Über wohlgeordnete Mengen.

Von

A. SCHOENFLIES in Königsberg i./Pr.

Herr Zermelo hat kürzlich einen Beweis des Satzes veröffentlicht,*) daß „jede Menge wohlgeordnet werden kann“. Er sagt zum Schluß, daß der Beweis nur auf solchen Voraussetzungen ruht, die auch sonst in der Mengenlehre allgemein üblich waren. Demgegenüber ist zu bemerken, daß eine wesentliche Grundlage des Beweises in einer *bestimmten Annahme über wohlgeordnete Mengen* besteht, die diesen Charakter nicht besitzt, die Herr Zermelo allerdings nicht ausdrücklich hervorhebt. Andererseits ist es gerade diese Annahme, die zu den bekannten Widersprüchen in der Theorie der wohlgeordneten Mengen führt; sie kann daher nicht als Quelle mathematischer Beweise betrachtet werden. Von den andern Grundlagen des Beweises soll hier nicht die Rede sein.

1. In der Theorie der wohlgeordneten Mengen kann man einen *allgemeinen* und einen *speziellen* Teil unterscheiden. Die Sätze der allgemeinen Theorie beruhen *ausschließlich* auf der bekannten *Definition* der wohlgeordneten Mengen, und ihren unmittelbaren Folgerungen, insbesondere auf dem Satz, daß es in einer wohlgeordneten Menge keine unendliche Reihe von Elementen geben kann, die einander vorangehen. Dies ist ihr einziger Beweisgrund. Sie setzt die Existenz wohlgeordneter Mengen selbstverständlich voraus, und ist im übrigen davon unabhängig, ob die wohlgeordnete Menge aus einer endlichen oder unendlichen Zahl von Elementen besteht, und welche Mächtigkeit sie auch besitzen möge. Will man auf dieser allgemeinen Grundlage den fraglichen Satz beweisen, so hat man zu zeigen, daß eine unendliche Reihe von Mengen M_i , deren Mächtigkeiten abnehmen, nicht existieren kann; jede Reihe von Mächtigkeiten

$$m_1 > m_2 > m_3 > \dots$$

mußte nach einer endlichen Zahl von Gliedern abbrechen. Dies ist die notwendige und hinreichende Bedingung des Satzes.

*) Diese Annalen, Bd. 59, S. 514.

Diesem Weg folgt der Zermelosche Beweis nicht; er operiert mit Hilfsmitteln, die den *speziellen* Teil der Theorie der wohlgeordneten Mengen, nämlich ihre Erzeugung betreffen.

2. Auf welche Weise und bis zu welcher Mächtigkeit man wohlgeordnete Mengen bilden kann, diese *spezielle* Frage bleibt im Rahmen der allgemeinen Theorie unbeantwortet. Die bloße Definition der wohlgeordneten Mengen sagt hierüber nichts aus. Alle allgemeinen Sätze bleiben in Kraft, wenn man sich ausschließlich auf endliche Mengen beschränkt. Für die Beantwortung der obigen Frage bedarf man daher *notwendig* der Erzeugungsprinzipien. Hierin besteht der grundsätzliche Gegensatz zwischen einer wohlgeordneten und einer nicht geordneten Menge.

Erzeugungsprinzipien kann man zunächst nur *axiomatisch postulieren*, und hat dann ihre Berechtigung nachzuweisen. Auch die Einführung der Zahlen der zweiten Zahlenklasse, und des Fortgangprinzips von $\{\nu\}$ auf ω war ursprünglich nur mittels eines solchen Axioms möglich. Der Nachweis seiner Zulässigkeit ist durch die von Herrn G. Cantor gegebene ausführliche Theorie dieser Zahlen und ihre ausnahmslose Gesetzmäßigkeit als geführt zu betrachten. Nachdem so diese Zahlen zum mathematischen Gemeingut geworden sind, haben wir uns allmählich daran gewöhnt, von den mannigfachen höheren Zahlklassen in derselben selbstverständlichen Weise zu sprechen, wie von denen der ersten und zweiten Zahlklasse. Man darf aber nicht vergessen, daß es für die Einführung einer *jeden* von ihnen immer wieder einer Neuschöpfung resp. eines neuen Axioms und des Nachweises seiner Berechtigung bedarf. Daß wir hierin sichere Resultate noch nicht erreicht haben, bedarf kaum der Erwähnung.

3. Der Zermelosche Beweis des fraglichen Satzes kommt ebenfalls auf die Herstellung einer wohlgeordneten Menge hinaus. Zunächst wird, nach einem bestimmten Verfahren, eine gewisse wohlgeordnete Menge L , gebildet, und dann von ihr gezeigt, daß sie alle Elemente der gegebenen Menge M enthält. Die bereits oben erwähnte Grundlage *dieses* Beweises ist wiederum ein Postulat, das die Erzeugung wohlgeordneter Mengen betrifft. Es besagt nämlich, daß, wenn L *irgend eine* wohlgeordnete Menge ist, auch (L, m) eine solche ist. Es läßt sich am einfachsten in die Worte fassen, daß *es zu jeder wohlgeordneten Menge eine größere geben soll*. Diese Annahme, und insbesondere der Gebrauch, den Herr Zermelo von ihr macht, schließt sozusagen die sämtlichen möglichen Erzeugungsprinzipien in sich ein. Sie enthält aber noch mehr, und gerade deshalb ist sie unzulässig.

Übrigens besitzen die Beweise, die man sonst auf diesem Gebiet geführt hat, die also die Herstellung wohlgeordneter Mengen betreffen,

meistens den *umgekehrten* Charakter. Der wichtigste Beweisgrund ist in solchen Fällen die Überlegung, daß eine gewisse wohlgeordnete Menge *nicht* von $\{\nu\}$ auf ω oder von $\{\alpha\}$ auf Ω fortsetzbar ist, und daß sie deshalb nach einer endlichen oder abzählbaren Menge von Gliedern abbricht. Nirgends aber bedarf man sonst einer Annahme, wie sie der Zermelosche Beweis benutzt.

4. Der Begriff der *Gesamtheit* aller überhaupt möglichen Erzeugungsprinzipien wohlgeordneter Mengen ist meines Erachtens ein wohldefinierter mengentheoretischer Begriff, ebenso der Begriff der mit ihnen herstellbaren wohlgeordneten Mengen. Eine ganz andere Frage ist es, wie weit und bis zu welcher Mächtigkeit solche Erzeugungsprinzipien widerspruchlos definierbar sind. Ich erwähnte bereits, daß jedes neue Erzeugungsprinzip eine Neuschöpfung mathematischer Objekte bedeutet und daher der Prüfung seiner Berechtigung bedarf. Angesichts der merkwürdigen Gesetze, denen die Zahlen der zweiten Zahlklasse, besonders die ε -Zahlen, unterliegen, wird man die Beantwortung der Frage, wie weit wohlgeordnete Mengen und ihre Gesetze widerspruchlos definierbar sind, nicht als selbstverständlich betrachten. Ob und an welcher Stelle jemals die Notwendigkeit eintreten mag, die Erzeugungsmethoden abubrechen, muß offen bleiben. Wie dem aber auch sei, so stellt die Gesamtheit der so definierbaren Erzeugungsmethoden in demselben Sinn einen wohldefinierten mengentheoretischen Begriff dar, wie die Gesamtheit der ganzen Zahlen.

Noch ein zweiter Punkt bedarf der Erörterung. Es bleibt nämlich noch die Frage bestehen, ob wir bei der *Herstellung* einer *speziellen, irgendwie bestimmten* wohlgeordneten Menge jemals über Mengen gewisser Mächtigkeit hinauskommen. Bisher ist es nur gelungen, solche Mengen für die erste und zweite Mächtigkeit herzustellen.*) Ist es selbstverständlich, daß wir auch hierin immer weiter kommen? Wenn es bisher nicht gelungen ist, spezielle wohlgeordnete Mengen höherer Mächtigkeit zu bilden, so kann hier ebensowohl eine *Lücke der Erkenntnis*, wie eine *logische Unmöglichkeit* vorliegen. Was Herr Zermelo am Schluß seiner Note als „logisches Prinzip“ bezeichnet, würde allerdings darauf hinauskommen, den zweiten Fall auszuschließen. Ich halte es jedoch für geboten, auch mit ihm zu rechnen. Sachlich wird dadurch an den folgenden Schlüssen nichts geändert; es folgt nur, daß der oben definierte Begriff der Gesamtheit der erzeugbaren wohlgeordneten Mengen möglicherweise noch eine Einschränkung erfahren kann. Jedenfalls gelangen wir so zu einer ebenfalls *wohldefinierten Gesamtheit* wohlgeordneter Mengen, die

*) Eine Teilmenge des Kontinuums von der Mächtigkeit $\aleph_1$ hat Herr Hardy angegeben, Quart. Journ. of Math. 1903, S. 87.

mit der ersten übereinstimmen, aber auch von ihr verschieden sein kann. Die dadurch bestimmte wohlgeordnete Menge sei Z . Ihrer Definition nach gibt sie uns die Grenze an, über die wir bei der wirklichen Herstellung einer wohlgeordneten Menge niemals hinauskommen; über jeden Abschnitt von Z können wir dagegen hinauskommen. Ihre Mächtigkeit muß naturgemäß ganz offen bleiben.

5. Nehmen wir zunächst einmal an, daß Z die zweite Zahlklasse ist, d. h. also, daß alle wohlgeordneten Mengen, die wir auf Grund irgend welcher Vorschriften bilden können, niemals über die zweite Zahlklasse hinausführen, oder daß gar nur ihr und ihren Gesetzen der Charakter der Widerspruchslosigkeit zukommt. Wir werden dann über jede einzelne Ordnungszahl der zweiten Zahlklasse hinauskommen können, werden sie aber niemals ganz erschöpfen. Bei diesem Sachverhalt würde es daher einen Widerspruch bedeuten, wollte man annehmen, bei der Herstellung einer gewissen wohlgeordneten Menge käme man doch über sie hinaus. Mit andern Worten, in diesem Fall stellt die Menge (Z, m) einen *in sich widerspruchsvollen* Begriff dar, wie dies von dem Begriff einer krummen geraden Linie gilt.

Nicht anders steht es, wenn man die Herstellung wohlgeordneter Mengen bis zu höheren Mächtigkeiten als möglich zu betrachten hat. Ist z. B. noch jedes $\aleph_\nu$ für endliches ν als zulässig zu betrachten, so würde damit offenbar auch noch $\aleph_\omega$ eine wohldefinierte Menge sein und die Menge Z darstellen. Ist dann L irgend eine wohlgeordnete Menge, so würde die Menge (L, m) , falls L mit $\aleph_\omega$ identisch ist, ebenfalls einen widerspruchsvollen Begriff darstellen. Alles dies bleibt in Kraft, wie weit sich auch die Herstellung wohlgeordneter Mengen als möglich erweisen sollte; die Schlüsse sind von der Mächtigkeit der Menge Z ganz unabhängig. Formal kommt übrigens der Widerspruch dadurch zum Ausdruck, daß man einerseits voraussetzt, jede erzeugbare wohlgeordnete Menge sei mit Z oder einem Abschnitt von Z ähnlich, und daß andererseits (Z, m) eine Menge bilden würde, für die dies nicht der Fall ist.

6. Auf vorstehender Grundlage kann man die Prüfung des fraglichen Satzes nur in der Weise vornehmen, daß man die gegebene Menge M mit irgend einer als herstellbar vorausgesetzten wohlgeordneten Menge vergleicht, wie z. B. das Kontinuum mit der Menge $\aleph_1$. Dies könnte, im Anschluß an die Zermelosche Schlußweise, folgendermaßen geschehen. Man bilde aus den Elementen von M in der dort angegebenen Weise eine wohlgeordnete Menge L ; ihre Elemente bezeichne ich durch

$$m_1, m_2, m_3, \dots, m_\omega, \dots, m_\alpha, \dots$$

Ferner sei

$$W = 1, 2, 3, \dots, \omega, \dots, \alpha, \dots, \beta, \dots$$

die bezügliche Vergleichsmenge. Es entspricht dann sicher jedem Element m_α von L ein Element α von W , wohingegen das Umgekehrte der Untersuchung bedarf. Um sie durchzuführen, betrachte ich das Verhältnis der Mengen M , W und L zueinander. Hier sind — aus logischen Gründen — an sich folgende vier Fälle möglich:

1) Nicht jedem α entspricht ein m_α , und jedes Element von M ist ein m_α .

2) Nicht jedem α entspricht ein m_α , und nicht jedes Element von M ist ein m_α .

3) Jedem α entspricht ein m_α , und jedes Element von M ist ein m_α .

4) Jedem α entspricht ein m_α , und nicht jedes Element von M ist ein m_α .

Es fragt sich nun zunächst, ob einer dieser formal möglichen Fälle auf Grund der *Definitionen* der Mengen W , L , M auf einen Widerspruch führt. Für den zweiten Fall trifft es in der Tat immer zu. Alsdann existiert nämlich — gemäß der Theorie der wohlgeordneten Mengen — notwendig eine erste Zahl β , der kein Element von M entspricht. Dann enthält die Menge $M - L$ noch Elemente von M ; man kann daher eines von ihnen auswählen und es der Zahl β als Element m_β zuweisen. Die Menge (L, m_β) ist in diesem Fall ein *widerspruchsfreier* Begriff, und die Zermelosche Schlußweise bleibt anwendbar.

Dies gilt für den vierten Fall in der gleichen Weise, vorausgesetzt, daß die Menge W nicht mit der oben definierten Menge Z identisch ist. Wenn aber W mit Z identisch ist, so muß man auch den vierten Fall als zulässig betrachten. Alsdann versagt nämlich die Zermelosche Schlußweise. Denn wenn L mit Z ähnlich ist, so ist, wie ich oben ausführte, die Menge (L, m) ein *widerspruchsvoller* Begriff, und einem Beweis, der mit ihm operiert, kommt eine Beweiskraft nicht zu.

7. In einem Falle würden die vorstehenden Ausführungen allerdings versagen, nämlich dann, wenn man von vornherein *annimmt*, die Herstellung wohlgeordneter Mengen lasse sich so ausführen, daß man zu wohlgeordneten Mengen *jeder beliebigen Mächtigkeit* gelangt. Nur bei dieser Annahme würde auch im Fall 4) die Menge (L, m) *stets* ein widerspruchsfreier Begriff sein, und die Zermelosche Schlußweise in Kraft bleiben. In diesem Falle würde aber der fragliche Satz durch ein Postulat als richtig angenommen werden, und bedürfte überhaupt keines Beweises.

8. Das Resultat des Vorstehenden kann ich nur dahin aussprechen, daß die Geltung des fraglichen Satzes zweifelhaft bleibt, wenigstens wenn man seinen Inhalt so versteht, wie es im vorstehenden geschehen ist. Nach wie vor muß die Frage, ob alle definierbaren Erzeugungsmethoden

ausreichen, um Mengen jeder Mächtigkeit zu erschöpfen, als eine offene bezeichnet werden. Will man den Satz aber unabhängig von allen Annahmen über Erzeugungsprinzipien prüfen, so wird dies kaum anders geschehen können, als auf die in § 1 genannte Weise.*)

Meines Erachtens sollte man mit Annahmen, die zu widerspruchsvollen Begriffen oder Resultaten führen, auch in der Mengentheorie ebenso verfahren, wie man es sonst zu tun pflegt. Andererseits dürfte jedes neue Resultat, das sich über die Alefs erzielen läßt, uns dem Ziele näher bringen, zu entscheiden, wie weit hier die Harmonie der Resultate und Definitionen reicht.**)

*) Am Schlusse seiner Note spricht sich Herr Zermelo dahin aus, daß gemäß seinem Beweis „jede Menge, für welche die Gesamtheit der Teilmengen usw. einen Sinn hat, als eine wohlgeordnete betrachtet werden dürfe“. Naturgemäß fragt man sofort wieder, für welche Mengen denn die Gesamtheit der Teilmengen usw. einen Sinn haben soll, und da für eine Menge in dieser Hinsicht kaum etwas anderes in Betracht kommen kann als ihre Mächtigkeit, so bleibt auch hier offen, ob das benutzte Verfahren auf Mengen jeder Mächtigkeit anwendbar ist — ganz in Übereinstimmung mit dem, was oben und in § 4 ausgeführt wurde.

**) Man vgl. z. B. die kürzlich erschienene Note des Herrn Hausdorff, in der gezeigt wird, daß man den Beweis der von Herrn Bernstein in seiner Dissertation gegebenen Formel *nicht* von ν auf ω und darüber hinaus ausdehnen kann. (Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. Bd. 13, S. 569.)