LE TRASFORMAZIONI RAZIONALI DELLO SPAZIO
INERENTI AD UNA CONICA.

Nota di **Mario Pieri**, in Torino.

Adunanza del 26 novembre 1893.

Saranno oggetto di questa nota la generazione e i caratteri proiettivi delle più generali fra le trasformazioni Cremoniane dello spazio, involutorie e non involutorie, per cui la retta congiungente due punti omologhi tagli sempre una conica data e non contenga, in generale, altre coppie di punti omologhi. Benchè la totalità di queste rette sia un caso particolare del *complesso tetraedrale*, le due trasformazioni più generali di cui si tratta non son comprese fra quelle che individuano complessi tetraedrali non degeneri; anzi sono *d'ordine* più grande e di tutt'altri caratteri: nel modo stesso che le trasformazioni più generali inerenti al complesso tetraedrale non hanno riscontro fra quelle che appartengono ad altri complessi quadratici meno particolari, p. es. ai complessi aventi per superficie singolare la superficie romana di Steiner o la rigata biquadratica non specializzate (*).

(*) Delle trasformazioni birazionali inerenti alle tre specie di complessi quadratici ora nominate tratta ampiamente una memoria del sig. D. Montesano « *Sulle trasformazioni univoche dello spazio che determinano complessi quadratici di*

Un fatto analogo fu già da me rilevato a proposito delle trasformazioni birazionali inerenti al complesso lineare speciale (*).

Indicheremo appresso con p^2 la conica data, supposta non degenerare, e con π il suo piano; con Γ il complesso delle rette appoggiate alla medesima, con I o T rispettivamente *la più generale* possibile delle trasformazioni involutorie e non involutorie che hanno le coppie di punti omologhi *biunivocamente* distribuite sui raggi di Γ ; e infine con Σ e Σ' i due spazi sovrapposti e riferiti fra loro per mezzo di quella. — È chiaro, che la trasformazione T fa corrispondere univocamente e prospettivamente i raggi di Γ ai punti di Σ o Σ' e viceversa: così che lo studio di essa si confonde in gran parte con quello di una *rappresentazione prospettiva* dei raggi di Γ sullo spazio ordinario, anzi della più generale possibile.

1. Il complesso Γ contiene ∞^3 congruenze γ , del 1° ordine e 2° classe, ognuna delle quali consta di rette appoggiate simultaneamente ad uno stesso raggio c di Γ e alla conica p . Di sì fatte congruenze, due qualunque hanno a comune *una schiera rigata* di Γ , e tre qualunque (in generale) *un sol raggio* di Γ : ed è chiaro che *le coppie di punti omologhi in T , che stanno sui raggi d'una tal congruenza γ generano due superficie del quarto ordine χ , χ' che passano entrambe semplicemente per la direttrice c di γ e contengono la conica p^2 come doppia.* — Al variare di γ , ciascuna delle due superficie χ^4 e χ'^4 descrive un sistema triplo omaloidico; perchè tre raggi qualunque di Γ si appoggiano generalmente ad un sol raggio di Γ . — Le due superficie χ e χ' inerenti alla congruenza γ sono tagliate da ogni schiera rigata p^2 di questa secondo due cubiche sghembe r , r'^3 , descritte dai punti omologhi di Σ e Σ' che stanno su p : ciascuna di esse incontra due volte c e tre volte p^2 .

rette » pubblicata nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo (Maggio 1892); nella quale è anche dimostrato, che i soli complessi quadratici atti a sostenere una trasformazione birazionale sono quelli contenenti una stella di raggi o congruenze lineari. Ma non può dirsi che l'argomento delle trasformazioni birazionali inerenti a complessi quadratici sia compiutamente esaurito da questo importante lavoro.

(*) In questi Rendiconti, t. VI, p. 234.

Rend. Circ. Matem., t. VII, parte 1ª. — Stampato il 20 dicembre 1893. 38

Se la retta c descrive una schiera p^2 di Γ , la superficie χ^4 genera un fascio (χ) ; e similmente la superficie χ'^4 : la base di un tal fascio si comporrà della p^2 contata quattro volte, della r^3 , e di una *quintica ellittica* o^5 comune a tutte quante le superficie χ^4 , quindi fondamentale in $\mathbf{T}$, la quale taglierà in cinque punti entrambe le linee p^2 ed r^3 : una curva analoga o'^5 fondamentale in $\mathbf{T}^{-1}$ ha luogo nello spazio Σ' . I due fasci (χ) e (χ') sono riferiti univocamente fra loro, e l'intersezione variabile di due superficie omologhe, spogliata di una generatrice c di p , è un luogo di punti uniti per $\mathbf{T}$; onde la trasformazione $\mathbf{T}$ ammette una superficie punteggiata unita σ del sesto ordine, che passa per entrambe le linee o^5 , o'^5 e contiene la p^2 come tripla.

2. Se L è un punto qualunque di p^2 , la sezione del piano Lc sulle due superficie χ^4 e χ'^4 inerenti a c si comporrà, tolta via questa retta, di due curve descritte dai punti omologhi di Σ e Σ' , che appartengono ai raggi del fascio Lc . Pertanto le coppie di punti corrispondenti in $\mathbf{T}$, che stanno sui raggi d'una stella L di Γ generano due superficie cubiche λ e λ' aventi un punto doppio in L , passanti per p^2 e rispettivamente per le due linee o^5 , o'^5 . Al variare del punto L , le superficie λ^3 , λ'^3 descrivono due fasci (λ) e (λ') ; e però le superficie λ^3 dovranno mutuamente toccarsi lungo tutta la conica p^2 , luogo del punto doppio L : così che, dalle due linee p e o in fuori, esse non potranno avere altri punti a comune.

Mediante i due fasci (λ) e (λ') , univocamente riferiti alla punteggiata di 2° ordine (L) , è individuata la trasformazione $\mathbf{T}$. D'altra parte una quintica ellittica ed una conica con cinque punti a comune individuano sempre un fascio di superficie cubiche passanti per esse e ciascuna avente un punto doppio variabile lungo la conica (*); per

(*) Invero, nella proiezione stereografica di una qualunque superficie λ^3 dal suo punto doppio L (rappresentato nella conica L_{123456}^2) ogni curva o^5 avrà per immagine una $O_{1232324252}^5$. Ora il luogo risultante dalle linee L^2 , O^5 e $(P_6)^2$, dove P è una retta qualsivoglia uscente dal punto 6, rappresenta l'intersezione totale di quella superficie con un'altra superficie cubica passante per o^5 , e di più tangente la prima lungo tutta una conica p^2 , la quale passa per L e si appoggia cinque volte ad o^5 . — Cfr. una mia nota « *Sui sistemi lineari di monoidi* » nel Giornale di Matematiche, v. XXXI.

la qual cosa è chiaro che la trasformazione birazionale T inerente ad una conica p^2 è pienamente determinata per mezzo di due quintiche ellittiche o^5 , o'^5 , ognuna delle quali incontra cinque volte la conica.—I due fasci (λ) e (λ') determinati da queste linee, come pure i due fasci (χ) e (χ') determinati dalle medesime e da una schiera rigata di Γ (n° 1) porgono due modi assai semplici per costruire la trasformazione T .

3. La superficie, che in forza di T corrisponde a un piano qualunque di Σ incontra questo piano in due cubiche annesse alle rette di Γ giacenti sul medesimo (n° 2) e nella traccia di esso piano sulla superficie unita σ^6 . Pertanto la T e la sua inversa sono entrambe del 12° ordine, e per esse la p^2 è fondamentale sestupla; mentre la o^5 è fondamentale tripla in T e così la o'^5 in T^{-1} .

Ogni corda di o^5 , la quale si appoggi in un punto L a p^2 , giacendo per intero sulla superficie cubica λ inerente alla stella L , dovrà corrispondere per intero alla sua traccia sulla superficie λ' che corrisponde a λ . Il luogo di questo punto è una curva del 15° ordine e genere 1; perciocchè la rigata δ^{10} luogo di essa corda contiene la p^2 come quintupla e la o^5 come tripla, nè può avere altre linee nodali. Dunque sulla rigata δ^{10} (o δ^{10}), generata dalle corde di o' (o di o) che incontrano p , sta come linea direttrice una curva ellittica d^{15} (o d^{15}) fondamentale semplice in T (o T^{-1}), a ciascun punto della quale corrispondono tutti i punti della generatrice che passa per esso. — La rigata δ' è tagliata dalla superficie doppia σ^6 , fuori di p ed o' , secondo la curva d , la quale si appoggia quindici volte a p e venticinque volte ad o . Nè vi sono altre linee fondamentali in T , dalle p , o e d in fuori.

4. Il fascio (λ) , o (λ') , è tagliato dal piano π della conica p secondo un fascio di raggi, il cui centro P , o P' , è un punto di questa conica, nel quale il piano stesso è toccato da tutte le superficie del fascio. Il cono che oscula nel punto doppio L una superficie λ^3 sega la superficie λ'^3 inerente al medesimo punto secondo una sestica, la quale ha un punto quadruplo in L , passa per P , taglia ancora una volta p^2 e si appoggia dieci volte ad o' . Al variare di L , quel cono

osculatore descrive un sistema d'indice 3 (perchè il luogo d'un punto A di Σ , tale che la retta AA' passi per un punto dato, si appoggia tre volte a p^2) riferito univocamente al fascio (λ'); pertanto *alla conica fondamentale p di Σ corrisponde in Σ' una superficie dell'11° ordine, che passa con cinque falde per p (tre delle quali tangenti rispettivamente le tre falde di σ^6 lungo tutta la conica), con tre falde per o' e con una sola falda per d' .*

La cubica r' ($n^\circ 1$), che giace sul cono proiettante la conica p da un punto qualunque di o , descrive, al variare di questo punto, una superficie contenente la p^2 come decupla, ecc; quindi *alla curva fondamentale o' di Σ corrisponde in Σ' una superficie del 20° ordine passante dieci volte per p^2 , cinque volte per o' , due volte per d' , e una volta per o' .*

Detta m una retta arbitraria di Σ ed M la sua traccia sul piano π , e supposto che un punto A di m vada accostandosi indefinitamente ad M ; la retta AA' , che unisce quel punto col suo corrispondente in Σ' , tenderà verso la posizione MP , e il punto A' verso la posizione P , per modo che il punto infinitamente vicino ad M avrà per omologo un punto infinitamente vicino a P sul piano che tocca in P le superficie λ' . Ne seguita che *i punti P e P' corrispondono, per le trasformazioni T^{-1} e T rispettivamente, a tutto il piano π ; in modo che la linea corrispondente ad una retta qualunque di Σ (o Σ') passa per P (o P') toccando in questo punto il piano tangente comune a tutte le superficie λ' (o λ): il quale è anche toccato (con una falda) dalle superficie che corrispondono ai piani.*

5. Ciò che segue è per la trasformazione involutoria I . In questo caso è chiaro che *le ∞^2 coppie di punti coniugati che stanno sui raggi d'una data congruenza γ ($n^\circ 1$) generano una superficie χ del sesto ordine passante per la direttrice c di γ e contenente la p^2 come tripla; che i punti coniugati giacenti sui raggi d'un fascio Lc di Γ generano una quintica dotata di un punto triplo in L e di un punto doppio nell'altra traccia del piano Lc su p^2 ; e che il luogo delle coppie di I appartenenti ai raggi d'una stella qualunque L di Γ è una superficie λ del quinto ordine con un punto triplo in L e una conica doppia in p , superficie che genera un fascio (λ) al variare*

di L : così che l'involuzione I è sempre generabile mediante un fascio di superficie autoconjugate λ^5 , ognuna delle quali abbia un punto triplo variabile lungo la conica p , e (di conseguenza) passi due volte per questa linea toccando le due falde di ogni altra superficie del fascio lungo tutta la medesima. Oltre p^2 , le superficie λ avranno a comune una curva o , del 13° ordine e genere 14, appoggiata tredici volte a p .

Tutte le superficie χ^6 passano per la curva o^{13} : due qualunque di esse si tagliano ulteriormente nella p^2 , e in una quintica r^5 di genere 2, luogo dei punti coniugati posti sui raggi d'una schiera ρ^2 di Γ ; la quale sega cinque e tredici volte le curve p^2 ed o^{13} . Le ∞^3 superficie χ^6 formano un sistema lineare (n° 1) e tre qualunque di esse si tagliano generalmente in due soli punti variabili, coniugati in I ; per la qual cosa l'involuzione I si può sempre ottenere come trasformazione congiunta di una certa corrispondenza doppia del sesto ordine e genere 2, nascente dal riferire omograficamente i piani d'uno spazio Σ , (spazio doppio) alle ∞^3 superficie χ^6 dello spazio Σ di I (spazio semplice) (*). È chiaro, che la curva o^{13} non potrà stare in una superficie del 4° ordine contenente la p^2 come doppia, nè (quindi) sopra una superficie cubica o quadrica passante per p^2 : chè, se ciò fosse, una tal superficie si dovrebbe necessariamente staccare da tutte le superficie χ^6 .

6. Alla domanda, se per qualunque curva o^{13} di genere 14 appoggiata tredici volte a p^2 , ma non situata in una superficie del 4° ordine contenente la p^2 come doppia, sia sempre individuato un sistema lineare triplo di superficie χ^6 e per conseguenza una trasformazione I , si risponde affermativamente, in virtù dell'osservazione che segue.

Le superficie del sest'ordine obbligate soltanto a contenere la conica p^2 come tripla sono ∞^{29} , e segano la data curva o^{13} secondo un'involuzione razionale d'ordine 39 e di una certa dimensione x . È chiaro che il numero x farebbe immediatamente conoscere la postulazione di o^{13} rispetto alle dette superficie; perchè una qualunque di esse, ove sia costretta a passare per $x + 1$ punti generici di questa

(*) Vedi De Paolis «Le trasformazioni doppie dello spazio» nelle Memorie della R. Accademia dei Lincei, I₄ (1885).

curva, la conterrà per intero. Ora la detta *serie lineare* g_{39}^x è per certo una serie *non speciale*, dal momento che l'ordine suo 39 è superiore al doppio del genere di o^{13} ; quindi è sicuramente $39 - x \geq 14$, ossia $x \leq 25$ (*). Pertanto le superficie del sest'ordine passanti per o^{13} e contenenti la p^2 come tripla formeranno un sistema lineare $[\chi^6]$ di dimensione $y \geq 3$. D'altra parte un piano diverso da π non può, per le ipotesi fatte intorno la o^{13} , staccarsi da alcuna superficie del sistema; di guisa che un tal piano sarà segato in un sistema lineare $[k^6]$ di curve del sest'ordine avente la stessa dimensione y di $[\chi^6]$. Nè può avvenire che i passaggi per le curve p^2 , o^{13} facciano acquistare una linea *doppia* alle superficie χ^6 (la quale non potrebbe esser, se mai, che una *retta* doppia comune a tutte quante); perciocchè in tale ipotesi le curve del sistema $[k^6]$ si taglierebbero in un sol punto variabile.

Ora poniamo pure che le superficie di $[\chi^6]$ abbiano tutte a comune un'altra linea d'ordine τ ($0 \leq \tau \leq 5$). La serie lineare, d'ordine $5 - \tau$ e dimensione $y - 1 \geq 2$, staccata sulla curva generica del sistema $[k^6]$ dalle altre curve di questo, sarà necessariamente *speciale*, dal momento che $y - 1$ è maggiore di $5 - \tau - 4$ (**); e però (ivi) dovrà esser tagliata sulla curva stessa da *coniche* passanti per i due punti tripli e per altri $\tau + 1$ punti semplici [in modo cioè, che risulti $2.6 - 2.3 - (\tau + 1) = 5 - \tau$]; onde la sua dimensione sarà non maggiore di $5 - (\tau + 3)$. Si conclude essere:

$$2 - \tau \geq y - 1 \geq 2,$$

e p. c. $\tau = 0$, $y = 3$; dunque il sistema lineare $[\chi^6]$ è triplamente infinito, e non possiede elementi base, dalle linee p , o in fuori (***).

(*) V. Brill e Nöther, Mathem. Annalen, VII, pag. 278.

(**) V. Brill e Nöther, loc. cit.

(***) Ogun vede che la medesima argomentazione serve del pari ad escludere l'esistenza di punti staccati comuni a tutte le superficie di $[\chi^6]$.—Alla conclusione $y = 3$, ossia $x = 25$, si può anche giunger, del resto, per una via più diretta e più breve, che mi fu gentilmente indicata dal prof. G. C a s t e l n u o v o. Ferme stanti le ipotesi fatte intorno la o^{13} , le quadriche passanti per p^2 la segano in una serie g_{13}^4 , la cui serie *doppia* è tagliata dalle ∞^{13} superficie del quart'ordine passanti doppiamente per p^2 , quindi è una g_{26}^{13} e precisamente la serie *cano-*

Due superficie qualunque di $[\chi^6]$ si tagliano, fuori delle linee p^2 , o^{13} , lungo una quintica r^5 di genere 2 (come agevolmente si vede), le trisecanti della quale generano una rigata quadrica ρ^2 passante per p^2 : onde ogni superficie del sistema dovrà contenere una retta di Γ . Tutte le superficie di $[\chi^6]$ non contenenti r^5 , la segano in coppie di punti conjugati dell'unica involuzione razionale g_2^1 esistente sovr'essa; involuzione staccata, com'è noto, dalle generatrici della schiera associata a ρ^2 : per la qual cosa tre superficie del sistema hanno generalmente a comune due soli punti variabili, che stanno entrambi sopra un medesimo raggio di Γ . Infine, presi a piacere sopra un raggio qualunque a di Γ , non situato in π , due punti che non siano comuni ad ∞^2 superficie del sistema, il fascio da essi determinato in $[\chi^6]$ avrà per base una r^5 passante per essi e per un terzo punto della a ; e però questa retta apparterrà tutta quanta a una determinata superficie del fascio. E con questo è certificata l'asserzione, da cui move il presente n°.

7. Le corde triple di o^{13} formano una rigata del 286° grado (*), per cui la curva stessa è direttrice 41-pla: onde vi saranno 39 corde triple di o^{13} appoggiate a p^2 fuori dei punti p^0 ; e ognuna di esse già-

nica di o^{13} : mentre la g_{39}^x , tagliata dalle superficie χ^6 , è la serie *tripla* della g_{13}^4 . Ora, poichè la g_{13}^4 è *completa* (come si rileva dal fatto, che una g_{13}^5 non può appartenere ad una curva di genere > 12) $13 - 4 = 9$ punti del suo gruppo generico G_{13} risultano certo indipendenti per la serie g_{26}^{13} (teorema di R i e m a n n-R o c h); e d'altra parte 4 punti comunque scelti in G_{13} risultano al certo indipendenti per la serie g_{13}^4 . Dunque (C a s t e l n u o v o « *Sui multipli d'una serie lineare*, etc. » in questi Rendiconti, t. VII, pag. 94) per la serie *somma*:

$$g_{39}^x = g_{26}^{13} + g_{13}^4$$

risultano certo indipendenti $9 + 4 - 1 = 12$ punti comunque scelti in G_{13} . Ne viene che G_{13} impone *almeno* 12 condizioni ad un gruppo di g_{39}^x che debba contenerlo; e quindi che la g_{26}^{13} , serie *residui* di G_{13} rispetto a g_{39}^x , ha una dimensione non maggiore di $x - 12$. Dunque $x \geq 25$; e p. c. $x = 25$, in virtù dell'altra relazione $x \leq 25$ superiormente notata.

(*) Vedi Z e u t h e n « *Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche algébrique*, n° 5, negli Annali di Matematica, III₂ (1870).

cerà per intero sopra ogni superficie χ^6 che ne contenga un sol punto. In altri termini *esistono 39 rette $h_{(1)}, h_{(2)}, \dots, h_{(39)}$ fondamentali semplici e parassite per I.*

Il fascio (λ) (n° 5) è tagliato dal piano π secondo un fascio di raggi, il cui centro è un punto P di p^2 , nel quale tutte le superficie λ^5 toccano il piano π (e un certo piano ψ diverso da π). *Tutto il piano π è coniugato al punto P ; e però questo piano dovrà staccarsi due volte dalla Jacobiana delle superficie χ^6 (*). Pertanto (**) il luogo dei punti doppi di I è una superficie σ del 18° ordine passante nov e volte per p^2 , tre volte per σ^{13} e una volta per le rette h .* La prima polare di un punto L di p^2 rispetto alla superficie λ^5 inerente al medesimo taglia questa superficie nella conica p^2 , nella retta LP , e in una curva del 15°-ordine con un punto 9-plo in L , la quale al variare di L descrive appunto la superficie doppia σ^{18} .

Se sono $L^{(1)}, L^{(2)}$ le tracce d'un piano arbitrario sulla conica p^2 , il luogo dei punti coniugati esistenti in questo piano si spezzerà nelle due quintiche da esso tagliate sulle superficie $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}$ e nella traccia del medesimo sopra la superficie doppia. Pertanto *la trasformazione I è del 28° ordine, e le superficie che fa corrispondere ai piani passano quattordici volte per p^2 , cinque volte per σ^{13} , e una volta per le rette h .* Nè la I possiede altre linee fondamentali.

8. Una superficie λ^5 è segata dal cono tangente in L secondo la retta LP ed una curva razionale del 14° ordine, che passa per P toccando ivi il piano ψ ed ha un punto 11-plo in L . Di questi undici rami, due toccano in L la conica p^2 svolgendosi poi, nelle vicinanze di L , sopra i due piani ivi tangenti le superficie λ^5 ; gli altri nove sono toccati in L dalle nove falde di σ^{13} (n° 7): di più la stessa curva si appoggia 39 volte ad σ^{13} . Al variare di L quel cono osculatore descrive un sistema d'indice 5; laonde *alla conica p^2 è coniugata una superficie Π' del 27° ordine, che passa con tredici falde per p^2 —nove delle quali tangenti alle nove falde di σ e le altre quattro alle due falde di ogni superficie λ^5 lungo tutta questa conica — con*

(*) De Paolis, loc. cit. § V.

(**) De Paolis, loc. cit. § V.

cinque falde per σ^{13} , e contiene le rette h . Il piano π taglia Π' in p^2 , e nella retta tangente questa conica in P .

Un punto qualunque di σ^{13} è conjugato ad una quintica, che ha un punto triplo in esso (coi rami ivi tangenti le tre falde di σ), si appoggia altrove undici volte ad σ^{13} , e cinque volte a p^2 . Si riscontra agevolmente che il luogo d'una tal curva, cioè *la superficie Ω' conjugata di σ , è del 78° ordine, con le linee σ e p rispettivamente multiple secondo 14 e 39 e le h per rette triple* — e che tre delle sue falde per σ toccano le tre falde di σ^{18} lungo tutta la linea.

9. Come si è fatto al n° 6, per egual modo si dimostra, che le superficie del quint'ordine χ^5 passanti doppiamente per p^2 e semplicemente per σ^{13} formano un sistema lineare ∞^2 . In altri termini *esiste una rete $[\chi^5]$ di superficie del quint'ordine, autoconjugate in I , ognuna delle quali, presa insieme col piano π , appartiene al sistema triplo $[\chi^6]$. A questa rete appartiene il fascio (λ^5) : onde l'intersezione variabile di due superficie qualunque della rete sarà una quartica piana r^4 , la quale passerà per P toccando il piano ψ , e avrà un nodo in un punto L variabile sopra p^2 ; cioè sarà segata sopra una certa superficie λ^5 da un piano contenente la retta LP di questa: quindi anche le superficie χ^5 avranno nel punto P una falda che tocca il piano ψ . Si deduce che *gli ∞^2 punti del piano π (n° 7) sono conjugati agli ∞^2 punti infinitamente vicini a P sulle ∞^2 curve r^4 ; e che, per conseguenza, il piano ψ è toccato nel punto P sia dalle curve conjugate alle rette, sia (con una falda) dalle superficie che corrispondono ai piani (n° 7).**

10. Voglionsi anche rilevare i seguenti caratteri della *trasformazione doppia* inerente alla conica p (n° 5). Nello spazio Σ , compariscono un punto fondamentale P_i di 1ª classe — al quale corrisponde in Σ il punto P e il piano π , in modo che i piani e le rette per P_i danno rispettivamente le superficie χ^5 e le curve r^4 (n° 9) — e 39 punti fondamentali di 2ª classe $H_i^{(1)}, H_i^{(2)}, \dots, H_i^{(39)}$, corrispondenti alle rette parassite h . — La superficie limite (Uebergangsfläche) σ_i è del sesto ordine, con 39 punti doppi nei punti $H_i^{(*)}$. — Le sestiche razionali

(*) De Paolis, loc. cit., § V.

corrispondenti in Σ_i alle ∞^4 rette di Σ passano pel punto P_i ; e toccano la superficie limite in diciotto punti variabili, vale a dire dovunque la incontrano. Le superficie razionali del quinto ordine corrispondenti ai piani di Σ passan semplicemente per P_i e pei punti H_i , hanno due rette doppie (sghembe) variabili, e sono circoscritte a σ_i (lungo curve del 15° ordine e genere 25 passanti pei punti H_i): quelle due rette doppie si appoggiano costantemente ad una retta p_i uscente da P_i , che è l'asse del fascio di piani riferito al fascio (λ) di Σ ; e viceversa ogni retta che si appoggi a quest'asse è doppia per una determinata superficie del sistema.

Ad un punto qualunque di p corrisponde una cubica piana che passa per P_i , ha un nodo sulla retta p_i , e tocca σ_i^6 in nove punti variabili: il luogo di essa è una superficie Π_i del quinto ordine circoscritta a σ_i , che passa pei punti H_i , ha un punto triplo in P_i e due rette doppie sghembe infinitamente vicine, una delle quali è la retta p_i .—Ad un punto qualunque di σ^{13} corrisponde una retta che tocca tre volte σ_i^6 , ed ha per luogo una rigata Ω_i del 13° ordine con un punto triplo in ciascun punto H_i ; Ecc., ecc.

Torino, ottobre 1893.

MARIO PIERI.