PROPRIETA' DEI CENTRI CONJUGATI PRINCIPALI E DEI PIANI PRINCIPALI
CONJUGATI, DEDOTTE DALLA CONSIDERAZIONE DEGLI ASSI DEI PENNELLI
LUMINOSI, ED APPLICAZIONE DI ESSE AL CALCOLO DEGLI STROMENTI
OTTICI COMPOSTI DI PIU' LENTI DELLE CUI GROSSEZZE
SI DEBBA TENER CONTO.

NOTA
DEL PROF. O. F. MOSSOTTI.

1.

Nell'estratto ragionato, che il Professore Cattaneo ha dato in questi *Annali* delle prime due Parti della mia Memoria sulla Teoria degli stromenti ottici, leggesi il seguente passo : « Queste applicazioni » cioè quelle fatte alla spiegazione degli effetti ottici fra alcuni degli stromenti più in uso « lasciano però desiderare che, come, sulle » prime, nella teoria delle lenti semplici aveva l'A. preso a calcolo anche le grossezze delle medesime, così, anzi che trascurarle di poi, avesse cercato quale influenza essa abbia, e ne' microscopi e nei cannocchiali e nel micrometro a doppia » immagine. » In seguito il dotto Estensore ha indicato come l'impiego dei *punti principali* considerati da Gauss servirebbe all'oggetto, ed ha arricchito le sue osservazioni col notare delle nuove proprietà dei punti medesimi, e col far conoscere l'esistenza d'altre coppie di punti che godono di proprietà analoghe.

Questo desiderio manifestato dal detto Professore, e quello nato in me di dare miglior compimento alla mia Teoria, hanno richiamato la mia attenzione sui punti detti da Gauss principali, e mi sono provato a tentare, per mezzo della considerazione degli assi dei pennelli luminosi, una deduzione più semplice della loro esistenza, ed un'interpretazione più esplicita della loro natura. I risultati delle ricerche fatte formeranno il soggetto d'un Appendice da pubblicarsi col seguito della Memoria, frattanto spero che non sarà discaro al lettore di questi *Annali* di conoscerne fin d'ora il contenuto.

2.

Deduzione dei centri conjugati.

La proprietà che serve a definire il raggio che costituisce l'asse d'un pennello luminoso che attraversa una lente è espressa (*), usando delle stesse denominazioni della Memoria che sono pure state conservate nell'Estratto di questi *Annali*, da

$$(1) \quad \frac{\cos Y_2}{v_2} = \frac{\cos Y_0}{v_0}, \quad \text{e} \quad \frac{\cos Z_2}{v_2} = \frac{\cos Z_0}{v_0} :$$

(*) Vedasi l'articolo 3 del Capitolo II, Parte II della Memoria.

cioè è quel raggio che entra ed esce dalla lente parallelamente a se stesso, se la lente è immersa in uno stesso mezzo, ovvero si rifrange come se passasse da uno ad un altro mezzo attraverso una superficie piana perpendicolare all'asse centrale, se la lente è interposta fra questi due mezzi.

Eliminando colle premesse equazioni $\cos Y_2$ e $\cos Z_2$ dalla seconda delle equazioni (8) e (9) date all'articolo 3 del Capitolo III, Parte I, (*) avremo per la determinazione dell'asse del pennello le seguenti

$$(2) \quad 0 = P_3^{(1)} y_1 + (P_3^{(2)} - 1) \frac{\cos Y_o}{v_o}, \quad 0 = P_3^{(1)} z_1 + (P_3^{(2)} - 1) \frac{\cos Z_o}{v_o},$$

ovvero, ponendo per $\cos Y_o$ e $\cos Z_o$ i loro valori, che, nella supposizione che il piano delle coordinate x, y passi pel punto radiante, sono date da

$$\cos Y_o = \frac{y_1 - y_o}{\Delta_o}, \quad \cos Z_o = \frac{z_1}{\Delta_o},$$

quest'altre due

$$\left\{ P_3^{(1)} + \frac{1}{v_o \Delta_o} (P_3^{(2)} - 1) \right\} y_1 = \frac{1}{v_o \Delta_o} (P_3^{(2)} - 1) y_o, \quad \left\{ P_3^{(1)} + \frac{1}{v_o \Delta_o} (P_3^{(2)} - 1) \right\} z_1 = 0.$$

La seconda di queste equazioni, eccettuando il caso che il valore di Δ_o annulli il coefficiente, esige che sia $z_1 = 0$; e ci mostra che l'asse del pennello sta nel piano passante per l'asse centrale, e pel punto raggiante: ponendo poi

$$(3) \quad l_o = \frac{P_3^{(2)} - 1}{v_o P_3^{(1)}},$$

la prima prende la forma

$$\left(1 + \frac{l_o}{\Delta_o} \right) y_1 = \frac{l_o}{\Delta_o} y_o,$$

dalla quale si ricava

$$(4) \quad y_1 = \frac{l_o}{\Delta_o + l_o} y_o.$$

Nella figura 1^a riportata in fine di questa Nota, simile a quella data nell'articolo 3^o del Capitolo II, Parte II, conduciamo dal punto raggiante R al punto i , pel quale

(*) Le equazioni (8) e (9) non sono citate sotto la stessa forma nell'Estratto, ma si ottengono direttamente ponendo nella seconda equazione della pagina 53 per le u le loro espressioni date dalle (4) nella pagina precedente di esso, e sono

$$(a) \quad y_1 = P_{2i-2}^{(1)} y_1 + P_{2i-2}^{(2)} \frac{\cos Y_o}{v_o}, \quad \frac{\cos Y_i}{v_i} = P_{2i-1}^{(1)} y_1 + P_{2i-1}^{(2)} \frac{\cos Y_o}{v_o};$$

e due equazioni simili si ottengono cambiando le y in z , e le Y in Z . Abbiamo riferito queste equazioni perchè avremo più volte occasione di farne uso.

l'asse del pennello penetra nella lente, la retta Ri , che prolungata incontri l'asse centrale IJ nel punto K_o . La similitudine dei triangoli IK_oR , $c_oK_o i$ ci darà la proporzione

$$IR : c_o i = IK_o : c_o K_o ,$$

tal che essendo $IR = y_o$, $c_o i = y_1$, almeno nei limiti d'approssimazione entro cui sono rinchiuse le formole (2), ed $IK_o = \Delta_o + c_o K_o$, dal confronto del valore di $c_o K_o$, che si ricava da questa proporzione, con quello di l_o , che si deduce dalla precedente equazione, rileveremo dover essere $c_o K_o = l_o$.

Il raggio rappresentante l'asse del pennello che parte dal punto raggiante R ha dunque la sua prima parte incidente così diretta, che taglia l'asse centrale in un punto K_o distante dal centro di figura della superficie anteriore della lente di una quantità eguale ad l_o . Siccome questa quantità, dataci dalla formola (3) è soltanto funzione degli elementi fisici e geometrici della lente, e dei mezzi con cui è in contatto, ed è indipendente dalla posizione del punto raggiante R , perciò conchiuderemo che qualunque sia la posizione di questo punto, quello d'intersezione della porzione incidente dell'asse del pennello luminoso coll'asse centrale della lente cadrà sempre nel luogo K_o , vale a dire, le parti incidenti degli assi dei pennelli luminosi, che partono dai varii elementi dell'oggetto, prolungate, passeranno tutte per lo stesso punto K_o .

Consideriamo ora il corso retrogrado del raggio rappresentante la porzione convergente dell'asse del pennello luminoso, di modo che questo raggio parta dal fuoco F , coniugato di R , corrispondente alle coordinate y , 0 e Δ_1 ed entri nella lente pel punto della superficie opposta $L_1 c_1 L_1$, segnato e nella figura, e le cui coordinate indicheremo con y_2 e z_2 . Pel corso di questo raggio le equazioni corrispondenti alle (2) saranno giusta quanto fu detto all'articolo 6° del Capitolo IV, Parte I,

$$0 = -P_1^{(3)} y_2 + (P_1^{(2)} - 1) \frac{\cos Y_2}{v_2}, \quad 0 = -P_1^{(3)} z_2 + (P_1^{(2)} - 1) \frac{\cos Z_2}{v_2},$$

dalle quali eliminando $\cos Y_2$ e $\cos Z_2$ colle formole

$$\cos Y_2 = \frac{y - y_2}{\Delta_1}, \quad \cos Z_2 = -\frac{z_2}{\Delta_1},$$

ed invertendo gli indici superiori ed inferiori delle P , ciò che è lecito per quello che fu detto nell'or citato articolo, dedurremo (*)

$$\left\{ P_3^{(1)} + \frac{1}{v_2 \Delta_1} (P_2^{(1)} - 1) \right\} y_2 = \frac{1}{v_2 \Delta_1} (P_2^{(1)} - 1) y, \quad \left\{ P_3^{(1)} + \frac{1}{v_2 \Delta_1} (P_2^{(1)} - 1) \right\} z_2 = 0$$

(*) Vedi le equazioni (10) dell'Estratto.

equazioni le quali ci dicono che il raggio rappresentante l'asse della porzione emergente del pennello incontra la seconda superficie della lente in un punto situato nel piano delle coordinate x, y , e che posto

$$(5) \quad l_1 = \frac{P_2^{(1)} - 1}{c_2 P_3^{(1)}}$$

l'ordinata y_2 del suo punto d'incontro colla detta superficie è data dalla formola

$$(6) \quad y_2 = \frac{l_1}{\Delta_1 + l_1} y.$$

Questa formola è simile alla precedente (4), e confrontandola col valore di $c_1 K_1$, che si deduce dalla proporzione

$$JE : c_1 e = JK_1 : c_1 K_1,$$

risultante dalla similitudine dei due triangoli EK_1J e K_1c_1 , che si ottengono col prolungare per indietro la porzione emergente dell'asse del pennello sino ad incontrare l'asse centrale in K_1 , ci mostra che è $c_1 K_1 = l_1$, e che per essere l_1 indipendente dalle quantità relative alla situazione del punto raggiante R , tutte le porzioni emergenti degli assi dei pennelli partiti dai diversi punti dell'oggetto concorrono virtualmente nel punto K_1 .

Se col mezzo d'una lente sussidiaria si concentrano nel punto K_0 i raggi emanati da un punto luminoso situato sull'asse centrale della medesima, indi si colloca la lente che serve alle nostre considerazioni, Fig. I, in modo che il suo asse centrale coincida con quello della prima lente, e che il suo punto K_0 si sovrapponga al punto K_0 di riunione di detti raggi, si rileva da quanto è stato detto nell'articolo 3° del Capitolo II, Parte II, sul centro ottico (*), e da quanto è stato testè dimostrato,

(*) La determinazione del centro ottico di una lente, che forma il soggetto del citato articolo, può conseguirsi, in un modo più conciso, e conforme alle considerazioni su cui s'aggira questa Nota, dalle equazioni (a) riferite a piè di pagina del numero 2, omettendo quelle relative al piano delle x, z che spariscono per essere z_0 e $\cos Z_0$ nulli. Quelle equazioni nel caso dell'asse d'un pennello pel quale deve sussistere la condizione (1), prendono la forma

$$y_2 = P_2^{(1)} y_1 + P_2^{(2)} \frac{\cos Y_0}{v_0}, \quad 0 = P_3^{(1)} y_1 + (P_3^{(2)} - 1) \frac{\cos Y_0}{v_0}.$$

Si elimini da queste $\cos Y_0$, e si riduca il coefficiente di y_1 col mezzo della (3) del Capitolo IV, Parte I, e si otterrà

$$y_2 = - \frac{P_2^{(1)} - 1}{P_3^{(2)} - 1} y_1 = - \frac{v_0 l_1}{v_0 l_0} y_1.$$

Se ora nell'equazione rappresentante il corso della porzione interna dell'asse del pennello, che è

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + y_1,$$

poniamo $y = 0$, per avere il valore x' dell'ascissa x in cui esso interseca l'asse centrale, ed osserviamo

che i suddetti raggi, penetrati che siano nella lente in considerazione, anderanno tutti a passare pel centro ottico della medesima ed usciti dalla superficie opposta s'inclineranno in modo d'aver per fuoco virtuale il punto K_1 , vale a dire, il centro ottico C sarà il fuoco conjugato del punto K_0 rispetto alla superficie rifrangente $L_0 c_0 L_0$, attraversata dai raggi incidenti, ed il punto K_1 il fuoco virtuale di C rispetto alla superficie rifrangente $L_1 c_1 L_1$ attraversata dai raggi emergenti. Un effetto simile ma in ordine inverso si otterrebbe se i raggi emanati dal punto luminoso fossero diretti al punto K_1 per mezzo della lente sussidiaria interposta sul loro cammino, avanti di penetrare nella lente che consideriamo: l'immagine del detto punto sarebbe prima formata nel centro ottico C , indi virtualmente nel fuoco coniugato K_0 . Per evitare d'estendere al di là dei giusti confini queste analogie degli effetti prodotti dall'azione della lente sui raggi partiti da un punto luminoso, ed in seguito concentrati in K_0 ovvero K_1 , con quelli che la stessa azione produce sui raggi rappresentanti gli assi dei pennelli luminosi provenienti dai vari elementi d'un oggetto, giova tener presente che quantunque questi raggi siano riuniti realmente e poi virtualmente nei punti C e K_1 ovvero C e K_0 pure non produrrebbero come quelli emanati dal punto luminoso un'immagine, perchè i raggi costituenti gli assi dei pennelli luminosi, avendo, ciascuno, un'origine diversa, come originati in punti diversi dell'oggetto, apparterebbero a sistemi d'ondulazioni eterogenee che interferirebbero in gran parte fra loro, e non genererebbero tutt'al più che qualche luce confusa (*).

I ragionamenti fatti fin qui suppongono, come viene rappresentato nella Fig. I^a, che la lente sia convesso-convessa e sottile, vale a dire, parlando analiticamente, che

che, x_1 ed x_2 dinotando le ascisse corrispondenti alle ordinate y_1 ed y_2 , si può prendere, nel grado d'approssimazione in cui stiamo, $x_2 - x_1 = h_2$, troveremo

$$(b) \quad x' = \frac{l_1}{l_1 + l_0} h_2.$$

Questo valore di x' , essendo indipendente dalle coordinate Δ_0 ed y_0 del punto raggiante, ci prova che, se la lente è investita da più pennelli procedenti da punti luminosi diversi, tutti gli assi di questi pennelli intersecano l'asse centrale in uno stesso punto che è il centro ottico della lente.

Il valore di x' ci dà l'ascissa del centro ottico preso dal centro di figura della superficie anteriore della lente. Volendo avere l'ascissa x'' presa dal centro di figura della superficie posteriore si osserverà che è $x'' = x' - h_2$, e quindi si troverà

$$x'' = -\frac{l_0}{l_1 + l_0} h_2.$$

(*) Il considerare separatamente i raggi emanati da ciascun elemento dell'oggetto come componenti dei pennelli distinti, ed esaminare il corso dei loro assi successivi è cosa assai importante nelle teorie dell'ottica, come lo comprova la semplicità con cui abbiamo dedotto le proprietà degli stromenti ottici dalle equazioni segnate (6) alla pagina 53 dell'Estratto, nelle quali non appariscono come variabili le coordinate del punto d'emanazione dei raggi e quelle del punto d'incidenza. I primi scrittori d'ottica che impiegavano invece le coordinate di quest'ultimo punto e le direzioni dei raggi sono caduti talvolta in dimostrazioni confuse, e deduzioni erronee. Vedasi anche la nota dell'articolo 7, Capitolo II. Parte II della Memoria.

si abbia

$$(r) \quad p_1 < 0, \quad p_3 < 0, \quad P_3^{(4)} < 0$$

ossia

$$h_2 < -\frac{1}{v_1} \left(\frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_1} \right);$$

nel qual caso le distanze l_0 ed l_1 ottengono valori positivi, ed i punti K_0 e K_1 sono situati nell'interno della lente. Le posizioni dei punti K_0 e K_1 risulterebbero però diverse a seconda che una o due delle tre relazioni (r) non fossero soddisfatte. Senza discutere i vari casi che si possono presentare, ciò che ci devierebbe troppo dal nostro scopo, sceglieremo per esempio quello in cui le quantità p_1 e p_3 rimanendo negative, la funzione $P_3^{(4)}$ sia di valore positivo, cioè che la lente sia sufficientemente grossa da avere

$$h_2 > -\frac{1}{v_1} \left(\frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_1} \right).$$

In questo caso i valori di l_0 ed l_1 risulteranno negativi, ed i punti K_0 e K_1 saranno situati al di fuori della lente, come nella Figura II^a, nella quale le linee corelative sono marcate colle stesse lettere che nella Figura I^a.

Dalla detta Figura II^a si rileva che se esistesse in uno dei due punti K_0 e K_1 un elemento luminoso per se stesso si produrrebbe un'immagine reale del medesimo nell'altro punto.

Da quanto abbiamo esposto chiaro apparisce che i punti K_0 , C , K_1 oltre alla particolarità di poter divenire, secondo i casi, fuochi conjugati reali o virtuali d'un elemento luminoso situato in uno di essi, o d'un'immagine dello stesso elemento penetrata nella lente dal di fuori, godono la proprietà caratteristica d'essere, in ogni caso, i punti di reale o virtuale concorso delle tre parti degli assi dei pennelli, che, partiti dai vari elementi d'un oggetto posto ad una lontananza qualunque, ma ad una distanza dall'asse comparativamente molto più piccola, investono una lente. Il punto K_0 è il luogo di concorso delle parti incidenti degli assi dei pennelli, il punto C quello delle parti interne, ed il punto K_1 quello delle parti emergenti: per tale motivo dando a questi punti il nome di centri, conserveremo al punto C il nome comunemente usato di *centro ottico*, ed indicheremo i punti K_0 e K_1 con quello di *centri conjugati principali* (*).

(*) Questa denominazione ci sembra più espressiva di quella di punti principali introdotta da Gauss, la quale non enuncia alcuna proprietà dei punti suddetti.

A questo proposito osserveremo che la proprietà d'intersecarsi, realmente o virtualmente sull'asse centrale in tre punti consecutivi, è comune, ciò che forse non è stato ancora avvertito, a tutti i sistemi di raggi pei quali $\cos Y_2 : \cos Y_0$ e $\cos Z_2 : \cos Z_0$ hanno un rapporto eguale e costante; e che al sistema, in cui questo rapporto eguaglia $v_2 : v_0$ va unita un'altra proprietà caratteristica, ed è che i piani perpendico-

3.

Piani principali conjugati.

Un'altra proprietà notevole dei centri conjugati si è, che, condotti per essi due piani $p_o K_o p_o$, $p_i K_i p_i$, Figura I^a. e II^a., perpendicolarmente all'asse centrale, la porzione incidente R_μ d'un raggio qualunque, e quella emergente $\mu_i E$ dello stesso raggio incontrano rispettivamente questi piani in due punti situati sopra una retta parallela all'asse centrale.

In fatti le due equazioni della porzione incidente del raggio passante pel punto d'incidenza, essendo, nei limiti adottati d'approssimazione, in cui si può prendere $\cos X_o = 1$, date da

$$y - y_i = (x - x_i) \cos Y_o, \quad z - z_i = (x - x_i) \cos Z_o;$$

se facciamo in esse $x - x' = l_o$, per ottenere le coordinate del punto d'incontro della detta porzione col primo piano $p_o K_o p_o$, e poniamo per $\cos Y_o$, $\cos Z_o$ i loro valori più volte citati, avremo per le coordinate y' e z' di questo punto

$$y' = y_i + \frac{l_o}{\Delta_o} (y_i - y_o); \quad z' = z_i + \frac{l_o}{\Delta_o} (z_i - z_o).$$

Ora le due equazioni del raggio emergente rappresentate in generale da quelle segnate (8) nell'Estratto, ci danno, quando si fa $n = 2$, e si pone $x - H_2 = -l_i$, per dedurre i valori delle coordinate y'' e z'' del punto d'incontro della porzione del raggio emergente, eE , del raggio del secondo piano $p_i K_i p_i$

$$y'' = (Q_2^{(1)} - v_2 l_i Q_3^{(1)}) y_i - \frac{1}{v_o \Delta_o} (P_2^{(2)} - v_2 l_i P_3^{(2)}) y_o$$

$$z'' = (Q_2^{(1)} - v_2 l_i Q_3^{(1)}) z_i - \frac{1}{v_o \Delta_o} (P_2^{(2)} - v_2 l_i P_3^{(2)}) z_o$$

le quali, ridotte colla sostituzione dei rispettivi valori di $Q_2^{(1)}$ e $Q_3^{(1)}$, somministratici dalle (5) dell'Estratto, e col mezzo della prima delle (7), prendono pure la forma

$$y'' = y_i + \frac{l_o}{\Delta_o} (y_i - y_o), \quad z'' = z_i + \frac{l_o}{\Delta_o} (z_i - z_o),$$

lari all'asse centrale e passante pel primo ed ultimo dei tre punti d'intersezione tagliano un raggio qualunque d'un pennello in due punti situati sopra una stessa parallela all'asse centrale; proprietà notevole scoperta dal Gauss, che dimostreremo nell'articolo seguente, e che è tanto utile nelle applicazioni. Il nome di *centri conjugati*, dato dal Sig. Biot, ai due punti d'intersezione coll'asse delle porzioni incidenti ed emergenti dei raggi del sistema, in cui il detto rapporto è eguale all'unità, non appartiene quindi esclusivamente ad essi ma è applicabile ai punti analoghi di tutti i sopra indicati sistemi di raggi, e l'epiteto principali serve a distinguere i due punti spettanti al sistema considerato da Gauss, che godono di maggiori e più utili proprietà.

dunque avremo

$$y'' = y' , \quad z'' = z' ;$$

mostrandoci così che i due punti determinati appartengono ad una retta parallela all'asse delle x , ossia all'asse centrale.

Nelle Figure I^a. e II^a. le rette mm_1 ed nn_1 marcano rispettivamente le parallele su cui stanno le intersezioni dei raggi $R\mu\mu_1 E$, $R\nu\nu_1 E$ laterali all'asse del pennello $RiCeE$.

Ai due detti piani condotti perpendicolarmente all'asse centrale pei due centri coniugati principali, e che sono rispettivamente intersecati da un raggio qualunque del pennello luminoso in punti egualmente situati su di essi daremo, ad imitazione del Gauss, il nome di *piani coniugati principali*, o semplicemente di *piani principali*.

4.

Determinazione della lunghezza focale di una lente fittizia, da sostituirsi alla reale, mediante la quale si riduce più semplice il calcolo degli effetti d'uno stromento ottico.

Se s'immagina che spariscano tutte le parti della Figura I^a. o II^a. spettanti alla forma della lente, e che i due piani centrali coniugati $p_o K_o p_o$, $p_1 K_1 p_1$ vadano a riunirsi col piano cCc condotto pel centro ottico perpendicolarmente all'asse centrale, e che questo piano rimanendo parallelo a se stesso passi alla distanza del punto raggiante R a cui sta il piano $p_o K_o p_o$ nel caso reale, e si suppone inoltre che, nel luogo ove è venuto a collocarsi il piano $p_o C p_o$, esista una lente di grossezza trascurabile, dotata d'una lunghezza focale φ , che soddisfaccia all'equazione

$$(7) \quad \frac{1}{v_2(\Delta_1 + l_1)} = \frac{1}{v_2 \varphi} - \frac{1}{v_o(\Delta_o + l_o)},$$

simile a quella segnata (7)^{II} nell'articolo 2 del Capitolo II, Parte II, che vale rigorosamente per una lente infinitamente sottile (*) è chiaro, che in tale ipotesi l'asse del pennello luminoso entrerà ed uscirà da questa lente percorrendo una linea retta, se la lente è immersa in uno stesso mezzo omogeneo, ovvero, spezzata secondo la legge data dall'equazione (1), se il mezzo anteriore e quello posteriore alla lente sono differentemente rifrangenti, e che tanto le direzioni di tutti i raggi del pennello luminoso, quanto le posizioni dei punti in cui essi sono intersecati dai piani centrali rimarranno eguali come nel caso della lente reale; solo la distanza reciproca dei due fuochi coniugati R ed E sarà diminuita dell'intervallo $K_o K_1$. Da

(*) L'equazione citata suppone che la lente sia immersa in uno stesso mezzo, per cui si abbia $v_2 = v_o$: se la lente separasse due mezzi differenti, è facile di vedere che prenderebbe la forma

$$\frac{1}{v_2 \Delta_1} = \frac{1}{v_2 f} - \frac{1}{v_o \Delta_o}$$

ciò ne segue, che se calcoleremo la distanza coniugata $\Delta_1 + l_1$, e le coordinate del fuoco coniugato corrispondente alla lente fittizia colle formole (7)" ed (8)", date nel luogo sopra citato, impiegando in esse la distanza focale φ in luogo di F , e la distanza coniugata $\Delta_0 + l_0$ del punto raggiante in luogo di Δ_0 , indi partendo dal secondo piano principale applichiamo all'asse centrale un ascissa eguale al valore calcolato di $\Delta_1 + l_1$, ed all'estremità di quest'ascissa due coordinate eguali agli ottenuti valori di y e z , avremo segnato la posizione del fuoco coniugato spettante alla lente reale. Per eseguire questo calcolo non ci rimarrà altro a conoscere se non se il valore della lunghezza focale φ , da cui l'equazione (7) sia soddisfatta.

Per procacciarsi questo valore assumiamo l'equazione (10) dell'Estratto, in cui siasi fatto $n = 2$, e siansi poste per le Q le loro espressioni segnate (5), pure nell'Estratto, e, per introdurre le distanze focali coniugate $\Delta_0 + l_0$, e $\Delta_1 + l_1$, scriviamo in essa $\Delta_0 + l_0 - l_0$ in luogo di Δ_0 , e $\Delta_1 + l_1 - l_1$ in luogo di Δ_1 ; la citata equazione ci darà

$$\Delta_1 + l_1 = - \frac{1}{v_2} \frac{v_0(\Delta_0 + l_0)P_2^{(1)} + P_2^{(3)} - v_0 l_0 P_2^{(1)}}{v_2(\Delta_0 + l_0)P_3^{(1)} + P_3^{(2)} - v_0 l_0 P_3^{(1)}} + l_1,$$

e riducendo il secondo membro alla stessa denominazione, ed osservando che, colla sostituzione dei rispettivi valori di l_0 ed l_1 datici dalle (3) e (5), e colle riduzioni somministrateci dalla prima delle (7) (Est.). la quantità

$$v_2 l_1 P_3^{(2)} - P_2^{(2)} - v_0 l_0 (v_2 l_1 P_3^{(1)} - P_2^{(1)})$$

risulta identicamente nulla, si troverà

$$\Delta_1 + l_1 = - \frac{v_0(P_2^{(1)} - v_2 l_1 P_3^{(1)})(\Delta_0 + l_0)}{v_2 v_0(\Delta_0 + l_0)P_3^{(1)} + v_2(P_3^{(2)} - v_0 l_0 P_3^{(1)})},$$

ovvero rovesciando un membro e l'altro

$$(8) \quad \frac{1}{\Delta_1 + l_1} = - \frac{v_2 P_3^{(1)}}{P_2^{(1)} - v_2 l_1 P_3^{(1)}} - \frac{v_2}{v_0} \frac{P_3^{(2)} - v_0 l_0 P_3^{(1)}}{P_2^{(1)} - v_2 l_1 P_3^{(1)}} \cdot \frac{1}{\Delta_0 + l_0}.$$

Ora si può osservare che la quantità $P_2^{(1)} - v_2 l_1 P_3^{(1)}$, e $P_3^{(2)} - v_0 l_0 P_3^{(1)}$ sono suscettibili d'essere trasformate in due modi. Primieramente mettendo per l_0 ed l_1 i valori, e secondariamente facendo uso delle espressioni delle lunghezze focali

$$F_2^{(1)} = - \frac{P_2^{(1)}}{v_2 P_3^{(1)}}, \quad F_1^{(2)} = - \frac{P_3^{(2)}}{v_0 P_3^{(1)}},$$

che possono dedursi dalle (22) dell'Estratto.

Per mezzo della duplice sostituzione ora accennata si trova

$$P_2^{(1)} - v_2 l_1 P_3^{(1)} = 1 = - v_2 P_3^{(1)}(F_2^{(1)} + l_1), \quad P_3^{(2)} - v_0 l_0 P_3^{(1)} = 1 = - v_0 P_3^{(1)}(F_1^{(2)} + l_0).$$

donde ricavasi

$$(9) \quad v_2(F_2^{(1)} + l_1) = v_o(F_1^{(2)} + l_o) = -\frac{1}{P_3^{(1)}}.$$

La precedente equazione (8) diverrà quindi coll'uso di questi valori

$$(10) \quad \frac{1}{v_2(\Delta_1 + l_1)} = -P_3^{(1)} - \frac{1}{v_o(\Delta_o + l_o)},$$

la quale confrontata colla supposta segnata (7), ci mostra che la dimandata lunghezza focale φ , è data da

$$(11) \quad \varphi = -\frac{1}{v_2 P_3^{(1)}}$$

e perciò, che, in virtù della (8), l'equazione (10) si può anche mettere sotto una delle due forme

$$(12) \quad \frac{1}{v_2(\Delta_1 + l_1)} + \frac{1}{v_o(\Delta_o + l_o)} = \frac{1}{v_2(F_2^{(1)} + l_1)} = \frac{1}{v_o(F_1^{(2)} + l_o)}.$$

Nel dedurre l'esistenza e le proprietà dei centri conjugati principali dei piani principali e della lunghezza focale della lente fittizia non abbiamo preso in considerazione che una sola lente, perchè è principalmente impiegando le proprietà dei detti elementi relativi a ciascuna lente che il calcolo degli stromenti ottici può essere abbreviato, quando si voglia tener conto della grossezza delle lenti. Non ometteremo però di osservare che basta di cambiare all'indice delle P il valore 2, che gli è stato dato, nell'indice generale n , che tutte le formole precedentemente trovate, e quelle che hanno servito alle loro riduzioni sussisteranno ancora, e saranno applicabili alla determinazione dei detti elementi per un sistema composto di un numero qualunque di lenti. Vedasi anche l'articolo 1 del Capitolo III, Parte II.

5.

Calcolo degli effetti d'uno stromento ottico coll'impiego delle distanze dei centri conjugati principali, e delle relative lunghezze focali delle lenti fittizie.

Il vantaggio che porge la considerazione dei centri coniugati principali, e della lunghezza focale della lente fittizia, consiste principalmente nel fornirci il mezzo di tener conto della grossezza delle lenti nel calcolo del corso di un raggio luminoso qualunque in un'istromento ottico calcolando prima il corso dello stesso raggio come se le dette grossezze fossero trascurabili, e poi surrogando alle lunghezze focali delle lenti ed alle loro distanze reciproche quelle che competono alle lenti fittizie date ne precedenti articoli. Per tal modo si viene ad abbassare, come abbiamo visto nell'ar-

ticolo 6 del Capitolo II, Parte II, della metà l'indice delle funzioni P , il cui numero di termini va elevandosi così rapidamente col crescere del loro indice da renderne presto il calcolo impraticabile, e si sostituisce un processo comparitivamente molto più semplice.

Per vedere come ciò succeda, noteremo primieramente che basta gettar l'occhio sulla seconda parte della Figura III^a, nella quale si suppone che i piani principali di ciascuna lente dello stromento siano compenetrati con quelli passanti pel centro ottico rispettivo, e che l'intero sistema sia traslocato in modo che il primo dei detti piani verso l'oggetto si trovi alla medesima distanza da questo, a cui nel sistema reale sta il piano principale anteriore della prima lente, e confrontare questa seconda parte colla prima rappresentante lo stromento per iscorgere che le direzioni, che prende successivamente un raggio qualunque d'un pennello luminoso, ed i punti in cui questo raggio sarà intersecato dai piani principali riuniti per coppie, saranno i medesimi di quando operano le grossezze delle lenti. Se quindi, impiegando i dati appartenenti alle lenti fittizie, determineremo colle formole (5) e (6) del Capitolo II, Parte II il valore delle coordinate del fuoco coniugato dell'intero sistema, questi valori coincideranno con quelli che si otterrebbero dalle stesse equazioni per le coordinate del fuoco del sistema reale, prese partendo dal piano principale coniugato posteriore dell'ultima lente, nel caso che s'abbia riguardo alla grossezza delle lenti.

Per eseguire il calcolo delle coordinate del fuoco coniugato nel sistema delle lenti fittizie, per mezzo delle equazioni (5) e (6), bisogna conoscere quali valori devono sostituirsi in luogo delle coordinate Δ_0 , y_0 , z_0 del punto radiante, ed in luogo degli elementi p_1 , p_2 , p_3 , e componenti le funzioni Q , al quale oggetto serviranno le seguenti rimarche.

1° Le coordinate y_0 e z_0 rimangono eguali a quelle del sistema reale, la sola distanza Δ_0 deve essere cambiata in $\Delta_0 + l_0$ pel sistema fittizio.

2° Le p con indice pari multiplo dispari di 2, contenute nella serie

$$(13) \quad p_2, p_6, p_{10} \dots p_{hi-2},$$

essendo, giusta le formole (6)' del Capitolo III, Parte I, proporzionali alle grossezze delle lenti, che sono nulle nel caso delle lenti fittizie, le dette p saranno pure tutte nulle.

3° Le p con un indice multiplo di h sono date, giusta le citate formole, dal prodotto della velocità della luce nel mezzo che separa due lenti successive moltiplicata per la loro distanza reciproca. Se indichiamo con $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \dots \Delta_{2n}$ le distanze dei fuochi coniugati dai centri di figura delle rispettive superficie delle lenti nel sistema reale, e con $l_0, l_1, l_2 \dots l_n$ quelle dei corrispondenti piani principali, le prime essendo prese verso l'esterno della rispettiva superficie della lente quando

i loro valori sono positivi, e verso l'interno quando sono negativi, e le seconde viceversa; è facile di vedere che le distanze reciproche dei piani saranno date da

$$\Delta_1 + l_1 + \Delta_2 + l_2, \quad \Delta_3 + l_3 + \Delta_4 + l_4 \dots \Delta_{2n-1} + l_{2n-1} + \Delta_{2n} + l_{2n} :$$

ma nel caso reale si ha

$$\Delta_1 + \Delta_2 = h_3, \quad \Delta_3 + \Delta_4 = h_5 \dots \Delta_{2n-1} + \Delta_{2n} = h_{2n+1}$$

quindi introducendo questi valori, quelli delle p con indice multipli di h componenti la serie

$$(14) \quad p_4, \quad p_8, \dots p_{2n}$$

saranno dati da

$$(15) \quad v_2(h_3 + l_1 + l_2), \quad v_4(h_5 + l_3 + l_4) \dots v_{2n}(h_{2n+1} + l_{2n-1} + l_{2n}).$$

In quanto alle p con indice dispari, queste secondo le osservazioni fatte nell'articolo 6 del Capitolo II, Parte II, non entreranno nelle nostre formole che sommate per coppie, cioè non avremo a considerare che i termini delle serie

$$(16) \quad p_1 + p_3, \quad p_5 + p_7 \dots p_{2n-1} + p_{2n+1}$$

che giusta l'articolo testè citato eguagliano ciascuno il rispettivo valore inverso del prodotto della velocità della luce nel mezzo in cui passa il raggio uscendo da una lente per la lunghezza focale della medesima, ossia rappresentano i successivi valori di

$$\frac{1}{v_2 \varphi_1}, \quad \frac{1}{v_4 \varphi_2} \dots \frac{1}{v_{2n} \varphi_n},$$

che come abbiamo visto nell'articolo precedente sono espressi da

$$(17) \quad \frac{1}{v_2(f_1 + l_1)}, \quad \frac{1}{v_4(f_2 + l_3)} \dots \frac{1}{v_{2n}(f_n + l_{2n-1})}.$$

Ma se noi supponiamo di fare colle citate formole (5) e (6), il calcolo approssimativo del fuoco conjugato del sistema reale, trascurando le grossezze delle lenti, dobbiamo, come è stato notato nell'articolo 6 testè menzionato, fare le p della serie (13) tutte nulle, sostituire alle p comprese nella serie (14) rispettivamente le quantità

$$(14)' \quad v_2 h_3, \quad v_4 h_5 \dots v_{2n} h_{2n+1}$$

ed alle coppie delle p con indici dispari, componenti la serie (16), le quantità

$$\frac{1}{v_2 f_1}, \quad \frac{1}{v_4 f_2} \dots \frac{1}{v_{2n} f_n},$$

dunque se nelle formole ottenute col calcolo approssimativo, in cui siano trascurate le grossezze delle lenti, cambiamo le quantità della serie (14)' in quelle della serie

(14), e le quantità della serie (17)¹ in quelle della (17), otterremo dalle medesime formole quelle corrispondenti al sistema fittizio, applicabili al caso in cui si voglia tener conto della grossezza delle lenti.

Facendo pertanto le indicate sostituzioni nelle formole, ritrovate negli articoli 4, 7 ed 8 del Capitolo II Parte II, spettanti al microscopio semplice, ai telescopi di Kepler e Galileo, ed al dinametro e prendendo per Δ_0 la distanza dell'oggetto dal primo piano principale del sistema, espresso da $\Delta_0 + l_0$, e per Δ la distanza dell'immagine presa dall'ultimo piano principale, espressa da $\Delta + l$, si otterranno le rispettive formole, nel caso che le grossezze delle lenti non debbano essere trascurate.

Noteremo che i valori di l_0 ed l_1 espressi per mezzo dei raggi di curvatura della lente e della sua grossezza, non che delle velocità della luce nel mezzo che la compone, e di quelli che le sono in contatto, si ottengono ponendo nelle formole (3) e (5)

$$1 - \frac{v_1}{v_0} = u_1, \quad 1 - \frac{v_1}{v_2} = u_2;$$

e poi prendendo

$$l_0 = \frac{(1 - u_1)u_1 \rho_1 h_2}{u_1 \rho_1 - u_2 \rho_2 - u_1 u_2 h_2}, \quad l_1 = - \frac{(1 - u_2)u_2 \rho_2 h_2}{u_1 \rho_1 - u_2 \rho_2 - u_1 u_2 h_2}.$$

Quando la lente è immersa nello stesso mezzo si ha $v_0 = v_2$ ed $u_1 = u_2$, e quindi le due formole precedenti danno

$$l_0 = \frac{(1 - u_1)\rho_1 h_2}{\rho_1 - \rho_2 - u_1 h_2}, \quad l_1 = - \frac{(1 - u_1)\rho_2 h_2}{\rho_1 - \rho_2 - u_1 h_2}.$$

Terminerò questa Nota col ringraziare il Prof. Cattaneo d'avermi offerto l'occasione di supplire ad un'omissione nella mia Teoria degli stromenti ottici, ciò che parmi di aver conseguito non senza qualche novità.