**I. *Versuche und Rechnungen zur Bestimmung
der Bahnen des Bumerangs;
von Werner Stille in Marine, Staat Illinois.***

In No. 5 dieser Annalen des Jahrgangs 1869 findet sich eine interessante und lehrreiche Abhandlung von Dr. E. O. Erdmann, betitelt „Erklärung der Bahnen des Bumerangs“. Diese Abhandlung scheint die erste Untersuchung zu enthalten, welche eine einigermaßen befriedigende Erklärung der paradoxen Bahnen giebt, welche das Instrument beschreibt. Aber es fehlt noch ein wesentlicher Theil an der Lösung des Problems. Die Erklärungen Erdmann's sind nämlich nur qualitativer Art, es fehlt noch die quantitative Untersuchung. Das Problem kann erst dann als gelöst angesehen werden, wenn wir die Gleichungen der von dem Instrumente beschriebenen Curven besitzen. Es erhebt sich aber sofort die Frage, ob die Berechnung derselben nach dem heutigen Stande der Wissenschaft überhaupt geleistet werden kann, denn obgleich Mathematiker und Physiker dies Problem schon oft zum Gegenstand der Untersuchung gemacht haben, ist die Lösung bisher nicht gelungen und zwar hauptsächlich aus dem Grunde, weil die Theorie des Widerstandes der Flüssigkeiten noch zu wenig ausgebildet ist. Außerdem möchte doch auch die Form des Instruments der mathematischen Behandlung große Schwierigkeiten entgegensetzen, was sofort einleuchtet, wenn man bedenkt, daß der Bumerang von den Australiern aus freier Hand verfertigt, daß das Instrument also mehr oder weniger unregelmäßig geformt ist, so daß

sich kein mathematisches Bildungsgesetz dieser Gestalt wird angeben lassen. Auch findet sich in Erdmann's Aufsatz die Angabe, daß Prof. Mac Cullagh in der Sitzung der irischen Akademie am 22. Mai 1837 die Bemerkung gemacht habe, die gegenseitige Einwirkung der Luft und eines in derselben rotirenden Körpers sey ein Problem, das die gegenwärtigen Kräfte der Mechanik weit überschreite.

Wenn ich dennoch die Lösung dieses Problems zu unternehmen wage, so geschieht es, weil die genannten Schwierigkeiten weit größer scheinen als sie sind, wie sich sogleich zeigen wird. Was zuerst die Form des Instruments anlangt, so ist bekannt, daß die Bumerangs keineswegs einander sehr ähnlich sehen; ein Blick auf die Zeichnungen, die Erdmann's Abhandlung begleiten, zeigt das sofort. Es wird uns also erlaubt seyn, ein ähnliches Instrument herzustellen, indem wir uns einer der gegebenen Formen mehr oder weniger anschließen, zugleich aber ein bestimmtes Bildungsgesetz annehmen, nach welchem unser künstlicher Bumerang gebildet ist. Der Einwand, daß ein nachgebildeter Bumerang kein „echtes“ Instrument sey, ist nicht triftig, da der „echte“ Bumerang gar keine fest bestimmte Form besitzt, da er ja mit rohen Instrumenten und nach Augenmaafs hergestellt ist. Außerdem zeigen meine Versuche, von welchem sogleich die Rede seyn wird, daß die nachgebildeten Bumerangs dieselben überraschenden Bahnen beschreiben wie die echten.

Die andere Hauptschwierigkeit, nämlich die mangelhafte Ausbildung der Theorie des Widerstandes der Luft, ist durch neuere Untersuchungen so weit beseitigt wie für unsern Zweck ausreicht, wie dies weiter unten gezeigt werden soll.

Versuche.

Die Ueberzeugung, daß es leicht gelingen müsse, einen Bumerang nachzumachen, welcher die gleichen Curven beschreiben werde wie ein echtes, australisches Instrument, veranlaßte mich zu Versuchen. Ich nahm das Instrument

No. 1 unter Erdmann's Zeichnungen, als Muster und schnitt aus *Hickory*-Holz¹⁾ einen Bumerang mit welchem ich meine ersten Versuche machte. Der Wurf „links herum“ gelang sehr bald; dann auch der Horizontalwurf, von welchem Erdmann sagt, daß er wahrscheinlich auf der Känguru-Jagd vielfach Anwendung finde. Aber die Freude hatte bald ein Ende. Als ich nämlich eines Tages wieder auf die Prairie gegangen war, um die Wurfübungen fortzusetzen, schoß nach gelungenem Wurf, das Instrument aus bedeutender Höhe mit einem Ende auf sehr festen Boden und zerbrach. Jetzt beschloß ich, die Vorstellung durch den Versuch zu prüfen, daß die vermeintliche hyperbolische Gestalt des Instrumentes, welcher man früher so viel Bedeutung zugeschrieben hat, ganz unwesentlich ist, wie Erdmann sehr richtig bemerkt. Das Wesentliche an dem Instrument ist nämlich die windschiefe Fläche. Legt man den Bumerang auf den Tisch, so ist die windschiefe Fläche dem Tische zugewendet und berührt diesen nur an drei Punkten. Rotirt das Instrument in der Luft, so wirkt diese Fläche ähnlich wie eine Schraube oder wie die Flügel einer Windmühle. Um ein neues Instrument herzustellen, nahm ich ein Modell wie es die Wagenmacher zum Ausschneiden von Wagenfelgen benutzen. Es hatte also die Gestalt der Fig. 1, Taf. I. ACB ist ein Kreisbogen, dessen Radius 22 Zoll, DE ein zweiter, concentrischer Kreisbogen, dessen Radius 20 Zoll, so daß also die Breite AD gleich 2 Zoll wurde. Die Länge der Sehne AB wurde gleich 26 Zoll genommen. Die Dicke des Holzes betrug $\frac{1}{2}$ Zoll. Ich wählte wieder *Hickory*-Holz. Die Kanten wurden nun gut zugescharft, so jedoch, daß die untere Seite des Instruments völlig eben blieb, daß also der Querschnitt desselben die Gestalt erhielt die nebenste-

 D hende Figur zeigt. Jetzt wurde dies so geformte

1) Das *hickory* ist in der Botanik bekannt als *carya*; die Species *carya alba*, die ich wählte, ist hier zu Lande ein wegen ihrer Festigkeit und Zähigkeit sehr geschätztes Nutzholz. Man braucht es besonders zu Speichen, Wagenaxen etc.

Stück Holz in einen Kessel mit siedendem Wasser gelegt, und das Wasser zwei Stunden im Sieden erhalten. Als das Holz auf diese Weise gehörig erweicht war, wurde es so in Schrauben eingespannt, daß die untere Fläche windschief wurde und zwar näherungsweise dieselbe Windung zeigte, wie die echten Instrumente. Wurde, nachdem das Instrument trocken geworden, das Ende *AD* auf den Tisch gedrückt, so bildete die Linie *BE* einen Winkel von ungefähr 20 Grad mit der Ebene der Tischplatte. Zuerst wurden nun die charakteristischen Würfe mit dem Bumerang in dieser Gestalt ausgeführt, dann, um die Waffe besser mit der Hand fassen zu können, wurden die Enden etwas zugespitzt, wie die punktierten Linien andeuten. Zu meiner Befriedigung gelangen die Würfe auch mit diesem Instrumente ganz gut.

Um nun die hieher gehörigen Rechnungen auszuführen, habe ich dem Bumerang nach und nach verschiedene Gestalten gegeben und bin schließlich bei einer Form stehen geblieben, die, wie ich erst gefunden habe, nachdem schon die Rechnungen gemacht waren, sehr nahe dieselbe ist, welche ein australisches Instrument besitzt, das sich in der Sammlung von Merkwürdigkeiten des *Shurtleff College* in *Alton* befindet. Dies ist der erste australische Bumerang, der mir überhaupt zu Gesicht gekommen ist, und ich war angenehm überrascht zu sehen, daß er nahezu dieselbe parabolische Form besitzt, die ich zu den folgenden Rechnungen benutzt habe.

Theorie des Luftwiderstandes.

In den Lehrbüchern der Mechanik findet man meist sehr dürftige Angaben über den Widerstand von Flüssigkeiten. So giebt Poisson

$$R = \sigma \cdot \rho \cdot v^2$$

wo *R* der Druck der Flüssigkeit auf die Einheit der Fläche des bewegten Körpers, *v* seine Geschwindigkeit, ρ die Dichtigkeit der Flüssigkeit und σ ein von der Gestalt des Körpers abhängiger constanter Factor ist, der durch Versuche

bestimmt werden muß. Die Theorie des Einflusses der Gestalt des Körpers auf den Widerstand fehlt also gänzlich. Aehnlich giebt Navier

$$R = k \cdot \rho \cdot \Omega \cdot U^2$$

wo Ω der größte Querschnitt des bewegten Körpers ist, U seine Geschwindigkeit, ρ die Dichtigkeit des Fluidums und k eine Constante, die durch Versuche ermittelt werden muß. Wiederum fehlt alle Theorie des Einflusses der Gestalt des Körpers. Duhamel giebt eine brauchbarere Formel, nämlich

$$R = \rho \cdot \omega \cdot v^2 \cdot \sin \theta$$

wo ω der Flächeninhalt der *Projection* der von dem Flüssigkeitsstrahl getroffenen Oberfläche auf eine Ebene bedeutet, welche senkrecht auf der Richtung der Bewegung steht, θ ist der Winkel, welchen die Ebene, die vom Flüssigkeitsstrahl getroffen wird, mit der Richtung der Bewegung einschließt. Diesen Ausdruck erhält man unter der Voraussetzung, daß die Flüssigkeit, welche auf die Ebene stößt, dieser Ebene entlang abfließt, welche Voraussetzung um so näher erfüllt seyn wird, je langsamer die Bewegung ist. Aber dieser Ausdruck bedarf noch einer Modification, um für unsern gegenwärtigen Zweck brauchbar zu seyn, nämlich der, daß die Gleichung noch richtig bleibe, wenn wir sehr kleine Flächenstücke betrachten. Diese Voraussetzung macht auch Jullien in seinen vortrefflichen *problèmes de mécanique rationnelle*, T. II, p. 544, wo von dem Druck des Windes auf die Mühlenflügel die Rede ist. Ist nun ds das Element der Fläche, also $ds \cdot \sin \theta = \omega$ die Projection des Elements auf die Ebene, welche auf der Bewegungsrichtung senkrecht steht, so werden wir ohne merklichen Fehler für die immerhin nur geringen in Betracht kommenden Geschwindigkeiten setzen dürfen

$$dR = \rho \cdot v^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot ds$$

als gültig für jedes Flächenelement.

Form des Bumerangs.

In Fig. 2, Taf. I sey ABC eine Parabel, deren Brennpunkt in F liege und deren Polargleichung

$$r = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + \cos \theta}$$

Die Curve $A'B'C'$ sey die eine Aequidistante, so daß die Breite der Figur $AA' = BB' = CC' = b$ ist. Dann soll die Figur $ABCC'B'A'$ die Gestalt unseres Bumerangs seyn, von oben gesehen, wenn er auf einer Tischplatte liegt. Genauer ausgedrückt, sey dies die Gestalt des Instrumentes bevor die Drehung stattgefunden hat, welche wir annehmen, um die windschiefe Fläche zu erzeugen. Diese Drehung geschah nun auf folgende Weise. Auf der Parabel ABC denke man sich eine große Anzahl von Stäben befestigt, welche alle senkrecht auf der Ebene des Papiers stehen. Nun werden diese Perpendikel gegen die Ebene des Papiers geneigt, so daß, wenn ML ein solches Perpendikel ist, es sich der Normale MN nähert, indem die Ebene LMN senkrecht auf der Ebene des Papiers steht und der Winkel $LMN = \psi$ kleiner als 90 Grad wird. Bleibt nun LM rechtwinklig auf dem Element der Fläche des Bumerangs, so wird dieser offenbar so gedreht, daß eine windschiefe Fläche entsteht. Die Neigung der Perpendikel gegen die Papierebene soll nun so geschehen, daß

$$\cos \psi = c \cdot \sin \chi$$

wo wir mit χ den Winkel MNB bezeichnen, welchen die Normale mit der Axe der Figur einschließt. Für den Punkt B ist $\chi = 180^\circ$, also $\cos \psi = 0$, d. h. in diesem Punkte findet gar keine Drehung statt. Geht man über B hinaus nach C zu, so ändert $\cos \psi$ das Zeichen, die Perpendikel auf das Instrument bilden Winkel mit der Papierebene, welche (in der gleichen Richtung gemessen) größer als 90 Grad sind. Die Bestimmung der Constante c hat im Augenblick noch kein Interesse, sie wird weiterhin erörtert.

Wir wollen nun die Länge der Schenkel $BAA'B'$ und $BCC'B'$ so wählen, daß der Schwerpunkt des Instruments im Brennpunkte F zu liegen kommt. Diese Forderung ist leicht mit hinreichender Genauigkeit zu erfüllen. Spannt man nämlich zwei Fäden, die am Instrumente selbst befestigt sind und die sich im Brennpunkt F schneiden, so braucht man nur durch successives Aufhängen des Instrumentes und Abschneiden von den Enden AA' und CC' es dahin zu bringen, daß wenn das Instrument ruhig hängt, der Punkt F in der Verlängerung des Fadens liegt, an welchem das Instrument hängt. Bekanntlich findet man ja auf sehr einfache Weise den Schwerpunkt eines Körpers dadurch, daß man ihn nach einander zwei Mal an einem Faden aufhängt, welcher jedes Mal an einem andern Punkte befestigt ist. Da jedes Mal der Schwerpunkt in der Verlängerung des Fadens liegt, so ist derjenige Punkt des Körpers der Schwerpunkt, in welchen die beiden Richtungen des Fadens sich schneiden. Macht man nun zuerst die Schenkel ein wenig zu lang, so wird man es durch Abschneiden bald dahin bringen, daß der Schwerpunkt genau genug in F liegt.

Druck der Luft auf den Bumerang.

1) Um zuerst den einfachsten Fall zu betrachten, werde das Flächenelement in welchem der Punkt M Fig. 3, Taf. I liegt (dessen Länge MM' in der Normalen MN liegt, und dessen Breite unendlich klein ist), von einem Luftstrom getroffen, welcher in der Ebene des Papiers liegt, welche Ebene künftig die Primär-Ebene heißen soll. Dieser Luftstrom sey außerdem der Axe der Figur BN parallel, seine Richtung sey MR , dann werden wir für den Druck auf das Flächenelement ds haben

$$dR = \rho \cdot v^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot ds$$

wo φ der Winkel ist, welchen das Flächenelement mit der Richtung MR bildet. Um nun $\sin \varphi$ durch θ , ψ und χ auszudrücken, haben wir

$$\sin \varphi = \cos LMR = \cos \psi \cdot \cos \chi$$

wo wieder $LMN = \psi$ und $MNB = \chi$ ist. LN ist ein Perpendikel auf die Primärebene, also

$$dR = \varrho \cdot v^2 \cdot \cos^2 \psi \cdot \cos^2 \chi \cdot ds$$

aber

$$ds = MN \cdot d\chi \cdot b - b \cdot d\chi \cdot b,$$

wo b die Breite des Instruments, nämlich $b = MM'$ ist. Nun ist MN die Normale $= \sqrt{MP^2 + NP^2}$; aber NP , die Subnormale der Parabel, ist eine Constante, ist gleich $\frac{1}{2}p$. Ferner ist $MP = r \cdot \sin \theta$, also

$$ds = \sqrt{\frac{p^2}{4} + r^2 \cdot \sin^2 \theta} \cdot b \cdot d\chi - b^2 \cdot d\chi.$$

Ferner ist

$$r \cdot \sin \theta = \frac{p}{2} \operatorname{tg} \chi; \quad \sqrt{\frac{p^2}{4} + r^2 \sin^2 \theta} = \frac{p}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \chi} = \frac{\frac{p}{2}}{\cos \chi}$$

$$ds = \left(\frac{\frac{p}{2} b}{\cos \chi} - b^2 \right) d\chi$$

und da ferner

$$\cos^2 \psi = c \cdot \sin^2 \chi,$$

so kommt

$$(1) \quad dR = \varrho \cdot v^2 \cdot c^2 \cdot \sin^2 \chi \cdot \cos^2 \chi \cdot \left(\frac{\frac{p}{2} b}{\cos \chi} - b^2 \right) d\chi.$$

2) Wir wollen jetzt den Fall betrachten, wo der Luftstrom noch in der Primärebene enthalten, aber der Axe BN nicht mehr parallel ist. Bewege sich der Schwerpunkt F parallel der Linie KM , so wird das Element ds , in welchem M liegt, von einem Luftstrom getroffen, dessen Richtung MK ist. Nennen wir wieder die Geschwindigkeit des Schwerpunkts v und findet keine Rotation statt, so haben wir wieder den allgemeinen Ausdruck

$$dR = \varrho \cdot v^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot ds$$

wo wieder φ als Function von χ , ψ , θ einzusetzen ist. Anstatt anzunehmen, der Schwerpunkt F bewege sich parallel der Linie KM , können wir auch annehmen, es habe eine Drehung des Instruments um den Schwerpunkt stattgefunden, dieser Punkt bewege sich noch nach derselben

Richtung, die anfangs der Symmetralen BN parallel war. Nennen wir nun die Winkelgeschwindigkeit ω , so wird der Winkel $KMR = \omega t$, wo t die Zeit bedeutet. Wir betrachten bloß denjenigen Druck, der aus der Bewegung des Schwerpunktes entsteht, nicht auch den, der aus der angenommenen Rotation entspringt. Nun ist

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \cos KML = \cos \psi \cdot \cos (NMR - RMK) \\ &= \cos \psi \cdot \cos (\chi - \omega t),\end{aligned}$$

wobei ich noch einmal bemerken will, daß die Ebene LMN senkrecht auf der Primärebene steht, die Winkel NMR und RMK hingegen in der Primärebene liegen. Es kommt also, da wieder wie vorhin

$$\begin{aligned}ds &= \left(\frac{\frac{pb}{2}}{\cos \chi} - b^2 \right) d\chi \\ dR &= \rho \cdot v^2 \cdot \cos^2 \psi \cdot \cos^2 (\chi - \omega t) \cdot \left[\frac{\frac{pb}{2}}{\cos \chi} - b^2 \right] \cdot d\chi\end{aligned}$$

oder wenn man $\cos^2 (\chi - \omega t)$ entwickelt

$$\begin{aligned}(2) \quad dR &= c^2 \cdot \sin^2 \chi \cdot \rho \cdot v^2 \cdot \left(\frac{\frac{1}{2} pb}{\cos \chi} - b^2 \right) (\cos^2 \chi \cdot \cos^2 \omega t \\ &\quad + 2 \cdot \sin \chi \cdot \cos \chi \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t + \sin^2 \chi \cdot \sin^2 \omega t) d\chi.\end{aligned}$$

Wir haben in den Formeln (1) und (2) dR als Function von χ dargestellt, weil die Formeln einfacher werden als wenn wir diese GröÙe etwa als Function von θ ausdrücken.

3) *Rotation.* Wir wollen jetzt den Luftdruck betrachten, welcher aus der Rotation des Instruments allein hervorgeht. Da das Instrument sich um seinen Schwerpunkt F Fig. 4, Taf. I dreht, so wird die Richtung des Luftstroms in jedem Augenblick rechtwinklig auf FM , oder r stehen. Findet nun die Rotation in der Primärebene statt, so wird MW , welche Richtung senkrecht auf r steht, die Richtung des Luftstroms seyn. Unsere allgemeine Gleichung

$$dP = \rho \cdot v^2 \cdot ds \cdot \sin^2 \varphi$$

muß wieder gelten, wo v in $r\omega$ übergeht, wenn ω die

Winkelgeschwindigkeit ist. Um φ durch χ auszudrücken haben wir

$$\sin \varphi = \cos WML; \quad \cos NMW = \sin(\theta - \chi)$$

$$\sin \varphi = \cos \psi \cdot \sin(\theta - \chi)$$

$$\begin{aligned} dR &= \rho \cdot r^2 \cdot \omega^2 \left(\frac{\frac{1}{2} p b}{\cos \chi} - b^2 \right) \cos^2 \psi \cdot \sin^2(\theta - \chi) d\chi \\ &= \rho \cdot r^2 \cdot \omega^2 \left(\frac{\frac{1}{2} p b}{\cos \chi} - b^2 \right) c^2 \cdot \sin^2 \chi [\sin \theta \cdot \cos \chi \\ &\quad - \cos \theta \cdot \sin \chi]^2 d\chi. \end{aligned}$$

Um nun $\sin \theta$ und $\cos \theta$ durch χ auszudrücken, hat man $\sin \theta = \frac{\frac{1}{2} p}{r} \cdot \operatorname{tg} \chi$ (bekannte Eigenschaft der Parabel)

$$\cos \theta = \frac{\frac{1}{2} p}{r} - 1 \quad \left(\text{aus der Gleichung der Parabel } r = \frac{\frac{1}{2} p}{1 + \cos \theta} \right)$$

$$r = \frac{\frac{1}{2} p}{\cos^2 \chi} \quad (\text{aus den letzten beiden Gleichungen}).$$

Und diesen Werth von r in die Ausdrücke für $\sin \theta$ und $\cos \theta$ eingesetzt, ist

$$\sin \theta = 2 \cdot \cos^2 \chi \cdot \operatorname{tg} \chi = 2 \cdot \sin \chi \cdot \cos \chi$$

$$\cos \theta = 2 \cdot \cos^2 \chi - 1.$$

So kommt also jetzt für dR der Ausdruck

$$\begin{aligned} dR &= \rho \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{\frac{1}{2} p b}{\cos \chi} - b^2 \right) \cdot c^2 \cdot \sin^2 \chi [2 \cdot \sin \chi \cdot \cos^2 \chi \\ &\quad - \sin \chi (2 \cos^2 \chi - 1)]^2 \\ &= \rho \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{\frac{1}{2} p}{\cos \chi} \right)^2 \cdot \left(\frac{\frac{1}{2} p b}{\cos \chi} - b^2 \right) c^2 \cdot \sin^2 \chi (4 \cdot \sin^2 \chi \cdot \cos^4 \chi \\ &\quad - 4 \cdot \sin \chi \cdot \cos^2 \chi (2 \cdot \cos^2 \chi - 1) \cdot \sin \chi \\ &\quad + (2 \cdot \cos^2 \chi - 1)^2 \sin^2 \chi) d\chi \\ &= \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot c^2 \cdot p^3 \cdot b}{32} \left(4 \cdot \sin^4 \chi \cdot \cos \chi - 4 \cdot \frac{\sin^4 \chi}{\cos \chi} (2 \cdot \cos^2 \chi - 1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin^4 \chi}{\cos^3 \chi} (2 \cdot \cos^2 \chi - 1)^2 \right) d\chi \\ &= \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot c^2 \cdot p^3 \cdot b^2}{16} \left(4 \cdot \sin^4 \chi \cdot \cos^2 \chi - 4 \cdot \sin^4 \chi (2 \cdot \cos^2 \chi - 1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin^4 \chi}{\cos^2 \chi} (2 \cdot \cos^2 \chi - 1)^2 \right) d\chi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dR = & \frac{\varrho \cdot \omega^2 \cdot c^2 p^3 b}{32} \left(4 \cdot \sin^4 \chi \cdot \cos \chi - 8 \sin^4 \chi \cdot \cos \chi + 4 \cdot \frac{\sin^4 \chi}{\cos \chi} \right. \\
& \left. + 4 \cdot \sin^6 \chi \cdot \cos \chi - 6 \frac{\sin^4 \chi}{\cos \chi} + \frac{\sin^4 \chi}{\cos^3 \chi} \right) d\chi \\
& - \frac{\varrho \cdot \omega^2 \cdot c^2 p^2 b^2}{16} \left(4 \cdot \sin^4 \chi \cdot \cos^2 \chi - 8 \sin^4 \chi \cdot \cos^2 \chi + 4 \cdot \sin^4 \chi \right. \\
& \left. + 4 \cdot \sin^4 \chi \cdot \cos^2 \chi - 4 \cdot \sin^4 \chi + \frac{\sin^4 \chi}{\cos^2 \chi} \right) d\chi.
\end{aligned}$$

Und läßt man nun diejenigen Glieder aus, welche sich aufheben, so kommt die weit einfachere Gleichung

$$(3) \quad dR = \frac{p^3 \cdot b \cdot c^3 \cdot \varrho \cdot \omega^2}{32} \cdot \frac{\sin^4 \chi}{\cos^3 \chi} d\chi - \frac{p^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \varrho \cdot \omega^2}{16} \cdot \frac{\sin^4 \chi}{\cos^2 \chi} d\chi.$$

Diese Gleichung bedarf noch einer Erörterung. Da das Element der Fläche ein unendlich schmaler Streifen ist, welcher die Länge b in der Richtung MN besitzt, so ist es nicht strenge richtig zu setzen $v = r\omega$, wie wir gethan haben. Strenge genommen sollten wir den Mittelpunkt des Druckes auf der Strecke b suchen und dann r um die entsprechende Gröfse vermindern, da doch r dem Punkte M zugehört. Doch wird diese Gröfse, um welche r verkleinert werden müfste, offenbar kleiner seyn müssen als $\frac{1}{2}b \cdot \sin WMN$ d. h. kleiner als $\frac{1}{2}b \cdot \cos(\theta - \chi)$. Da nun der Druck, welcher aus der Rotation entspringt, für das Element, in welchem der Punkt B liegt, gleich Null ist, und nach den beiden Enden hin zunimmt, wegen der Krümmung der Fläche; so wird es erlaubt seyn r als den Halbmesser anzusehen, welcher den Mittelpunkt des Drucks mit dem Schwerpunkt des Instruments verbindet. Wollte man aber unsere Vereinfachung nicht zulassen, so könnte man dadurch zum Ziel kommen, zu einem für praktische Zwecke völlig ausreichenden Resultat, dafs man die Parabel so in die Mitte der Figur legte, wie durch die punktirte Linie angedeutet ist, so dafs also ABC eine äufsere und $A'B'C'$ eine innere Aequidistante wäre. Wir wollen also die Gleichung (3) als genügend richtig ansehen.

4) *Allgemeiner Ausdruck* für den Druck auf das Element der Fläche. Um nun den allgemeinsten Fall des

Druckes durch einen Luftstrom zu betrachten, möge die Primärebene eine beliebige Lage zu drei rechtwinkligen Axen haben, auf welche wir die Bewegung des Bumerangs beziehen. Ferner möge die Richtung der Bewegung des Schwerpunktes drei beliebige Winkel α, β, γ mit diesen drei Coordinatenaxen bilden. Der allgemeine Ausdruck

$$dR = \rho \cdot v^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot ds$$

wird noch immer gelten. Wir wollen ihn aber jetzt schreiben;

$$dR = \rho \cdot v^2 \cdot \cos^2 \varphi' \cdot ds$$

indem φ' den Winkel bedeutet, welchen die Richtung des Luftstroms mit dem Perpendikel auf das Element der Fläche einschließt. Um nun $\cos \varphi'$ als Function der Dimensionen des Instrumentes, so wie seiner Lage auszudrücken, wollen wir die Richtung des Luftstromes auf die Primärebene projiciren und auf eine zweite Ebene, welche senkrecht auf der Primärebene steht und in welcher die Symmetrale BN der Fig. 5, Taf. I enthalten ist, so daß also BN der Durchschnitt der beiden Ebenen ist.

Seyen die beiden Projectionsgleichungen der Richtung des Luftstromes

$$z = ax + b; \quad y = kx + l.$$

Nun wollen wir auch das Perpendikel ML auf dieselben Ebenen projiciren, Die Projectionsgleichungen desselben seyen

$$z = m\chi + p; \quad y = n\chi + q$$

so lehrt die analytische Geometrie, daß

$$\cos \varphi' = \frac{1 + am + kn}{\sqrt{1 + a^2 + k^2} \sqrt{1 + m^2 + n^2}}$$

Sey nun ML ein Perpendikel auf die Primärebene, RW die Richtung des Luftstroms, QL und RN die verticale und f die horizontale Projection desselben, MN die horizontale Projection des Perpendikels ML ; PL die verticale Projection von ML . Dann ist $MLR = \varphi'$, ferner $n = \operatorname{tg} \chi$ und $m = \operatorname{tg} LPN$. Aber

$$\sin \psi = \cos \psi \cdot \cos \chi \cdot \operatorname{tg} L R N$$

$$m = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\cos \chi} = \frac{\sin \psi}{c \cdot \sin \chi \cdot \cos \chi}.$$

Ferner ist $k = \operatorname{tg} R N B$. Da nun, wie ja die Beobachtung lehrt, *die* Componente der Richtungsänderung der Bahn, welche in der Primärebene liegt, für *eine* Umdrehung des Instruments um seinen Schwerpunkt, sehr gering ist, so dürfen wir den Winkel, der diese Richtungsänderung ausdrückt, gegen 2π vernachlässigen und setzen $R N B = \omega t$, wo ω die Winkelgeschwindigkeit, t die Zeit ist.

Wir wollen nun den Winkel $R L N$ einführen, welchen der Luftstrom mit dem Perpendikel auf die Primärebene einschließt. Dieser Winkel heiße δ , dann ist

$$\cos \delta = \sin \delta \cdot \cos \omega t \cdot \operatorname{tg} L O N = \sin \delta \cdot \cos \omega t \cdot a.$$

$$a = \frac{\operatorname{cotg} \delta}{\cos \omega t}.$$

Führen wir nun alle diese Größen in den Ausdruck für $\cos \varphi'$ ein, so ist

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi' &= \frac{\left(1 + \frac{\operatorname{cotg} \delta}{\cos \omega t} \cdot \frac{\sin \psi}{c \cdot \sin \chi \cdot \cos \chi} + \operatorname{tg} \omega t \cdot \operatorname{tg} \chi\right)^2}{\left(1 + \frac{\operatorname{cotg}^2 \delta}{\cos^2 \omega t} + \operatorname{tg}^2 \omega t\right) \left(1 + \frac{\sin^2 \psi}{c^2 \cdot \sin^2 \chi \cdot \cos^2 \chi} + \operatorname{tg}^2 \chi\right)} \\ &= \frac{\cos^2 \omega t \cdot \cos^2 \chi \left(1 + \frac{\operatorname{cotg} \delta}{\cos \omega t} \cdot \frac{\sin \psi}{c \cdot \sin \chi \cdot \cos \chi} + \operatorname{tg} \omega t \cdot \operatorname{tg} \chi\right)}{(1 + \operatorname{cotg}^2 \delta) (1 + \operatorname{tg}^2 \psi)} \end{aligned}$$

Da aber

$$1 + \operatorname{tg}^2 \psi = 1 + \frac{1 - c^2 \sin^2 \chi}{c^2 \cdot \sin^2 \chi} = \frac{1}{c^2 \cdot \sin^2 \chi}$$

so ist

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi' &= \frac{c^2 \cdot \sin^2 \chi \cdot \cos^2 \omega t \cdot \cos^2 \chi}{1 + \operatorname{cotg}^2 \delta} \left(1 + \frac{\operatorname{cotg} \delta}{\cos \omega t} \cdot \frac{\sin \psi}{c \cdot \sin \chi \cdot \cos \chi} + \operatorname{tg} \omega t \cdot \operatorname{tg} \chi\right)^2 \\ &= \frac{c^2 \cdot \sin^2 \chi}{1 + \operatorname{cotg}^2 \delta} \left(\cos \omega t \cdot \cos \chi + \operatorname{cotg} \delta \cdot \frac{\sqrt{1 - c^2 \cdot \sin^2 \chi}}{c \cdot \sin \chi} + \sin \omega t \cdot \sin \chi\right)^2 \end{aligned}$$

Also

$$(4) \quad dR = \rho \cdot v^2 \left(\frac{\frac{1}{2} p b}{\cos \chi} - b^2 \right) \frac{c^2 \cdot \sin^2 \chi}{1 + \cotg^2 \delta} (\cos \omega t \cdot \cos \chi + \cotg \delta \cdot \frac{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \chi}}{c \cdot \sin \chi} + \sin \omega t \cdot \sin \chi)^2 d\chi.$$

Soll dieser Ausdruck allgemein den Druck angeben, der auf ein Element der Fläche des Bumerangs wirkt in Folge der Bewegung des Schwerpunkts des Instruments in seiner Bahn, so muß darin die Gleichung (2) auf Seite 9 als specieller Fall enthalten seyn. In der That, sey wieder der Luftstrom der Primärebene parallel, so wird $\delta = 90^\circ$ und $\cotg \delta = 0$. Dann haben wir genau wie in Gl. (2).

$$dR = \rho \cdot v^2 \left(\frac{\frac{1}{2} p b}{\cos \chi} - b^2 \right) c^2 \cdot \sin^2 \chi (\cos \omega t \cdot \cos \chi + \sin \omega t \cdot \sin \chi)^2 d\chi.$$

Einfluß des Luftdrucks auf die Bewegung des Bumerangs.

Wir haben die Differentialgleichungen für zweierlei Arten von Luftdruck gefunden, nämlich für denjenigen Druck, welcher aus der Rotation des Instruments entsteht, und den, der von der Bewegung des ganzen Instruments in seiner Bahn, abgesehen von der Rotation, herrührt. Die erste Art des Druckes wollen wir durch den Index w von der andern unterscheiden, welche den Index v haben mag, so daß $dR_{(w)}$ und $dR_{(v)}$ diese Druckkräfte darstellen. Wir wollen nun untersuchen wie diese Kräfte auf das Instrument wirken. Zuerst leuchtet ein, daß $dR_{(w)}$ nicht von der Bahn abhängt, welche das Instrument beschreibt, sondern (für dasselbe Instrument) sich nur mit der Winkelgeschwindigkeit ändert. Dies zeigt auch die Gleichung (3). Nun wollen wir $dR_{(w)}$ in zwei Componenten zerlegen, wovon die eine in der Primärebene enthalten ist und die andere senkrecht auf derselben steht. Diese beiden Componenten werden $dR_{(w)} \cdot \cos \psi$ und $dR_{(w)} \sin \psi$ seyn. Zuerst betrachten wir

$dR_{(w)} \cdot \sin \psi$. Diese Kräfte wirken sämmtlich in der gleichen Richtung, nämlich senkrecht auf die Primärebene. Sie sind nun völlig gleichmäßig um die Symmetrale vertheilt, so daß sie keine Drehung um die Symmetrale zu er-

zeugen streben. Ziehen wir aber in der Primärebene eine Linie, die senkrecht auf der Symmetralen steht und durch den Punkt F geht, so werden sich die Druckkräfte um diese Linie nicht das Gleichgewicht halten. Da nämlich der Druck, welcher aus der Rotation entspringt für das Element der Fläche, welche die Symmetrale durchschneidet, gleich Null ist und nach den Enden A und C hin immer zunimmt, so wird der Mittelpunkt aller dieser Drucke auf der Symmetralen um eine Strecke χ_1 nach Rechts von F , nach unserer Zeichnung, liegen. Die Strecke χ_1 wird durch die Gleichung bestimmt

$$\chi_1 = \frac{\int dR_{(r)} \cdot \sin \psi \cdot r \cdot \cos \theta}{\int dR_{(r)} \cdot \sin \psi}$$

ganz nach Art der Berechnung des Schwerpunkts von ebenen Flächen. Diese Integrale müssen natürlich über das ganze Instrument ausgedehnt werden. Das Moment

$$\chi_1 \cdot \int dR_{(r)} \cdot \sin \psi$$

wird also eine Nutation hervorzubringen streben, während die Kraft $\int dP_{(r)} \cdot \sin \psi$ das Instrument parallel der Rotationsaxe zu bewegen sucht.

$dR_{(r)} \cdot \cos \psi$ wirkt in der Richtung MN unserer Zeichnung. Diese Kräfte sind ganz gleichmäfsig um die Symmetrale vertheilt und unterstützen gegenseitig ihre Wirkung. Sie suchen die Winkelgeschwindigkeit zu vermindern und die Summe ihrer Momente in Beziehung auf die Rotationsaxe ist:

$$\begin{aligned} \int dR_{(r)} \cdot \cos \psi \cdot \cos [90 - (\theta - \chi)] \cdot r \\ = \int dR_{(r)} \cdot \cos \psi \cdot r \cdot \sin (\theta - \chi). \end{aligned}$$

$dR_{(r)} \cdot \sin \psi$. Diese Kräfte wirken senkrecht auf die Primärebene, aber nicht in gleichem Sinn. Projiciren wir nämlich die Richtung des Luftstroms auf die Primärebene und ziehen in der Richtung dieser Projection eine Linie

durch den Punkt F , dann theilt diese Gerade das Instrument so in zwei Theile, daß die Momente der Drucke $dR_{(v)} \cdot \sin \psi$ sich unterstützen; daß $dR_{(v)}$ auf der einen Seite in positiver, auf der andern in negativer Richtung wirkt, wenn wir, um einen bestimmten Fall zu betrachten, die Primärebene horizontal liegend annehmen. Diese Kräfte werden also eine Drehung der Primärebene um die Richtung der Projection der Luftströmung als Axe zu erzeugen streben. Das Drehungsmoment jedes elementaren Druckes in Beziehung auf die Umdrehungsaxe wird seyn $dR_{(v)} \cdot \sin \psi \cdot r$ und die Summe dieser Momente $\int dR_{(v)} \cdot \sin \psi \cdot r$ für das ganze Instrument genommen. $dR_{(v)} \cos \psi$ sucht die Geschwindigkeit v zu vermindern. Für die Richtung des Luftstroms beträgt dieselbe

$$dR_{(v)} \cdot \cos \psi \cdot \cos (\chi - \omega t),$$

senkrecht hierauf

$$dR_{(v)} \cdot \cos \psi \cdot \sin (\chi - \omega t).$$

Bahnen des Bumerangs.

1) *Der Horizontalwurf.* Der Wurf ist, wie Erdmann bemerkt, derjenige, welcher vermuthlich von den Australiern am häufigsten auf der Jagd angewandt wird. Das Instrument fliegt fast horizontal, also in beinahe constanter Höhe über dem Erdboden dahin, indem es um seinen Schwerpunkt rotirt. Es bestreicht auf diese Weise eine ziemlich große Fläche, und trifft seine scharfe Kante die Hinterbeine eines „*Bumers*“, wie die männlichen Kängurus von den Australiern genannt werden, so wird das Thier zu Boden stürzen.

Um diesen Wurf auszuführen, wird der Bumerang an dem Ende mit der rechten Hand gefaßt, welches in unserer Zeichnung mit CC' bezeichnet ist, wird dann nach einem Punkte auf dem Boden geworfen, der eine Entfernung von etwa 30 bis 40 Fuß hat. Hiebei läßt man die Rotationsebene gegen den Horizont in folgender Weise

geneigt seyn. Führen wir die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z ein, wo z vertical, x und y horizontal sind, während x der anfänglichen Richtung des Wurfs parallel ist, so ist der Schnitt der Primärebene mit der xy -Ebene eine der x -Axe parallele Gerade, welche zur Rechten des Anfangspunktes der Bewegung sich befindet. Die beiden Ebenen bilden einen Winkel von ungefähr 15 bis 20 Grad mit einander. Das Instrument trifft dann den Boden nicht an dem Punct, nach welchem man gezielt hat, sondern hebt sich ehe es den Boden erreicht und streicht dann wie gesagt beinahe horizontal über dem Boden dahin. Es beschreibt nun eine Curve, die wir untersuchen wollen. Für die Beschleunigung in verticaler Richtung werden wir finden

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g + \frac{[f dR_{(\omega)} \cdot \sin \psi]}{M} \cdot \cos \alpha$$

wo t die Zeit, g die Beschleunigung der Schwere, M die Masse des Instruments bedeutet. Der Winkel α ist derjenige, welchen die Rotationsaxe mit der Verticalen, also der z -Richtung einschließt. Die Größe $dR_{(\omega)}$ ist auf Seite 11 durch Formel (3) gegeben; $\sin \psi$ ist, wie früher bestimmt wurde, gleich

$$\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \chi}, \text{ da doch } \cos \psi = c \cdot \sin \chi$$

war. Setzen wir diese Werthe in die letzte Gleichung ein, so kommt

$$(1) \quad \frac{dz^2}{dt^2} = -g + \left[\frac{a^3 b \cdot c^2 \cdot \varphi \cdot \omega^2}{32} \int \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \chi} \cdot \frac{\sin^3 \chi}{\cos^3 \chi} d\chi \right. \\ \left. - \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \varphi \cdot \omega^2}{16} \int \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \chi} \cdot \frac{\sin^4 \chi}{\cos^2 \chi} d\chi \right] \cos \alpha.$$

Nun ist aber α eine Function der Zeit. Diese wollen wir zunächst bestimmen. Da die Richtung des Luftstroms der x -Axe parallel ist, so wirkt das ganze Moment von $dR_{(\omega)} \cdot \sin \psi$ so, daß es den Winkel α zu verkleinern sucht. Die andere Kraft, welche noch den Winkel α zu ändern sucht, nämlich $\chi_1 \int dR^{(\omega)} \cdot \sin \psi$, strebt eine Nutation der

Rotationsaxe um die z -Richtung hervorzubringen. Aber da χ , so klein ist, so werden wir der Wahrheit sehr nahe kommen, wenn wir diese Kraft ganz außer Acht lassen. Die Schwankungen der Axe, welche durch diese Kraft erzeugt werden, können nur sehr gering seyn, sie werden praktisch gegen den Einfluß von $\int dR_{(v)} \cdot \sin \psi$ verschwinden. Demnach ist also

$$d\alpha = - \left(\frac{\int dR_{(v)} \cdot \sin \psi}{K} \right) dt,$$

wo K diejenige Kraft ist, welche die Rotationsebene zu erhalten sucht. Sie ist der Winkelgeschwindigkeit proportional, gleich $C\omega$, wo C für jedes Instrument einen besondern Werth hat. Also

$$d\alpha = - \left(\frac{\int dR_{(v)} \cdot \sin \psi}{C \cdot \omega} \right) dt.$$

Nun fanden wir früher, Formel (2) einen Ausdruck für $dR_{(v)}$. Er ist eine Function von χ . Ebenso ist

$$\sin \psi = \sqrt{1 - c^2 \cdot \sin^2 \chi}$$

eine Function von χ . Der Werth des Integrals

$$\int dR_{(v)} \cdot \sin \psi$$

ist also eine Constante für jedes individuelle Instrument, deren numerische Bestimmung für irgend einen gegebenen Bumerang ausführbar ist. Setzen wir diese Constante gleich B , so ist also

$$d\alpha = - \frac{B}{C \cdot \omega} \cdot dt$$

$$\alpha = - \frac{B}{C \cdot \omega} \cdot t + \alpha_1$$

wo α_1 den Anfangswerth von α bezeichnet. Diefß gilt natürlich nur so lange als ω constant angesehen wird. Nun ist wirklich der Unterschied der Werthe von ω im Anfang und gegen das Ende der Bewegung nur gering, was daraus zu ersehen ist, daß, wenn dies nicht der Fall wäre, der Bumerang sich nicht so lange in der Horizontalebene erhalten würde. Bei der von uns angenommenen

Lage der Rotationsaxe ist nun auch die Verminderung, welche die Geschwindigkeit v des Schwerpunkts erleidet, ein Minimum. Wir setzen also sowohl v als auch ω constant für die ganze Dauer des Wurfs. Die Rotationsaxe ändert sich nämlich fast genau in dem Sinn, daß sie immer rechtwinklig auf der x -Axe steht.

Nun sind in Gl. 1 auf Seite 17 die Integrale

$$\int \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \chi} \cdot \frac{\sin^4 \chi}{\cos^3 \chi} \cdot d\chi \quad \text{und} \quad \int \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \chi} \cdot \frac{\sin^4 \chi}{\cos^2 \chi} \cdot d\chi$$

für jedes individuelle Instrument constante Größen. Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\frac{a^3 b \cdot c^3 \cdot \varphi \cdot \omega^3}{32} \int \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \chi} \cdot \frac{\sin^4 \chi}{\cos^3 \chi} d\chi = D$$

$$\frac{a^3 b^3 \cdot c^3 \cdot \varphi \cdot \omega^3}{16} \int \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \chi} \cdot \frac{\sin^4 \chi}{\cos^2 \chi} d\chi = E$$

so finden wir endlich für $\frac{d^2 z}{dt^2}$ den Werth

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g + (D - E) \cos \left(\alpha_1 - \frac{B}{C\omega} t \right)$$

oder Kürze halber $D - E = G$ gesetzt; und $\frac{B}{C\omega} = H$

$$(2) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g + G \cdot \cos (\alpha_1 - Ht)$$

Multipliciren wir nun beiderseits mit dt und integriren, so kommt

$$\frac{dz}{dt} = -gt - \frac{G}{H} \sin (\alpha_1 - Ht) + C.$$

Wird $t = \text{Null}$, so ist $\frac{dz}{dt} = 0$, also

$$C = \frac{G}{H} \cdot \sin \alpha_1$$

$$(3) \quad \frac{dz}{dt} = -gt - \frac{G}{H} \cdot \sin (\alpha_1 - Ht) = \frac{G}{H} \cdot \sin \alpha_1$$

Noch einmal mit dt multiplicirt und dann integrirt,ergiebt sich

$$z = -\frac{gt^2}{2} - \frac{G}{H^2} \cdot \cos (\alpha_1 - Ht) + \frac{G}{H} t \cdot \sin \alpha_1 + C$$

Wird nun $t=0$, so ist $z=0$, also

$$C' = \frac{G}{H^2} \cdot \cos \alpha_1$$

$$(4) \ z = -\frac{gt^2}{2} - \frac{G}{H^2} \cdot \cos(\alpha_1 - Ht) + \frac{G}{H} \cdot t \cdot \sin \alpha_1 + \frac{G}{H^2} \cos \alpha_1$$

Wir wollen nun zuerst eine Gleichung zwischen y und t aufsuchen. Nach der Richtung y wirkt nun die Druckgröße $dR_{(e)} \cdot \sin \psi \cdot \sin \alpha$, so daß

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dR_{(e)} \cdot \sin \psi}{M} \cdot \sin \alpha$$

wo M die Masse des Bumerangs bedeutet. Setzen wir wieder, wie oben

$$\int dR_{(e)} \cdot \sin \psi = B$$

so ist

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{B}{M} \sin\left(\alpha_1 - \frac{B}{C_w} t\right)$$

$$(5) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{B}{M} \cdot \sin(\alpha_1 - Ht)$$

Beiderseits mit dt multiplicirt und integrirt, ergibt sich

$$\frac{dy}{dt} = \frac{B}{M \cdot H} \cos(\alpha_1 - Ht) + C$$

Da nun für $t=0$, auch $\frac{dy}{dt}=0$, so ist

$$C = -\frac{B}{MH} \cos \alpha_1$$

$$(6) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{B}{MH} \cos(\alpha_1 - Ht) - \frac{B}{MH} \cdot \cos \alpha_1$$

Wieder mit dt multiplicirt und dann integrirt,

$$y = -\frac{B}{MH^2} \sin(\alpha_1 - Ht) - \frac{B \cdot t}{MH} \cdot \cos \alpha_1 + C'$$

Für $t=0$ muß $y=0$ werden, also

$$C' = \frac{B}{MH^2} \cdot \sin \alpha_1$$

$$(7) \ y = -\frac{B}{MH^2} \cdot \sin(\alpha_1 - Ht) - \frac{B \cdot t}{MH} \cdot \cos \alpha_1 + \frac{B}{MH^2} \cdot \sin \alpha_1$$

Jetzt bleibt uns noch übrig, x zu bestimmen. Da wir hier die Geschwindigkeit des Instruments in seiner Bahn

constant gesetzt haben, so wird, da die Bewegung nach y unabhängig hievon geschieht, und da die hiezu verwendete Arbeit aus der lebendigen Kraft her stammt, welche das Instrument vermöge seiner Rotation besitzt, die Beschleunigung nach der x -Richtung gleich Null seyn, also

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0; \quad \frac{dx}{dt} = c'$$

$$(8) \quad x = c' t$$

wo für $t=0$ auch $x=0$ wird, also keine Constante zuzufügen ist. Setzen wir nun diesen Werth von t , nämlich $t = \frac{x}{c}$ in die Gleichung (4) ein, so kommt

$$(9) \quad z = -\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot c^2} - \frac{G}{H^2} \cos\left(\alpha_1 - H \frac{x}{c}\right) + \frac{G \cdot x}{H \cdot c} \sin \alpha_1 + \frac{G}{H^2} \cdot \cos \alpha_1$$

als Projectionsgleichung der Bahn auf die xz -Ebene.

Und ebenso

$$(10) \quad y = -\frac{B}{MH^2} \cdot \sin\left(\alpha_1 - H \frac{x}{c}\right) - \frac{B \cdot x}{M \cdot H \cdot c} \cdot \cos \alpha_1 + \frac{B}{MH^2} \cdot \sin \alpha_1$$

als Projectionsgleichung der Bahn auf die xy -Ebene.

Um die durch diese letzten beiden Gleichungen bestimmte Curve zu zeichnen, müssen natürlich die Constanten, welche in den Ausdrücken vorkommen, bestimmt werden. Diese Constanten werden für jedes individuelle Instrument besondere Werthe haben. Da es mir mehr daran lag, die Form dieser Gleichungen im Allgemeinen zu bestimmen, als die Curven zu zeichnen, welche ein bestimmtes Instrument beschreibt, so unterlasse ich es diese Constanten numerisch anzugeben.

Auch verzichte ich für jetzt darauf, den allgemeineren Fall zu behandeln, dafs nicht mehr v und ω als constant angesehen werden, und dafs das Instrument unter beliebigem Elevationswinkel geworfen wird, indem ich hoffe, dafs es mir in nicht ferner Zeit vergönnt seyn wird, hierüber angestellte Rechnungen im Einzelnen mit noch anzustellenden Versuchen zu vergleichen und sodann die Resultate den Lesern dieser Annalen vorzulegen.

H. Schütz, Sch. Inst. Berlin.