exposants de y dans $F(y)$ n'est égal à aucun des trois nombres 6, 8, 10, nous avons vu (12.^{me} théorème) que toute racine $\theta(y)$ qui n'a pas avec y un rapport constant vérifie l'équation $\theta^2(y) = -y$. Si donc nous désignons par $ay + b\psi(y)$ une racine quelconque de l'équation $F(y) = 0$, dont le rapport avec y ne soit pas constant, on conclura de la formule (E) du 8.^{me} théorème, que la constante a est nulle. Ainsi toutes les racines de l'équation $F(y) = 0$, seront de l'une des deux formes ay ou $b\psi(y)$. La fonction t ou $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$ considérée comme fonctions des racines de l'équation $F(y) = 0$, n'aura que deux valeurs, et par conséquent elle sera déterminée par une équation algébrique du second degré.

De même si $\mu = 8$, toutes les racines de l'équation $F(y) = 0$, dont le rapport avec y n'est pas constant, satisfont à l'équation $\theta^2(y) = -y$ (14.^{me} théorème); on en conclut comme précédemment qu'elles doivent être de la forme $b\psi(y)$, et que la fonction t est déterminée par une équation du second degré.

Si $\mu = 10$, le 15.^{me} théorème démontre que toutes les racines de l'équation

$F(y) = 0$ sont de l'une des deux formes ay ou $b\psi(y)$. On en conclut comme dans les cas précédents que la fonction t n'a que deux valeurs, et qu'ainsi elle est racine d'une équation du second degré.

Donc, si μ a une valeur quelconque autre que 6, la fonction t ou $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$ sera ou une fonction rationnelle de x , ou une racine d'une équation algébrique du second degré.

D'ailleurs si $\mu = 6$ et que l'équation $F(y) = 0$ ait quelques racines dont le rapport avec y ne soit pas constant, nous avons démontré au 13.^{me} théorème que la fonction t est déterminée par une équation algébrique du second ou du quatrième degré. Le théorème énoncé est donc démontré.

CONCLUSION.

« Comme la fonction t vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dt}{dx} + t^2 = P \quad (3)$$

on voit en unissant le théorème précédent à la conclusion de la première partie de ce mémoire, que le problème proposé, de décider si une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients rationnels et sans second membre peut ou ne peut pas s'intégrer sous forme finie, est ramené au problème suivant:

« Décider si l'équation différentielle $\frac{dt}{dx} + t^2 = P$, où P désigne une fonction rationnelle de x , peut être satisfaite par une valeur de t , rationnelle, ou racine d'une équation algébrique du second ou du quatrième degré. »

La solution générale de ce problème, et l'application de cette solution à quelques cas particuliers, notamment à ceux qui ont été traités par M. Liouville, feront l'objet d'un second mémoire.

Note. Nous avons dit (11.^{me} théorème) que si m_0 n'a aucune des valeurs 2, 3, 4 ou 6 on pourra toujours déterminer deux nombres premiers avec m , de la forme $l = 1 + \theta\mu$, $l' = 1 + y \cdot \frac{4m}{a\mu}$, tels qu'aucun des deux nombres $l + 1$, $l - 1$, ne soit divisible par $\frac{4m}{a\mu}$, et qu'aucun des deux nombres $l' + 1$, $l' - 1$, ne soit divisible par μ . En voici la démonstration.

m désigne le plus petit commun multiple des quatre nombres μ , m_0 , m_1 , m_{-1} . m_0 ne peut avoir avec μ aucun diviseur commun autre que 2 ou 4; les deux nombres m_1 , m_{-1} sont ou des diviseurs de μ , ou des nombres qui n'ont avec μ aucun diviseur commun autre que 2 ou 4; a désigne le plus petit des trois nombres

1, 2, 4 pour lequel le quotient $\frac{a\mu}{4}$ est entier; $\frac{4}{a}$ sera donc toujours un multiple du plus grand commun diviseur des deux nombres m_0 et μ , et par conséquent le plus petit multiple commun de ces deux nombres sera $m_0 \times \frac{a\mu}{4} \times b$, ($m_0 b$ et μ n'auront aucun diviseur commun autre que 2 ou 4); et, puisque les deux nombres m_1 et m_{-1} sont ou des diviseurs de μ , ou des nombres qui n'ont avec μ aucun diviseur commun autre que 2 ou 4, on aura $m = m_0 \times \frac{a\mu}{4} \times p$, et le nombre $m_0 \times p$ n'aura avec $\frac{a\mu}{4}$ aucun diviseur commun autre que 2, ou 4.

$$1^\circ \text{ Posons } l = 1 + \theta \mu = u + \theta' \frac{4m}{a\mu} \quad (1)$$

$$\text{d'où } (u - 1) = \theta \mu - \theta' \frac{4m}{a\mu} = \theta \mu - \theta' \times m_0 \times p \quad (2).$$

Si $m_0 p$ n'est pas divisible par 5, on prendra $u = 5$, $u - 1 = 4$ sera nécessairement multiple du plus grand diviseur commun des deux nombres μ et $m_0 \times p$, et par conséquent on pourra trouver deux nombres entiers θ et θ' qui vérifieront l'équation (2). Or, la valeur correspondante de l sera première avec m ; car la première forme de l montre que ce nombre est premier avec μ ; la seconde forme montre que l ne pourrait avoir avec $\frac{4m}{a\mu} = m_0 p$, aucun diviseur commun autre que $u = 5$, mais comme $m_0 p$, par hypothèse est premier avec 5, il s'en suit que l est premier avec tous les diviseurs de m . Enfin comme on a

$$l \pm 1 = 5 \pm 1 + \theta' \frac{4m}{a\mu} = 5 \pm 1 + \theta' \cdot m_0 \times p,$$

aucun des deux nombres $l \pm 1$ n'est divisible par $\frac{4m}{a\mu}$ ou $m_0 \times p$, puisque nous supposons que m_0 est > 4 et n'est pas égal à 6.

Si $m_0 p$ est divisible par 5, on prendra $u = 20 \cdot n + 13$, le nombre n étant choisi de telle sorte que u soit premier avec $m_0 \times p$, ce qui est possible d'une infinité de manières, puisque 20 et 13 sont premiers entre eux. Aucun des deux nombres $u + 1$, $u - 1$, ne sera divisible par 5, et l'on verra comme dans le cas précédent que le nombre l satisfait à toutes les conditions énoncées ci-dessus.

$$2^\circ \text{ Posons } l' = 1 + y \cdot m_0 p = u + y' \cdot \mu \quad (3)$$

$$\text{d'où } u - 1 = y \cdot m_0 \cdot p - y' \cdot \mu. \quad (4)$$

On verra, comme dans le cas précédent, que, μ étant > 6 , et les deux nombres $m_0 \times p$ et μ , n'ayant aucun diviseur commun autre que 2 ou 4, on satisfera à l'équation (4) par une valeur première avec μ et telle qu'aucun des deux nombres $u + 1$, $u - 1$, ne soit divisible par μ , en prenant $u = 5$, ou $u = 20.n + 13$, suivant que μ est premier avec 5 ou divisible par 5. On verra de même que la valeur correspondante de l' satisfait à toutes les conditions énoncées ci-dessus.

On peut donc toujours trouver deux nombres l , l' qui satisfassent à toutes les conditions énoncées dans le 11.^{me} théorème.

S.^t Etienne, 4 novembre 1862.