III. *Ueber die Veränderungen, welche in den bisher gebräuchlichen Formeln für das Gleichgewicht und die Bewegung elastischer fester Körper durch neuere Beobachtungen nothwendig geworden sind;*
von R. Clausius.

In einer kürzlich erschienenen Abhandlung von Regnault: *De la compression des liquides etc.* ¹⁾ macht der Verf. in Bezug auf die Formveränderungen, welche das bei Versuchen über die Zusammendrückbarkeit von Flüssigkeiten angewandte Piezometer unter dem Drucke erleidet, darauf aufmerksam, daß die gewöhnlich zur Bestimmung derselben gebrauchten Gleichungen zwar theoretisch entwickelt, aber noch nicht hinlänglich durch Beobachtungen bestätigt seyen.

Das Verhalten elastischer fester Körper unter der Einwirkung fremder Kräfte, sowohl im Zustande des Gleichgewichtes, als in dem der Bewegung, ist schon mehrfach Gegenstand sehr gediegener mathematischer Untersuchungen gewesen, besonders von Navier, Poisson, Cauchy, Lamé und Clapeyron. Indem diese von den Molekularwirkungen ausgehen, gelangen sie auf verschiedenen Wegen alle zu Resultaten, welche im Wesentlichen vollständig mit einander übereinstimmen. Dadurch haben diese Resultate noch mehr Vertrauen gewonnen, als schon die einzelnen Namen jener Verfasser erwecken mußten; doch blieb dessenungeachtet eine Bestätigung derselben durch das Experiment sehr wünschenswerth.

Hr. Regnault giebt in dem erwähnten Memoire mehrere Methoden zu einer entscheidenden Prüfung an, und auf seine Veranlassung hat Hr. Wertheim eine solche wirklich angestellt ²⁾. Dabei hat er das wichtige Ergebniss gefunden, daß jene Formeln in der That nicht mit

1) *Mém. de l'Acad. T. XXI.*

2) *Mém. sur l'équilibre etc. Ann. de chim. et de phys. III^e Serie, T. XXIII, im Auszuge diese Annalen Bd. 74.*

der Wirklichkeit übereinstimmen. Wenn nämlich ein elastischer Körper z. B. in der Gestalt eines prismatischen Stabes durch ein angebrachtes Gewicht etwas gedehnt wird, so daß seine ursprüngliche Länge l in $l(1 + \delta)$ übergeht, so vermehrt sich dabei seyn Volumen nicht ebenfalls im Verhältnisse $1 : 1 + \delta$, sondern mit der Längendehnung findet zugleich eine seitliche Zusammenziehung statt, welche der Vergrößerung des Volumens entgegenwirkt. Nach den theoretischen Formeln würde die wirklich entstehende Volumvermehrung $= \frac{1}{3} \delta$ seyn; Hr. Wertheim dagegen hat sie durch mehrere Versuche ziemlich nahe $= \frac{1}{3} \delta$ gefunden.

Nach dieser Thatsache erfordern die theoretischen Untersuchungen eine erneute Aufmerksamkeit. — Zunächst muß man fragen: ob nicht unter den schon aufgestellten Formeln auch solche vorkommen, die sich durch Bestimmung von Constanten mit der Beobachtung in Einklang bringen lassen? und dazu bietet allerdings eine von Hrn. Wertheim angeführte Entwicklung von Cauchy Gelegenheit. In dieser ¹⁾ hat der Verf. den Körper nicht als Aggregat von Molekulen, sondern als eine continuirliche Masse angesehen, und es sind dadurch zwei Constante, deren Verhältniß sich bei jener anderen Betrachtungsart aus der Zusammenwirkung der Molekularkräfte ergibt, vollkommen unbestimmt geblieben, indem es dem Experimente vorbehalten ist, ihr Verhältniß festzustellen. Diese Formeln sind also ganz geeignet, dem gefundenen Resultate angepaßt zu werden, und Hr. Wertheim bestimmt demgemäß jenes Verhältniß. — Dagegen ist es nicht gerechtfertigt, daß derselbe dann auch diejenigen Formeln, welche Cauchy in zwei darauf folgenden Memoiren ²⁾ aus der Betrachtung der Molekularwirkungen abgeleitet hat, einer ähnlichen Behandlung unterwirft.

Es seyen nämlich in einem festen Körper die einzelnen Moleküle etwas aus ihrer ursprünglichen Lage verschoben, und für einen Punkt mit den Coordinaten x, y, z die Ver-

1) *Exerc. de math. III.* 160.

2) *Exerc. de math. III.* 188 und 213.

schiebungen nach den drei Coordinatenrichtungen mit ξ, η, ζ bezeichnet. Denkt man sich dann durch diesen Punkt irgend eine Ebene gelegt, so wird der an der einen Seite derselben befindliche Theil des Körpers auf den anderen Theil einen gewissen Zug oder Druck ausüben, den man mit dem Worte Spannung bezeichnet. Diese läßt sich für jeden Punkt der Ebene, also z. B. für den Punkt $x y z$, nach Richtung und Gröfse, und somit auch nach ihren in die Coordinatenrichtungen fallenden Componenten bestimmen. Wenn man auf diese Weise nacheinander drei durch denselben Punkt gelegte mit den Coordinatenebenen parallele Ebenen behandelt, so erhält man neun Componenten, unter denen jedoch dreimal je zwei gleiche vorkommen, so dafs sie sich alle durch sechs Buchstaben in folgender Weise bezeichnen lassen:

$$\begin{array}{lll} \text{für die Ebene } yz & - & A, F, E \\ \text{„ „ „ } & zx & - F, B, D \\ \text{„ „ „ } & xy & - E, D, C. \end{array}$$

Diese sechs Gröfsen bilden die Grundlage für alle weiteren Entwicklungen, so dafs wir uns auf ihre Betrachtung beschränken können. Unter der Voraussetzung, welche wir im Folgenden immer machen wollen, dafs *der Körper homogen sey, und in seinem ursprünglichen Zustande keinen Unterschied in Bezug auf die verschiedenen Richtungen darbiete, also unter ändern nach allen Richtungen dieselbe Elasticität habe*, finden sich in dem ersten der beiden zuletzt erwähnten Memoire für diese Gröfsen nachstehende Ausdrücke:

$$A =$$

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \left[(3R + G) \frac{d\zeta}{dx} + (R - G) \left(\frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} \right) \right] \Delta \\ B = \left[(3R + G) \frac{d\eta}{dy} + (R - G) \left(\frac{d\zeta}{dz} + \frac{d\zeta}{dx} \right) \right] \Delta \\ C = \left[(3R + G) \frac{d\zeta}{dz} + (R - G) \left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\eta}{dy} \right) \right] \Delta \\ D = (R + G) \left(\frac{d\eta}{dx} + \frac{d\zeta}{dy} \right) \Delta \\ E = (R + G) \left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\zeta}{dz} \right) \Delta \\ F = (R + G) \left(\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dx} \right) \Delta \end{array} \right.$$

worin R und G Constante sind, und Δ die Dichtigkeit des Körpers bedeutet. Indem Hr. Wertheim diese Formeln anwendet, sucht er sie so zu gestalten, daß sie seinem Beobachtungsergebnisse genügen, was dadurch geschieht, daß er

$$G = -\frac{1}{3} R$$

setzt. Das ist aber unzulässig. Diese Formeln sind nämlich gar nicht als die wahren Werthe der Spannungen zu betrachten. Sie sind für die Gleichgewichts- und Bewegungsgleichungen aufgestellt, in denen nur ihre Differentialcoefficienten vorkommen, und Cauchy sagt daher ausdrücklich, daß sie diesem Zwecke ebenso gut genügen, wenn man zu jeder noch eine willkürliche Constante hinzufügt. Erst im zweiten Memoire beschäftigt er sich mit der eigentlichen Bestimmung der Spannungen, und findet für dieselben in der That folgende etwas veränderte Ausdrücke:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \left[(3R + G) \frac{d\zeta}{dx} + (R - G) \left(\frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} \right) + G \right] \Delta \\ B = \left[(3R + G) \frac{d\eta}{dy} + (R - G) \left(\frac{d\zeta}{dz} + \frac{d\zeta}{dx} \right) + G \right] \Delta \\ C = \left[(3R + G) \frac{d\zeta}{dz} + (R - G) \left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\eta}{dy} \right) + G \right] \Delta \\ D, E \text{ und } F \text{ wie vorher.} \end{array} \right.$$

Hieraus läßt sich die Bedeutung der Constanten G erkennen. Setzt man nämlich in diesen Formeln alle Diffe-

rentialcoefficienten $\frac{d\epsilon}{dx}, \frac{d\epsilon}{dy}$ etc. gleich Null, so erhält man die Spannungen, welche in dem Körper schon während seines ursprünglichen Zustandes stattfanden, und zwar:

$$(3) \quad A = G\Delta; \quad B = G\Delta; \quad C = G\Delta; \quad D = E = F = 0.$$

Nimmt man nun an, daß der ursprüngliche Zustand ein Zustand des Gleichgewichtes war, und daß im Innern des Körpers keine fremden Kräfte wirken, sondern nur diejenigen, mit welchen die Moleküle selbst einander anziehen oder abstossen, so können jene Spannungen nur von äusseren Kräften herrühren; und wenn man darnach die vorigen Gleichungen betrachtet, so kann man leicht schliessen, daß als äussere Kraft in den Formeln (2) nur eine gleichmässig über die ganze Oberfläche verbreitete, überall normal gegen dieselbe wirkende Zug- oder Druckkraft vorkommt, deren Stärke $= G\Delta$ ist. Somit ist die Grösse $G\Delta$ von der innern Natur des Körpers ganz unabhängig, und kann für jeden besondern Fall als im Voraus bekannt angenommen werden. In den gewöhnlichsten Fällen bedeutet sie den atmosphärischen Luftdruck, und wenn sich der Körper in einem luftleeren Raume befindet, so ist sie gleich Null. — Die Grösse $R\Delta$ dagegen hängt von dem Elasticitätscoefficienten des Körpers ab, und man sieht daraus, daß man über das Verhältniß zwischen R und G nicht willkürlich verfügen, und also nicht $G = -\frac{1}{3}R$ setzen darf, welche Gleichung noch ins Besondere dadurch unmöglich ist, daß $G\Delta$ in den Versuchen des Hrn. Wertheim, wo es den gewöhnlichen Luftdruck darstellt, jedenfalls gegen $R\Delta$ sehr klein seyn muß¹⁾.

Da dem Vorigen nach der gemachte Versuch, Cauchy's Formeln mit der neuen Beobachtung in Einklang zu bringen, verworfen werden muß, so sind wir wieder zu dem

1) Die weiteren hierauf beruhenden Rechnungen des Hrn. Wertheim können dessenungeachtet als gültig betrachtet werden, sofern man nur annimmt, daß ihnen nicht die Formeln (1), sondern die früher erwähnten Formeln von Cauchy; welche sich auf continuirliche Körper beziehen, zu Grunde liegen.

oben ausgesprochenen Factum zurückgeführt, daß alle bisher aus den Molekularwirkungen abgeleiteten Ausdrücke der Art, so gut sie auch unter einander übereinstimmen, doch der Wirklichkeit nicht entsprechen, und es fragt sich nun, wodurch diese Abweichung veranlaßt seyn kann. Wir müssen dazu die Entwicklung derselben etwas näher betrachten, und unsere Aufmerksamkeit besonders darauf richten, ob die Annahmen, von welchen sie ausgehen, wirklich durch die Natur der Körper bedingt sind.

Zunächst wird angenommen, daß die Kraft mit der ein Molekül auf die umgebenden wirkt, nach allen Richtungen gleich sey. Daraus folgt, daß die Anziehung oder Abstossung zwischen irgend zwei Molekülen, unabhängig von ihrer sonstigen Lage nur eine Function ihres gegenseitigen Abstandes (r) ist, und wenn man außerdem vorläufig noch voraussetzt, daß alle Moleküle des Körpers untereinander gleich seyen, so muß diese Function für jede zwei Moleküle dieselbe seyn, und kann also für den ganzen Körper mit $f(r)$ bezeichnet werden ¹).

1) Poisson ist in dem Memoire, in welchem er zuerst seine bekannten Formeln entwickelt und angewandt hat (*Mem. de l'Acad. T. VIII*) ebenfalls von der Annahme ausgegangen, daß die Moleküle nach allen Richtungen mit gleicher Kraft wirken. In einer spätern Arbeit dagegen (*Journ. de l'école polyt. C. XX.*) läßt er diese Annahme fallen, und unterscheidet vielmehr das Wesen der festen Körper von dem der flüssigen dadurch, „daß in den letzteren die Theilchen im Verhältnisse zu ihren Dimensionen soweit von einander entfernt sind, daß man in Bezug auf die Wirkung, die sie auf einander äußern, ihre ganzen Massen, so wie die dazu gehörigen Quantitäten Wärmestoffs, als von ihren Schwerpunkten aus wirkend ansehen kann; und die Gestalt der Theilchen dabei ohne Einfluß ist; dagegen in festen Körpern die Theilchen einander hinreichend genähert sind, daß die Wirkung ihrer einzelnen Punkte auf einander in Betracht gezogen werden muß, daß mithin ihre Wirkung aufeinander verschieden wird, je nachdem sie sich diesen oder jenen Flächen zukehren, auch wenn der Abstand der Schwerpunkte dabei ungeändert bleibt“. Er zeigt aber, daß bei unkrystallinischen festen Körpern, in welchen, wie man annehmen müsse, die Moleküle nicht alle die entsprechenden Flächen nach derselben Seite kehren, sondern in dieser Beziehung ganz unregelmäßig liegen, jene Unterschiede sich so ausgleichen müssen, daß man nur eine mittlere vom Schwerpunkte ausge-

Bestimmt man nun mit Hülfe dieser Function die oben betrachteten Spannungen, so erhält man (nach Cauchy's Entwicklung) Ausdrücke, in denen viele Summen von folgenden Formen vorkommen:

$$(4) \quad \sum r f(r) \cos^2 \alpha; \quad \sum r f(r) \cos \alpha \cdot \cos \beta; \text{ etc.}$$

$$(5) \quad \sum r f_1(r) \cos^4 \alpha; \quad \sum r f_1(r) \cos^3 \alpha \cos \beta; \\ \sum r f_1(r) \cos^2 \alpha \cos^2 \beta; \quad \sum r f_1(r) \cos^2 \alpha \cos \beta \cos \gamma; \text{ etc.}$$

wo sich jedes Summenzeichen auf alle in der Wirkungssphäre eines zur Betrachtung ausgewählten Moleküles gelegenen anderen Moleküle bezieht. Dabei bedeutet r den Abstand eines solchen vom mittleren, und α, β, γ die Winkel, welche die zwischen ihnen gezogene Verbindungslinie mit den Coordinatenachsen bildet, und $f_1(r)$ ist ein abgekürztes Zeichen für $r \frac{df(r)}{dr} - f(r)$.

Die Aufgabe besteht nun darin, diese Summen auf so wenig unbekannte Größen, wie möglich zurückzuführen.

Cauchy richtet seyn Augenmerk dazu auf die Lage der einzelnen Moleküle und zeigt zunächst, daß alle Summen bis auf neun gleich Null werden, wenn man annimmt: *daß die Moleküle in Bezug auf drei durch den betrachteten Punkt xyz gelegte mit den Coordinatenebenen parallele Ebenen symmetrisch geordnet seyen, so daß ein einzelnes Molekül durch jede der drei Ebenen von einem anderen getrennt werde, welches ihm in gleicher Entfernung senkrecht gegenüberliege.* Jene neun Summen lassen sich dann weiter auf zwei verschiedene Größen, die Constanten R und G der obigen Formeln (2) reduciren, wenn man zu dieser Symmetrie, welche noch eine ungleiche Elasticität nach den drei Coordinatenrichtungen zulassen würde, als neue Bedingung hinzugefügt, *daß sich die Werthe der Summen nicht ändern, wenn man die drei Richtungen beliebig vertauscht, oder auch das ganze Coordinatensystem dreht.*

Eine so vollkommen regelmässige Anordnung der Moleküle können wir aber selbst bei den Körpern, die wir

hende Kraft zu betrachten brauchen, und dadurch wieder auf die obige Function $f(r)$ geführt werde.

homogen und nach allen Richtungen gleich elastisch nennen, nicht voraussetzen. Es ist z. B. eine schon mehrfach ausgesprochene Ansicht, daß solche Körper, obgleich im Ganzen unkrystallinisch, doch aus einzelnen krystallinisch geordneten Molekülgruppen bestehen, die aber so unregelmäßig zusammengefügt seyen, daß die Axen nach allen möglichen Richtungen liegen, und sich daher für den ganzen Körper keine Richtung besonders auszeichne. In diesem Falle würde also jene vollständige Symmetrie nicht stattfinden.

Poisson behandelt die Summen anders. Er sucht die Summation wenigstens in Bezug auf die Winkel in eine Integration zu verwandeln. Denkt man sich nämlich um das betrachtete Molekül zwei Kugelflächen mit den sehr wenig von einander verschiedenen Radien r und $r + \delta r$ beschrieben, so kommt es darauf an, die Gesamtwirkung aller in der dünnen Schicht zwischen den beiden Flächen enthaltenen Moleküle auf das mittlere zu bestimmen. Ist nun der Radius r zwar an sich klein, aber doch gegen den Abstand zweier benachbarter Moleküle, welchen wir kurz *Molekularabstand* nennen wollen, sehr groß, so haben zwei in der Schicht neben einander gelegene Moleküle gegen das mittlere eine so wenig verschiedene Lage, daß man ihre Wirkungen auf dasselbe als gleich ansehen darf. Man kann also, anstatt jedes Molekül der Schicht einzeln in Rechnung zu ziehen, die in sehr kleinen Räumen derselben zusammen gelegenen Moleküle, deren Anzahlen wegen der Homogenität des Körpers den Räumen selbst nahe proportional sind, gemeinschaftlich betrachten, wodurch die Summation in eine Integration in Bezug auf den Rauminhalt der Schicht übergeht. Diese Gründe hören aber auf, sobald r nicht mehr sehr groß gegen den Molekularabstand ist. Eine nahe um den Mittelpunkt beschriebene Schicht enthält nämlich ihrer Kleinheit wegen überhaupt nur wenig Moleküle, und zwei derselben, welche sich zunächst liegen, werden vom Mittelmolekül aus in so verschiedenen Richtungen gesehen, daß man ihre Wirkungen auf dieses

nicht als gleich betrachten darf, und somit die Integration bei einer solchen Schicht ein bedeutend anderes Resultat geben könnte als die Summation. Um dieser Schwierigkeit zu entgehen, nimmt Poisson an, die Function $f(r)$ sey von der Art, daß man die Wirkung der wenigen in den nächsten Schichten befindlichen Moleküle gegen die der entfernteren vernachlässigen könne. Alsdann braucht man natürlich jene Unregelmäßigkeiten nicht zu beachten, sondern kann die Integration auf die ganze Wirkungssphäre des Moleküls ausdehnen.

Es liegt nun aber in unseren bisherigen Kenntnissen über die Natur der festen Körper nichts, was uns zu jener Annahme in Bezug auf die Function $f(r)$ berechtigte. Vielmehr könnte man mit wenigstens eben so viel Wahrscheinlichkeit vermuthen, daß die Kraft, welche zwei Moleküle auf einander ausüben, bei ihrer Annäherung in einem so starken Verhältnisse wachse, daß ein nahe befindliches Molekül kräftiger wirke, als sehr viele entferntere zusammen. Dazu kommt noch ein besonderer Umstand, welcher gegen jene Annahme spricht. Nachdem man nämlich die Integrationen in Bezug auf die Winkel d. h. für eine einzelne Kugelschicht mit dem Radius r ausgeführt hat, bleiben noch zwei verschiedene Integrale in Bezug auf r , nämlich:

$$(6) \quad \int_0^{\infty} r^{-4} f(r) dr \text{ und } \int_0^{\infty} r^{-3} f_1(r) dr,$$

welche mit noch einigen konstanten Factoren verbunden die Größen G und R geben. Wenn man hier für $f_1(r)$ den gleichbedeutenden Ausdruck $r \frac{df(r)}{dr} - f(r)$ einsetzt, so kann man durch theilweise Integration, unter Berücksichtigung der über $f(r)$ gemachten Annahme, folgende Gleichung erhalten

$$(7) \quad \int_0^{\infty} r^{-3} f_1(r) dr = -5 \int_0^{\infty} r^{-3} f(r) dr.$$

Dadurch wäre ein ganz bestimmtes Verhältniß zwischen den Constanten R und G gegeben, welches dem Früheren nach nicht bestehen kann. Diesen Widerspruch sucht Poisson dadurch zu vermeiden, daß er sagt, man dürfe in Bezug auf r die Summation nicht in eine Integration verwandeln, und daher auch statt der Integrale (6) Summen behält, in denen r nach ganzen Vielfachen des Molekularabstandes fortschreitet. Es liegt aber viel näher, den Grund des Widerspruches in der über $f(r)$ gemachten Annahme zu suchen, so daß diese sich dadurch für feste Körper als unstatthaft erwiese.

In seiner spätern Arbeit ¹⁾ giebt Poisson diese Annahme über $f(r)$ auf, und ändert seine Betrachtungsweise dahin, daß er, anstatt zuerst in Bezug auf die Winkel zu integrieren, die ganzen Summen in ähnlicher Weise wie Cauchy unter einander vergleicht. Dabei macht er aber Schlüsse, denen doch wieder die frühere Annahme zu Grunde liegt. Während nämlich Cauchy, um die nöthige Regelmäßigkeit der Wirkungen zu erhalten, eine bestimmte Anordnung der Moleküle fordert, betrachtet Poisson diese als ganz willkürlich gelagert, und setzt nur voraus, daß die Wirkungssphäre eines jeden, obgleich an sich sehr unbedeutend, doch eine sehr große (*comme infini*) Anzahl anderer Moleküle enthalte, und meint dann, daß bei dieser großen Menge sich die im Einzelnen stattfindenden Unregelmäßigkeiten ausgleichen müßten. Nun kann man aber sehr wohl für die ganze Wirkungssphäre eine bedeutende Anzahl von Molekülen zugeben, und dabei doch annehmen, daß die wenigen, welche dem mittleren zunächst liegen, mit so überwiegender Kraft auf dasselbe wirken, daß die Unregelmäßigkeiten, welche bei ihnen wegen ihrer geringen Anzahl noch stattfinden, durch die entfernteren nicht ausgeglichen werden können. Außerdem könnte auch, wenn man sich den Körper als aus krystallinischen Molekülgruppen bestehend denkt, die Wirkungssphäre ganz oder doch zum großen Theile von einer solchen Gruppe eingenommen

1) Journ. de l'école polyt. C. XX.

werden, wodurch die Gleichmässigkeit in ihr vollständig gestört seyn würde.

Es sind also, wie gezeigt ist, für die Gültigkeit der Formeln (2) sowohl von Cauchy als auch von Poisson Bedingungen gestellt, deren Erfüllung in der Natur wenigstens sehr zweifelhaft ist, und auf ähnlichen Voraussetzungen beruht auch die Entwicklung von Lamé und Clapeyron, obwohl sie von diesen nicht so bestimmt ausgesprochen sind. Demnach könnte man meinen, hierin den gesuchten Grund, weshalb die Formeln nicht mit der Beobachtung übereinstimmen, gefunden zu haben. Dieser Schluss würde aber voreilig seyn, denn es muß vorher noch untersucht werden, ob die Annahmen, von denen man bei der Bildung der Formeln allerdings ausgegangen ist, auch für dieselben nothwendig sind. Und das, glaube ich, ist in der That nicht der Fall.

Wenn wir den Zustand eines Körpers beobachten, so gelangen wir dabei nie bis zur Anschauung der einzelnen Moleküle, sondern müssen uns begnügen, immer sehr große Mengen derselben zusammen zu betrachten. Um z. B. zu prüfen, ob ein Körper nach allen Richtungen gleich elastisch sey, untersuchen wir, ob der Widerstand, den er einer Dehnung oder Zusammendrückung nach verschiedenen Richtungen entgegensetzt, den entsprechenden Querschnittsflächen proportional sey. Diese Flächen aber, so klein wir sie auch nehmen mögen, werden doch immer noch eine unzählige Menge von Molekülen in sich fassen, von denen wir nur die Gesamtwirkung erhalten. Es können daher recht gut die einzelnen Moleküle nach verschiedenen Richtungen mit ungleicher Kraft wirken, ohne daß wir davon etwas merken, wenn nur diese Richtungen nicht bei allen dieselben sind, sondern willkürlich durch einander gehen. Ebenso können die Moleküle auch in krystallinische Gruppen geordnet seyn; nur müssen die Gruppen selbst unregelmässig aneinander gefügt, und ausserdem klein genug seyn, daß in den kleinsten Flächen, welche wir noch untersuchen können, doch schon so viele derselben enthalter

sind, daß sich von ihren Wirkungen der Mittelwerth herausstellt, der natürlich nach allen Richtungen derselbe ist. Diesen allein beobachten wir dann, und von ihm kann auch nur die Rede seyn, wenn wir den Körper als nach allen Richtungen gleich elastisch erklären. — Mit ähnlichen Mittelwerthen müssen wir uns auch bei der Untersuchung der Homogenität und anderer Eigenschaften des Körpers begnügen.

Solche Mittelwerthe sind es nun aber auch nur, um die es sich bei der Angabe der Spannungen handelt, wodurch die Bildung der obigen Formeln bedeutend erleichtert wird. Schon Poisson hat diesen Umstand benutzt, um zu zeigen, daß man bei den Molekülen nicht nach allen Richtungen dieselbe Kraft anzunehmen brauche¹⁾, man kann jedoch von demselben noch viel allgemeinere Anwendung machen. Um nämlich die Summen (4) und (5), die sich auf die Wirkungen beziehen, welche ein Molekül von seinen Umgebungen erleidet, zu bestimmen, muß man sein Augenmerk nicht auf Ein Molekül mit seiner Wirkungssphäre beschränken, sondern unzählig viele solche Systeme gleichzeitig betrachten, und für jede Summe den Mittelwerth aus allen den Werthen, die sie bei den einzelnen Systemen annimmt, zu erhalten suchen.

Man denke sich dazu ein Normalsystem gebildet, welches den mittleren Zustand aller einzelnen Systeme darstellt, und an dem sich dann die weiteren Bestimmungen ausführen lassen. Zunächst ist klar, daß, wenn die wirklichen Moleküle des Körpers nach verschiedenen Richtungen ungleiche Kraft äußern, man dafür im Normalsysteme Moleküle mit der mittleren Kraft $f(r)$ substituiren muß. Was ferner die Anordnung derselben um das Mittelmolekül betrifft, so denke man sich die Wirkungssphären aller Systeme auf gleiche Weise in sehr viele kleine Räume getheilt, und nehme an, daß die Anzahl der Moleküle, welche sich in jedem solchen Raume des Normalsystemes befinden, der Mittelwerth aus den Anzahlen für die ent-

1) Siehe Anmerk. zu S. 51.

sprechenden Räume der einzelnen Systeme sey, wobei es gar nicht darauf ankommt, ob dieser Werth eine ganze oder gebrochene Zahl ist.

Mit diesem Normalsystem kann man nun viel freier verfahren, als es Poisson mit einem einzelnen konnte. Beschreibt man in demselben eine dünne Kugelschicht mit den Radien r und $r + \delta r$, so leuchtet ein, daß wenn auch in den entsprechenden Schichten der einzelnen Systeme die Moleküle nicht hinlänglich regelmäsig vertheilt sind, man doch im Normalsysteme eine solche Regelmäßigkeit annehmen muß, ja man kann von den einzelnen Molekülen, welche mit einer gewissen Kraft auf das Mittelmolekül wirken, ganz absehen, und statt dessen eine gleichmäsig über die Schicht verbreitete Kraft annehmen. Dasselbe gilt auch von den nächsten Schichten um den Mittelpunkt, denn obwohl eine solche in jedem einzelnen Systeme so wenig Moleküle enthält, daß von einer gleichmäsigigen Vertheilung über den ganzen Umfang der Schicht gar nicht die Rede seyn kann, so wird doch durch den Umstand, daß dieselben in den verschiedenen Systemen an verschiedenen Punkten liegen, bewirkt, daß man in dem Normalsystem für jeden kleinen Raum der Schicht als Mittelwerth einen gleichen Bruchtheil eines Moleküls erhält, wodurch wieder eine gleichmäsig über die Schicht verbreitete Kraft entsteht. Hieraus folgt, daß man die Integration, welche man bei der früheren Betrachtung eines einzelnen Systemes nur in den entfernteren Schichten, statt der Summation anwenden durfte, hier auf den ganzen Raum der Wirkungssphäre ausdehnen kann. Man bedarf also gar keiner beschränkenden Annahme in Bezug auf die Function $f(r)$, und doch wieder zu den Formeln (2) zu gelangen.

Was dabei die Integrale (6) betrifft, so darf man jetzt in denselben nicht ohne Weiteres als untere Grenze $r = 0$ setzen, weil für diesen Werth die Differentialausdrücke unendlich werden können; übrigens aber ist ihre weitere Betrachtung eigentlich ganz unnöthig, da in ihnen die beiden unbekannten Functionen $f(r)$ und $f_1(r)$ vorkommen,

und man sie daher doch nicht vollständig bestimmen kann, sondern statt ihrer zwei unbekannte Constante setzen muß. Nur soviel soll hier erwähnt werden, daß der von Poisson gefundene Widerspruch, welcher ihn veranlafte, statt der Integrale Summen zu behalten, jetzt nicht stattfindet, da er nur auf der von ihm gemachten Annahme über $f(r)$ beruhte.

Man kann ohne das gefundene Resultat zu ändern in der vorstehenden Entwicklung noch eine Verallgemeinerung eintreten lassen. Es wurde nämlich der leichtern Darstellung wegen vorläufig angenommen, daß alle Moleküle des Körpers unter einander gleich seyen. Sollte dieses nicht stattfinden, so muß man nur bei der Bildung der Mittelwerthe anstatt der bloßen Anzahl der Moleküle auch deren Gröfse und Wirkungskraft berücksichtigen.

Es hat sich also ergeben, daß die Gültigkeit der gewöhnlichen Formeln für die Spannungen keiner anderen Bedingung bedarf, als daß der Körper in dem von uns festgestellten Sinne homogen und nach allen Richtungen gleich elastisch sey. Diese Bedingungen müssen wir nun aber bei den von H. Wertheim angewandten Körpern in ihrem ursprünglichen Zustande, wenigstens als sehr nahe erfüllt ansehen; und doch widerspricht seine Beobachtung den Formeln. Demnach scheint nichts weiter übrig zu bleiben, als anzunehmen, *daß die Körper unter der Einwirkung fremder Kräfte eine innere Veränderung erleiden, welche in etwas Anderem besteht, als einer bloßen Verschiebung der Moleküle, da diese in den Formeln schon berücksichtigt ist, und daß dadurch die Körper für die Dauer der Einwirkung jene als Bedingung gestellten Eigenschaften theilweise verlieren können.*

Diese Annahme, auf deren Möglichkeit ich weiter unten noch zurückkommen werde, indem ich die Art der wahrscheinlichen Veränderung näher charakterisire, wird außerdem, daß sie den Wertheim'schen Versuch genügend erklärt, noch directer durch andere schon früher bekannte Erscheinungen bestätigt.

Schon i. J. 1835 hat Hr. W. Weber ¹⁾ bei Versuchen über die Elasticität von Seidenfäden folgende merkwürdige Thatsache festgestellt. Wenn die Spannung des Fadens durch ein Gewicht vermehrt wird, so dehnt er sich sogleich um eine gewisse Strecke aus, bleibt aber bei diesem Punkte nicht stehen, sondern erleidet unter fortgesetzter Einwirkung des Gewichtes noch allmählig eine weitere Ausdehnung, welche mit der Zeit immer langsamer und unmerklicher wird, aber doch bis gegen 24 Stunden verfolgt werden kann, wo dann endlich der Zustand des Gleichgewichtes eingetreten ist. Diese nachträgliche Dehnung, welche Hr. Weber mit dem Namen: *elastische Nachwirkung* bezeichnet hat, beträgt etwa $\frac{1}{3}$ der unmittelbar erfolgten. Sie darf nicht mit der sogenannten bleibenden Verlängerung, welche auf einem Mangel an Elasticität beruht, verwechselt werden, denn abgesehen davon, daß Hr. Weber durch die Art seiner Versuche die bleibende Verlängerung schon ausgeschlossen hatte, so ist die Verschiedenheit auch dadurch vollständig bewiesen, daß dasselbe Verhalten eintritt, wenn man das hinzugefügte Gewicht wieder fortnimmt. Der Faden zieht sich dann zunächst um eine bestimmte Größe zusammen, welche geringer ist, als die ganze erlittene Ausdehnung, aber im Verlaufe von etwa 24 Stunden kehrt er durch allmählig fortgesetzte Zusammenziehung genau zu seiner früheren Länge zurück.

Ein solches Verhalten ist mit den gewöhnlichen Elasticitätsgesetzen im Widerspruche, nach denen bei einer plötzlichen Vermehrung der Kraft wohl eine kurze Oscillation stattfinden kann, aber nicht eine so lange andauernde Wirkung. Diese letztere weist vielmehr deutlich auf eine allmählig im Körper vorgehende Veränderung hin, welche nach dem Aufhören der Kraft eben so allmählig wieder rückgängig wird.

Eine ähnliche Erscheinung hat H. Weber schon früher ²⁾

1) Göttinger gelehrte Anzeigen 1835, St. 8 und im Auszuge diese Ann. Bd. 34.

2) Diese Ann. Bd. 20.

an Metallen bemerkt. Es wurde nämlich ein Draht einer plötzlich vermehrten Spannung unterworfen, und nachdem diese etwa $\frac{1}{4}$ Secunde gewirkt hatte, so dafs man die entstandenen Schwingungen als beendet ansehen konnte, in seiner angenommenen Länge fixirt. In diesem Zustande wurde er genau geprüft, dann abermals auf längere Zeit derselben Spannung ausgesetzt, und darauf wieder geprüft. Da zeigte sich, dafs durch das längere Andauern der Spannung noch eine neue, zwar geringe aber doch merkbare Wirkung hervorgebracht war. Hr. Weber erklärte dieses damals aus der Erkaltung, welche der Draht im ersten Momente seiner Ausdehnung erleide, und durch welche seyn Elasticitätscoëfficient vergrößert, und daher seine erste Ausdehnung verringert werde. Es hat indessen schon Hr. Seebeck ¹⁾ darauf hingedeutet, dafs, nachdem derselbe Beobachter die elastische Nachwirkung entdeckt habe, man diese jedenfalls wenigstens neben der Wärme zur Erklärung jener früheren Erscheinungen, welche ganz mit ihr übereinstimmen, zulassen müsse. — Dafs der Unterschied bei den Drähten lange nicht so grofs war, wie bei der Seide, kann entweder darin liegen, dafs die elastische Nachwirkung bei Metallen in der That geringer ist, oder auch darin, dafs sie bei ihnen viel schneller vor sich geht, als in organischen Substanzen, so dafs sie während der ersten Viertelsecunde, nach welcher die Länge fixirt wurde, schon größtentheils geschehen war. Das letztere mufs man als wahrscheinlicher betrachten, sofern man die bedeutendere Abweichung der Wertheim'schen Beobachtung von den Formeln aus derselben Wirkung erklären will.

Noch ein Umstand, welcher ebenfalls unsere Annahme und zugleich den letzten Schlufs bestätigt, ist folgender. Wenn man den Elasticitätscoëfficienten eines Stabes einerseits aus der durch ein Gewicht hervorgebrachten Dehnung bestimmt, andererseits aus dem beobachteten Longitudinal- und Transversalton nach den bekannten For-

1) Programm zur öffentlichen Prüfung der technischen Bildungsanstalt und der Baugewerken-Schule zu Dresden 1846, S. 35.

meln berechnet, so findet man für die beiden letzteren Fälle ziemlich übereinstimmende Werthe, die aber fast immer beträchtlich gröfser sind als der im ersten Falle erhaltene. So hat z. B. Hr. Wertheim für fünf bei seinem Versuche angewandte Glasylinder folgende Zahlen gefunden ¹⁾).

Elasticitätscoëff. nach der Dehnung.

3852,5; 4302,6; 3481,1; 4129,0; 3479,1.

Elasticitätscoëff. nach den Longitudinal-Schwingungen.

5354,0; 5629,7; 5476,7; 5597,3; 5489,8.

In einem früheren Memoire über die Elasticität ²⁾), wo er besonders auf diesen Unterschied zwischen den beiden Methoden aufmerksam macht, führt er zur Vergleichung folgende Werthe an:

	Elasticitätscoëfficienten		
	nach den Long.- Schwing.	nach den Transv.- Schwing.	nach der Dehnung.
Gufsstahl	20421	20698	19881.
Messing	10464	10348	9395,

und ähnliche Verschiedenheiten zeigen sich auch bei der großen Reihe von weiteren Versuchen, welche in diesem Memoire enthalten sind.

Hr. Wertheim erklärt diese Erscheinung, wie Hr. Weber die seinige, aus der Wärme, indem er annimmt, daß ähnlich, wie es in der Luft geschieht, auch in festen Körpern, die bei der Wellenbewegung abwechselnd frei und gebunden werdende Wärme die Fortpflanzung des Schalles beschleunige. Demgemäfs benutzt er auch, wie man es bei der Luft gethan hat, den Unterschied zwischen der beobachteten Schallgeschwindigkeit (nach dem Longitudinalton), und derjenigen, welche man aus dem durch Dehnung gefundenen Elasticitätscoëfficienten berechnen kann, um das Verhältniß der specifischen Wärme bei constantem

1) *Ann. de chim. et de phys. III^e Serie T. XXIII. p. 71.*

2) *Ann. de chim. et de phys. III^e Serie T. XII. p. 405.*

Drucke zu der bei constantem Volumen für eine bedeutende Reihe von Metallen zu bestimmen ¹⁾). Dabei ist er aber in einem Irrthum verfallen. Er wendet folgende von Duhamel gegebene Gleichung an:

$$(8) \quad k = 1,8 \frac{v'^2}{v^2} - 0,8,$$

wo k das Verhältniß der beiden specifischen Wärmen, v die berechnete und v' die beobachtete Schallgeschwindigkeit bedeutet. Diese Gleichung paßt aber gar nicht für den vorliegenden Fall. Sie bezieht sich auf die *kugelförmige* Ausbreitung der Schwingungen im Innern eines festen Körpers, während es sich hier um die *lineare* Fortpflanzung längs eines verhältnißmäßig dünnen Stabes handelt. Für diesen letzteren Fall ist die entsprechende Gleichung

$$(9) \quad k = \frac{1}{6 \frac{v^2}{v'^2} - 5}$$

und bei ihrer Anwendung überzeugt man sich bald, daß die gewählte Erklärungsart nicht ausreicht. Es ist nämlich bisjetzt bei festen und tropfbar flüssigen Körpern eine durch Zusammendrückung oder Ausdehnung entstehende Erwärmung oder Erkältung direct noch nie nachgewiesen. Vielmehr hat noch neuerlich Hr. Regnault ²⁾ beobachtet, daß Wasser bei einer plötzlichen Zusammendrückung mit einer Kraft von 10 Atmosphären sich nicht um $\frac{1}{30}$ Grad C. erwärmt. Wenn es also auch theoretisch wahrscheinlich ist, daß bei jedem Drucke auf einen Körper Wärme frei wird, so ist diese doch bei festen und tropfbar flüssigen Körpern jedenfalls so unbedeutend, daß man für das Verhältniß der specifischen Wärmen viel geringere Werthe als bei der Luft erwarten muß, welcher letztere nach DuLong 1,421 ist. Statt dessen giebt die Gleichung (9) mittelst der von Hrn. Wertheim für v und v' bestimmten Größen, folgende Zahlen:

1) A. a. O. S. 444.

2) *Mém. de l'Acad. T. XXI. p. 463.*

	Guß- stahl.	Mes- sing.	Silber		Gold		Kupfer	
			gezo- gen.	ange- lassen.	gezo- gen.	ange- lassen.	gezo- gen.	ange- lassen.
k	1,150	2,588	1,209	1,092	1,484	3,875	1,044	1,955

von welchen offenbar mehrere sogleich als unzulässig verworfen werden müssen, und bei Glas und Blei würden die stattfindenden Unterschiede der Schallgeschwindigkeiten nicht einmal *möglich* seyn, selbst wenn man $k = \infty$ setzen wollte, sondern nach der Gleichung (9) müßte k negativ werden.

Es kann also wenigstens aus der freiwerdenden Wärme allein die in Rede stehende Erscheinung nicht erklärt werden, so daß wir noch einen anderen Grund suchen müssen, und als solchen bietet sich wiederum die elastische Nachwirkung dar. Diese kann nämlich, wie auch Hr. Seebek¹⁾ bemerkt hat, während der kurzen Dauer einer Schwingung nur wenig in Wirksamkeit treten, wogegen bei den Dehnungsversuchen dazu hinlänglich Zeit ist, so daß diese letzteren eine verhältnißmäßig zu große Verlängerung, und daher einen zu kleinen Elasticitätscoefficienten geben müssen.

Nach diesen Thatsachen dürfen wir wohl die Annahme einer, während der Wirkung der Kraft im Innern des Körpers vorgehenden, Veränderung als gerechtfertigt betrachten.

Was nun die mathematische Behandlung der Elasticität unter dieser neuen Annahme betrifft, so muß man dabei den Zustand des Gleichgewichtes von dem der Bewegung unterscheiden. Im ersteren Falle, wenn zugleich vorausgesetzt wird, daß die Kräfte lange genug gedauert haben, um die vollständige Nachwirkung hervorzubringen, kann man die von Hrn. Wertheim anfangs citirten Cauchy'schen Formeln anwenden, welche für continuirliche Körper entwickelt sind, und abgesehen vom äußeren Drucke noch zwei unbestimmte Constante enthalten. Das Verhältniß dieser letzteren muß dann aber für jeden Körper besonders

er-

1) A. a. O. S. 34.

ermittelt werden, da es zweifelhaft ist, ob dasjenige, welches Hr. Wertheim bei Glas und Messing nahe übereinstimmend gefunden hat, bei allen Körpern gilt. — Für den Zustand der Bewegung dagegen könnte man, sofern man voraussetzte, daß die Schwingungen zu schnell geschähen, als daß während der Zeit eine erhebliche Nachwirkung möglich wäre, die bisher gebräuchlichen Formeln beibehalten. Will man aber die elastische Nachwirkung auch hier in Betracht ziehen, so muß man die Entwicklungen dahin ändern, daß man bei der Bestimmung der Spannungen nicht bloß den augenblicklich stattfindenden, sondern auch den vorausgegangenen Zustand des Körpers berücksichtigt, wodurch freilich die Behandlung bedeutend weitläufiger werden würde. Die so entstandenen Formeln würden dann außer den gewöhnlichen Gesetzen über die Dauer, Fortpflanzungsart u. s. w. der Schwingungen, noch manche Eigentümlichkeiten derselben darstellen, die in den bisherigen Formeln nicht enthalten sind. Nach den letzteren müßten z. B. die Schwingungen eines Körpers, wenn kein Hinderniß wie Luftwiderstand, Reibung und dergleichen vorhanden wäre, ewig in unveränderter Stärke fortdauern. Das widerspricht aber der Erfahrung, da verschiedene Körper ungleich lange tönen, selbst unter Umständen, wo dieser Unterschied nicht durch äußere Ursachen bewirkt seyn kann. Der Grund muß also in der Wirkungsart der inneren Kräfte selbst liegen, und Hr. Weber hat gezeigt ¹⁾, daß man ihn in der elastischen Nachwirkung finden könne. Somit müßte die allmälige Abnahme der Schwingungen in den neuen Formeln mit ausgedrückt seyn.

Es bleibt nun noch zu erörtern, wie man sich die innere Veränderung der Körper, welche alle jene Erscheinungen veranlaßt, etwa vorstellen könne. Wenn gleich sich gegen die von Poisson ausgesprochene Unterscheidung des festen und flüssigen Aggregatzustandes ²⁾, welche im Wesentlichen auch mit der Ansicht von Laplace überein-

1) Diese Ann. Bd. 34. S. 254.

2) Siehe Anmerk. zu S. 51.

Poggendorff's Annal. Bd. LXXVI.

stimmt, noch manches einwenden läßt, so können wir doch so viel davon als sehr wahrscheinlich beibehalten, daß die Kraft eines Moleküls nicht gleichmäÙig um seinen Schwerpunkt wirke, sondern je nach den Richtungen verschieden sey. Hat man aber dieses einmal zugegeben, so liegt es nahe, noch weiter anzunehmen, daß, wenn ein solcher Körper fremden Kräften unterworfen wird, die von verschiedenen Seiten ungleich auf ihn wirken, er also z. B. nach einer Dimension gedehnt wird, während er nach anderen Dimensionen frei bleibt oder gar zusammengedrückt wird, dann die Moleküle neben ihrer Verschiebung sich auch etwas drehen können, indem sie in Bezug auf ihre Krafrichtungen den ungleichen Spannungen etwas folgen. Eine solche Veränderung ist in den bisherigen Formeln nicht vorgesehen, und hebt sogar deren Anwendbarkeit auf; denn indem sie eine theilweise GleichmäÙigkeit in der Lage der Moleküle hervorbringt, entstehen für den ganzen Körper gewisse Richtungen, in denen die Anziehung stärker oder schwächer ist, als in anderen, wodurch dieser die Bedingungeigenschaft verliert, nach allen Richtungen gleich elastisch zu seyn. Nimmt man dazu noch an, daß die Drehung der Moleküle und ihre nachherige Rückkehr in die alte Lage nicht, wie die bloßen Verschiebungen, unmittelbar beim Eintreten und Aufhören der Kraft erfolgen, sondern einer gewissen, wenn auch bei vielen Körpern nur geringen, Zeit bedürfen, so ist die elastische Nachwirkung vollständig erklärt.

Jedenfalls sieht man aus den angeführten Thatsachen, daß die Theorie der Elasticität noch durchaus nicht als abgeschlossen zu betrachten ist, und es wäre zu wünschen, daß recht viel Physiker sich mit diesem Gegenstande beschäftigen, um durch vermehrte Beobachtungen die sichere Grundlage zu einer erweiterten Theorie zu schaffen. Dabei würde es von besonderem Interesse seyn, wenn nicht nur über den Gleichgewichtszustand ähnliche Versuche wie der des Hrn. Wertheim unter möglichst veränderten Umständen angestellt, sondern auch die Schwingungsgesetze entscheidenden Prüfungen unterworfen würden, indem es

dem Obigen nach nicht ohne Weiteres angenommen werden darf, daß diese ebenso von den bisherigen Formeln abweichen, wie die Gleichgewichtsgesetze.

IV. *Ueber die Ursache der täglichen regelmäßigen Variationen des Erdmagnetismus;
von Dr. Lamont.*

Während des langen Zeitraumes, der verflossen ist, seit Graham zum ersten Male die tägliche Bewegung der magnetischen Declination erkannte, sind viele Versuche gemacht worden, dieses merkwürdige Phänomen zu ergründen; in gleicher Weise haben auch die Aenderungen der horizontalen Intensität und Inclination, seitdem sie von Hansteen und Kupffer durch Beobachtung sind nachgewiesen worden, die Aufmerksamkeit und das Nachdenken der Physiker beschäftigt. Man kann indessen kaum sagen, daß wir jetzt noch einer annehmbaren Erklärung näher gekommen sind.

Von Denjenigen, welche eine Erklärung aufzustellen sich bemühten, haben die meisten von galvanischen oder thermomagnetischen Strömen gesprochen, die an der Erdoberfläche durch die Sonnenwärme entstehen, und sich daselbst fortpflanzen sollen. Es hat indessen bisher keinen Physiker gegeben, der durch Anwendung von Wärme in gemischten Materialien, wie sie an der Erdoberfläche sich vorfinden, einen galvanischen Strom hervorgebracht hätte. Entständen aber auch wirklich solche Ströme, so wäre doch wohl zu vermuthen, daß nach der verschiedenartigen Beschaffenheit der Oberfläche ihre Fortpflanzung und mithin auch ihre Wirkung verschieden seyn würde. Die Erfahrung aber lehrt, daß auf dem Meere, wie auf dem festen