NOUVELLE MÉTHODE POUR LA DÉTERMINATION DU RESTE
DE LA FORMULE DE TAYLOR.

PAR LE D^r. ANT. WINCKLER.

La détermination du reste de la formule de Taylor, qui a occupé d'abord d'Alembert et qui plus tard a été trouvée de différentes manières par Lagrange, Ampère et Cauchy, doit résulter immédiatement du développement de la série, en sorte, qu'on n'y a besoin que de la définition du quotient différentiel; car ce n'est qu'alors qu'on peut mettre en évidence cette formule déjà dans les éléments, pour en faire application plus tard à la solution d'un grand nombre de questions; et pour faire voir les grand avantages qu'elle y fournit.

Dans toutes les méthodes connues la détermination du reste est ou trop prolix, ou on n'en parle que bien tard dans l'exposition du calcul différentiel, — bien souvent en supposant la forme des membres de la série, — ou enfin, on la remet jusqu'au calcul intégral, de manière que les cas, où l'on aurait pu faire les applications les plus importantes de cette formule, sont déjà déterminés tous par des méthodes plus compliquées.

La méthode suivante satisfera peut-être mieux aux conditions susdites, en développant en même temps la série et son reste d'une manière, qui s'offre, pour ainsi dire de soi même et qui n'exige que la connaissance des trois corollaires suivants:

A. Une fonction croît ou décroît avec sa variable croissante, selon que la valeur de son quotient différentiel est positive ou négative, ou, ce qui revient au même, la différence $\varphi(x+y) - \varphi(x)$ est de même signe que $\varphi'(x)$, — pourvu que $\varphi'(x)$ ne change pas de signe pour des valeurs entre les limites x et $x+y$ de la variable.

B. Le quotient différentiel $f^{(n)}(x)$ ne peut être fini et continu dans l'intervalle de x à $x+y$ de la variable, si ne sont aussi les quotients précédents $f^{(n-1)}(x)$, $f^{(n-2)}(x) \dots f'(x)$, $f(x)$.

C. L'équation $\frac{df(x+y)}{dx} = \frac{df(x+y)}{dy}$ a toujours lieu, quand on suppose finie et continue la fonction $f(x+y)$ pour toutes les valeurs de x jusqu'à $x+y$.

1.

Le développement désiré de la fonction $f(x+y)$ jusqu'à la puissance n^{me} de

l'accroissement y de la variable soit :

$$f(x+y) = X_0 + X_1 y + X_2 y^2 + \dots + X_{n-2} y^{n-2} + X_{n-1} y^{n-1} + U,$$

$X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ étant des fonctions de la seule variable x ; et soit U le reste, fonction de x et y , que nous allons déterminer.

En différentiant par rapport à x , et puis par rapport à y , nous aurons l'équation :

$$\begin{aligned} X'_0 + yX'_1 + y^2X'_2 + \dots + y^{n-2}X'_{n-2} + y^{n-1}X'_{n-1} + \frac{dU}{dx} \\ = X_1 + 2yX_2 + 3y^2X_3 + \dots + (n-1)y^{n-2}X_{n-1} + \frac{dU}{dy}. \end{aligned}$$

On peut satisfaire identiquement à cette équation en faisant :

$$X_1 = X'_0; \quad 2X_2 = X'_1; \quad 3X_3 = X'_2; \quad \dots \quad (n-1)X_{n-1} = X'_{n-2} \quad (1)$$

et

$$y^{n-1}X_{n-1} + \frac{dU}{dx} = \frac{dU}{dy}. \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) ne renferment que n conditions entre $n+1$ quantités à déterminer. Il faut donc pour les déterminer toutes, ajouter encore la condition, que U s'évanouisse, si l'on pose $y=0$. On obtient donc :

$$X_0 = f(x), \quad X_1 = f'(x); \quad X_2 = \frac{1}{1.2} f''(x); \quad \dots \quad X_{n-1} = \frac{1}{1.2\dots(n-1)} f^{(n-1)}(x)$$

$$X'_{n-1} = \frac{1}{1.2.3\dots(n-1)} f^{(n)}(x)$$

et par conséquent l'équation (2) devient :

$$\frac{y^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{(n)}(x) + \frac{dU}{dx} = \frac{dU}{dy}$$

ou, si l'on pose, pour abréger

$$U = \frac{y^n}{1.2.3\dots n} \cdot u$$

et remarquant ensuite que

$$\frac{dU}{dx} = \frac{y^n}{1.2.3\dots n} \cdot \frac{du}{dx}; \quad \frac{dU}{dy} = \frac{y^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} u + \frac{y^n}{1.2\dots n} \frac{du}{dy}$$

nous aurons, comme on voit bien aisément, l'équation

$$u - f^{(n)}(x) + \frac{y}{n} \left(\frac{du}{dy} - \frac{du}{dx} \right) = 0.$$

2.

L'intégration de cette équation aux différences partielles donnerait immédiatement le reste sous la forme connue d'une intégrale définie. Mais on peut trouver la valeur de u d'une manière tout-à-fait différente; en cherchant deux valeurs de u , qui produisent dans l'expression

$$F(u) = u - f^{(n)}(x) + \frac{y}{n} \left(\frac{du}{dy} - \frac{du}{dx} \right) = 0$$

un changement de signe; car il existera nécessairement entre ces deux valeurs une autre valeur qui satisfera à l'équation :

$$F(u) = 0.$$

Substituons donc dans l'équation précédente au lieu de u :

$$u_1 = f^{(n)}(x) \quad \text{on aura} \quad F(u_1) = -\frac{y}{n} f^{(n+1)}(x)$$

et de même

$$u_2 = f^{(n)}(x + y) \quad \text{on aura} \quad F(u_2) = f^{(n)}(x + y) - f^{(n)}(x).$$

Quant aux signes de ces deux valeurs de $F(u)$ il faut distinguer deux cas :

Les expressions

$$f^{(n+1)}(x) \quad \text{et} \quad f^{(n)}(x + y) - f^{(n)}(x)$$

peuvent avoir des signes égaux ou opposés.

Dans le cas premier, si les signes sont égaux, les signes de $F(u_1)$ et de $F(u_2)$ sont opposés. Supposons donc que la fonction $f^{(n)}(x)$ soit finie et continue entre les valeurs x et $x + y$ de la variable: il faut nécessairement qu'entre

$$u_1 = f^{(n)}(x) \quad \text{et} \quad u_2 = f^{(n)}(x + y)$$

se trouve une valeur de u , qui fasse évanouir la fonction $F(u)$. Par conséquent on peut déterminer la valeur d'une quantité x entre 0 et +1 en sorte que

$$u = f^{(n)}(x + xy) \quad \text{et} \quad F(u) = 0.$$

Si, dans le second cas, les signes des expressions

$$f^{(n+1)}(x) \quad \text{et} \quad f^{(n)}(x + y) - f^{(n)}(x)$$

sont opposés, il est clair que $f^{(n+1)}(x)$ entre les deux valeurs x et $x + y$ de la variable changera au moins une fois le signe (v. A.) et par conséquent, qu'elle passera dans cet intervalle, une fois au moins, du croissement au décroissement.

3.

Cela posé, soient x_0 , x_1 , x_2 , ... les valeurs constantes de x , contenues dans les limites x et $x + y$, qui font que

$$f^{(n+1)}(x) = 0$$

et ces valeurs soient ordonnées de manière, qu'on ait $x < x_0 < x_1 < \dots < x + y$.

Si l'on substitue

$$u_0 = f^{(n)}(x_0), \quad \text{on aura} \quad F(u_0) = f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x)$$

puisque x_0 est constante et indépendante de x et y . Or x_0 est la plus petite de toutes les valeurs qui sont au-dessus de x , et qui font disparaître $f^{(n+1)}(x)$; il faut donc que les fonctions :

$$f^{(n+1)}(x) \quad \text{et} \quad f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x) = F(u_0)$$

aient les mêmes signes (v. A.) : on conclut de là que :

$$F(u_0) \quad \text{et} \quad F(u_2)$$

ont aussi des signes opposés, d'où il suit qu'il y a entre

$$u_0 = f^{(n)}(x_0) \quad \text{et} \quad u_2 = f^{(n)}(x + y)$$

une valeur de u , et de même entre x_0 et $x + y$ une valeur correspondante de x , qui fait $F(u) = 0$.

Mais il n'en est pas moins sûr que, si cette valeur de x est entre x_0 et $x + y$, elle se trouvera aussi dans l'intervalle amplifié de x jusqu'à $x + y$, et qu'on peut la représenter de même par $x + xy$, d'où il suit que

$$u = f^{(n)}(x + xy)$$

comme dans l'art. 2. — On voit de cette discussion, que ces deux cas, séparés au commencement, peuvent être compris dans un même résultat.

Sans supposer finies et continues (v. C.) les fonctions $f(x)$ et $f^{(n)}(x)$ dans l'intervalle de x à $x + y$ de la variable, les conclusions précédentes ne seraient pas variables. Cette supposition n'aurait pas lieu (v. B.) si les fonctions $f^{(n+1)}(x)$, $f^{(n-2)}(x)$, $\dots$, $f'(x)$, $f(x)$ ne restaient pas finies et continues dans l'intervalle marqué.

Résumant tout cela, nous aurons ce Théorème :

Si les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $\dots$, $f^{(n-1)}(x)$, $f^{(n)}(x)$ sont finies et continues pour toute valeur de la variable entre x et $x + y$, et si l'on désigne par z une fraction comprise entre les limites 0 et + 1, et déterminée de manière que

$$u = f^{(n)}(x + zy) \quad \text{satisfasse à l'équation} \quad u - f^{(n)}(x) + \frac{y}{n} \left(\frac{du}{dy} - \frac{du}{dx} \right) = 0$$

on a toujours :

$$f(x + y) = f(x) + \frac{y}{1} f'(x) + \frac{y^2}{1.2} f''(x) + \dots + \frac{y^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x) + \frac{y^n}{1.2.3 \dots n} f^{(n)}(x + zy).$$

Q. e. d.

Gratz. 1859.