**IV. Ueber eine rein magnetische Wärme-Compensation des Bifilar-Magnetometers;
von Dr. Carl Braun in Prefsburg.**

Das Bifilar-Magnetometer erfüllt seinen Zweck bekanntlich dadurch, daß der bewegliche Magnetstab beständig eine Gleichgewichtslage einnimmt, welche durch die richtende Kraft der horizontalen Componente des Erdmagnetismus einerseits und von einer bekannten Torsionskraft anderseits bedingt wird. Es giebt hiernach durch seine Schwankungen die Variationen in der Intensität des Erdmagnetismus an; und das wird beabsichtigt. Allein die richtende Kraft des Erdmagnetismus ist auch von der Intensität des Stabmagnetismus abhängig. Also werden auch Aenderungen in dieser Intensität Schwankungen des Stabes bewirken; und das ist dem Zweck zuwider. Man muß also diese Schwankungen eliminiren. Die Aenderungen in dem magnetischen Moment eines Stabes sind aber, nachdem derselbe nach den erfahrungsmäßigen Regeln magnetisirt worden, und seinen constanten Magnetismus angenommen hat, fast ausschließlich durch die Wärme bedingt, indem der Magnetismus durch Temperaturzunahme geschwächt, durch Abnahme wieder gestärkt wird.

Um diesen störenden Einfluß der Temperatur zu beseitigen wendet man meistens Reductionstabeln an, in denen zu jeder Temperatur und Intensität des Erdmagnetismus die Correction enthalten ist, welche an letzterer angebracht werden muß, um den Einfluß der Temperatur zu eliminiren.

Es giebt dann auch Vorrichtungen, welche diesen Einfluß im Apparat selbst beseitigen. Man hat dazu mehrere Methoden; im Allgemeinen aber kann man unterscheiden: 1) die *rein mechanischen Compensationen*, welche darin bestehen, daß als compensirendes Agens nur die Wärme mittelst der durch sie bewirkten Ausdehnung angewendet

wird. Die Fäden sind nämlich so befestigt, daß durch eine Temperaturzunahme ihre Distanz im richtigen Verhältniß abnimmt, folglich die Abnahme der richtenden magnetischen Kraft durch eine entsprechende Abnahme der Torsionskraft compensirt wird. — 2) Die *mechanisch-magnetischen Compensationen* wenden als direct wirksames Agens die Anziehung eines magnetischen Hilfsstabes, als moderirendes Agens aber die Wärme an, indem eine von der Temperatur beeinflusste Hebelvorrichtung jenen Stab so bewegt, daß er bei Temperaturzunahme dem beweglichen Stab näher gebracht wird, und mithin durch seine vermehrte Anziehungskraft die Schwankung desselben verhindert, welche durch Abnahme des Stabmagnetismus hervorgebracht werden würde. Bei Temperaturzunahme entfernt sich der Hilfsstab im entsprechenden Verhältniß.

Diese Methoden, einschließlic der Reductionsmethode durch Rechnung, unterliegen alle einem wesentlichen Fehler, indem bei allen vorausgesetzt wird, daß einer bestimmten Temperatur auch beständig eine bestimmte Intensität des Stabmagnetismus entspreche. Diefs ist aber nicht der Fall, einestheils weil der bei Temperaturzunahme erfolgende Verlust an Magnetismus durch die entsprechende Temperaturabnahme nicht vollständig wieder ersetzt wird, und andernteils weil die Temperatur-Aenderung die Aenderung des Magnetismus nicht augenblicklich bewirkt, sondern sehr allmählich, so daß jene schon längere Zeit bestehen kann, ohne daß diese wenigstens vollständig schon eingetreten wäre. Hieraus folgt, daß keine Compensation vollkommen seyn kann, in welcher die Temperatur durch ihre mechanischen Wirkungen zur Compensation unmittelbar oder mittelbar beiträgt. Die Compensation kann nur dann dem Zweck genau entsprechen, wenn das corrigirende Agens mit dem zu corrigirenden gleicher Natur ist, insofern nur dann die Schwankungen in ihrer Wirksamkeit nach einem gemeinschaftlichen Gesetz verlaufen. Dieses Princip wird verwirklicht in der *rein magnetischen Compensation*, deren Wirksamkeit aus Folgendem erhellt. Sey

unter denselben Umständen und genau in der gleichen Weise magnetisirt.

Um aber etwas näher auf die Bestimmung der anzuwendenden Kräfteverhältnisse einzugehen, bezeichne M das magnetische Moment der horizontalen Componente des Erdmagnetismus, m das des Bifilarstabes, μ das des Hilfsstabes. T sey die richtende Kraft des Erdmagnetismus im horizontalen Sinn, τ die des Hilfsstabes, t das Drehungsmoment der Fäden. Um den Zweck zu erreichen, müssen zwei Bedingungen erfüllt werden:

1) Bei unverändertem M muß auch die Lage des Bifilarstabes unverändert bleiben, d. h. die Lage muß unabhängig seyn von den Veränderungen in m und μ .

2) Bei veränderter Lage des Stabes muß bekannt seyn nicht nur wie die Torsionskraft der Fäden sich mit dem Winkel ändert, was sehr einfach ist, sondern auch wie die richtende Kraft τ von dem Winkel abhängt, oder welche Aenderung ($\Delta\tau$) in τ einer beobachteten Aenderung ($\Delta\psi$) des Winkels ψ entspreche, um hieraus auf die Aenderung (ΔM) im Moment des Erdmagnetismus schließen zu können.

ad. 1. Da die beiden Kräfte t und τ zusammen mit T im Gleichgewicht sind, so folgt $T = t + \tau$. Es ist aber

$$(\alpha) \quad T = M \cdot m \cdot \sin \varphi$$

$$(\beta) \quad t = a \cdot \sin \omega,$$

wenn ω den Winkelunterschied in der Stellung der Fäden am obern und untern Ende, und a einen constanten leicht ermittelbaren Coëfficient bedeutet.

$$\tau = m \cdot \mu \cdot f(h, \psi, r, \rho),$$

wenn h die senkrechte Höhe des beweglichen Stabes über dem festliegenden, r und ρ ihre Längen, und ψ der von ihren Axen gebildete Winkel ist. Da aber h, r, ρ constante Größen sind, so kann auch

$$(\gamma) \quad \tau = m \cdot \mu \cdot f(\psi)$$

gesetzt werden, in welcher Gleichung die combinirte Wirkung aller magnetischen Elemente und also auch der verschiedenen Pole eingeschlossen ist. Es ist also

$$(\delta) \quad M \cdot m \sin \varphi = a \cdot \sin \omega + m \cdot \mu \cdot f(\psi).$$

Läßt man nun die Größen m und μ die zu eliminirenden Veränderungen Δm und $\Delta \mu$ erfahren, so soll alles übrige constant bleiben. Die Differentiation nach diesen Größen ergibt also eine richtige Gleichung. Führt man jedoch vorher die Voraussetzung ein, daß die Aenderungen an m und μ stets gleichzeitig und im gleichen Verhältniß geschehen, was die Gleichung $\Delta \mu = b \cdot \Delta m$ und $\mu = b \cdot m$ in sich schließt, wo b eine Constante ist, so wird aus der vorigen Gleichung

$$(\epsilon) \quad M \cdot m \cdot \sin \varphi = a \cdot \sin \omega + b \cdot m^2 \cdot f(\psi).$$

Differentiirt man diese nach m , so erhält man

$$(\zeta) \quad M \cdot \sin \varphi \cdot \Delta m = 2 \cdot b \cdot m \cdot f(\psi) \cdot \Delta m;$$

welche Gleichung mit m beiderseits multiplicirt ergibt

$$M \cdot m \cdot \sin \varphi \cdot \Delta m = 2 \cdot b \cdot m^2 \cdot f(\psi) \cdot \Delta m$$

oder nach α und γ

$$T \cdot \Delta m = 2 \tau \cdot \Delta m,$$

folglich

$$(\eta) \quad T = 2 \cdot \tau.$$

Das heist die erste Bedingung wird erfüllt werden, wenn die richtende Kraft des Erdmagnetismus gleich der doppelten des Hilfsstabes ist.

Um dieses Verhältniß der Kräfte zu erreichen, ist es nicht nothwendig, auf analytischem Wege die Form der Function ($f\psi$) zu bestimmen, nach welcher die richtende Kraft des Hilfsstabes von dem variablen ψ und den constanten h , r , ρ abhängt, was nicht nur einen sehr verwinkelten Calcül verlangt, sondern auch Resultate von Experimenten als Data voraussetzt, auf welche der Calcül gestützt wurde. Es genügt vielmehr, auf experimentellem Wege das Verhältniß der Torsionsconstanten (a) zum statischen Moment der richtenden Kraft des Erdmagnetismus ($M \cdot m$) zu ermitteln. Diefes könnte man allenfalls auf folgende Weise erreichen: man entfernt den Hilfsstab gänzlich. Dann wird der Bifilarstab eine neue Gleichgewichtslage einnehmen; und wenn dabei φ' und ω' die Winkel sind, welche die Axe des Stabes bezüglich mit Meridian und Fadenkopf bildet, so wird die Gleichung bestehen

$$M.m.\sin\varphi' = a.\sin a',$$

woraus dann folgt

$$(\vartheta) \quad \frac{a}{M.m} = \frac{\sin\varphi'}{\sin\omega'},$$

$$\text{wie auch } a = M.m \cdot \frac{\sin\varphi'}{\sin\omega'}, \text{ und } M.m = a \cdot \frac{\sin\omega'}{\sin\varphi'}.$$

Ist nun φ_0 der Winkel, welchen der Bifilarstab in gewöhnlichem normalen Zustand mit dem Meridian bilden soll ($\varphi^0 = 90^\circ$ ist jedenfalls der beste), so ist das diesem entsprechende Drehungsmoment des Erdmagnetismus $T = M.m.\sin\varphi^0$; und da dieses $= T = t + \tau$, τ aber $= \frac{1}{2}T$ seyn soll, so folgt, dafs auch $t = \frac{1}{2}T$ oder $a.\sin\omega^0 = \frac{1}{2}.M.m.\sin\varphi^0$ seyn mufs. Daraus bestimmt sich dann einfach der Winkel ω^0 durch

$$\sin\omega^0 = \frac{M.m.\sin\varphi^0}{2.a} = \frac{M.m.\sin\varphi^0.\sin\omega'}{2.M.m.\sin\varphi'} \quad (\vartheta)$$

oder

$$(\iota) \quad \sin\omega^0 = \sin\varphi^0 \cdot \frac{\sin\omega'}{2.\sin\varphi'}.$$

Man richtet sonach den Kopf der Torsionsvorrichtung so, dafs die Torsion der Fäden für sich allein den als unmagnetisch betrachteten Stab um den Winkel $\varphi^0 + \omega^0$ aus dem Meridian bringen würde. Darauf bringt man den Hilfsstab unter den beweglichen Stab und ändert entweder die Richtung oder den Abstand des Hilfsstabes so lange, bis der Bifilarstab den Winkel φ^0 mit dem Meridian bildet. Dann wird er mit dem Kopf der Fäden den berechneten Winkel ω^0 bilden und folglich $t = \frac{1}{2}T$, somit auch $\tau = \frac{1}{2}T$ seyn. Dadurch wird also, der Absicht gemäß, erreicht seyn, dafs die Intensitätsänderungen in m und μ auf den Bifilarstab keinen Einfluss haben. Der Stab wird also seine Schwankungen ebenso machen, als ob m und μ constant wären.

ad 2. Die zweite Bedingung kann ebenfalls auf rein empirischem Wege erfüllt werden, ohne dafs die verwickelte Function für die Richtkraft des Hilfsstabes analytisch dargestellt werden müfste. Nur die Voraussetzung ist zu machen, welche bei allen continuirlichen Functionen richtig

ist, daß innerhalb nahe liegender Gränzen die Aenderungen einer Variablen denen der andern proportionirt sind. Man kann etwa folgendermaßen verfahren. Ist der Appa-

rat im normalen Zustand, so dreht man den Kopf der Fäden um einen kleinen Winkel. Dadurch wird auch der Bifilarstab seine Lage ändern, und das Gleichgewicht wird erfolgen unter den Winkeln φ'' , ω'' , ψ'' .

Die Aenderungen der Winkel d. h. $\psi'' - \psi^0$, $\omega'' - \omega^0$ ergeben sich durch die Ablesung. Man hat also das Verhältniß der Aenderungen und zwar ist zunächst

$$(x) \quad \Delta \varphi = \Delta \psi,$$

was die Betrachtung der Figur lehrt, vorausgesetzt, daß für die Zwischenzeit des Experimentes der Meridian als unverändert angenommen werden kann. (Siehe Anmerkung I S. 442.) Dann ist:

$$(\lambda) \quad \frac{\Delta \omega}{\Delta \psi} = \frac{\omega'' - \omega^0}{\psi'' - \psi^0} = p, \text{ oder } \Delta \omega = p \cdot \Delta \psi.$$

Da nun bei diesen Aenderungen, welche bloß die Winkel, nicht aber die magnetischen Momente betreffen, drei andere Drehkräfte zur Wirksamkeit kommen, T'' , t'' , τ'' und $T'' = t'' + \tau''$ ist, so werden die betreffenden Aenderungen ΔT , Δt , $\Delta \tau$ in einer solchen Beziehung unter sich auftreten, daß $\Delta \tau$ als Function der beiden andern erscheint, und durch eine beliebige derselben ausgedrückt werden kann. Die numerische Bestimmung ergibt sich aus der Gleichung $T = t + \tau$ oder $\tau = T - t$ d. i.

$$\tau = M.m.\sin \varphi - a.\sin \omega;$$

woraus durch Differenziren

$$\begin{aligned} \Delta \tau &= M.m.\cos \varphi.\Delta \varphi - a.\cos \omega.\Delta \omega \\ &= M.m.\cos \varphi.\Delta \psi - a.p.\cos \omega.\Delta \psi \quad (x \text{ und } \lambda) \\ &= (M.m.\cos \varphi - a.p.\cos \omega)\Delta \psi. \quad (v) \end{aligned}$$

Will man $\Delta \tau$ ausdrücken durch das Drehungsmoment des Erdmagnetismus, so ist

$$\Delta \tau = (M.m.\cos\varphi - M.m.\frac{\sin\varphi'}{\sin\omega'} \cdot p.\cos\omega)\Delta\psi \quad (\vartheta)$$

$$= M.m.(\cos\varphi - \frac{\sin\varphi'}{\sin\omega'} \cdot p.\cos\omega)\Delta\psi. \quad (\xi)$$

Ausgedrückt durch die Torsionskraft der Fäden ist

$$\Delta \tau = (a.\frac{\sin\omega'}{\sin\varphi} \cdot \cos\varphi - a.p.\cos\omega)\Delta\psi \quad (\nu \text{ und } \vartheta)$$

$$= a.(\frac{\sin\omega'}{\sin\varphi} \cdot \cos\varphi - p.\cos\omega)\Delta\psi, \quad (o)$$

in welche Gleichungen für φ und ω die besonderen Werthe φ^0, ω^0 der Normalstellung zu setzen sind, oder besser die Mittel $\frac{1}{2}(\varphi^0 + \varphi'')$, $\frac{1}{2}(\omega^0 + \omega'')$.

Ist somit die Function ermittelt, nach welcher die Aenderungen in der richtenden Kraft des Hilfsstabes von den Aenderungen der Winkel abhängen, so kann auch aus der durch magnetische Variationen bewirkten Aenderung der Winkel auf die Gröfse der Kräfte geschlossen werden, welche diese Aenderung hervorbringen, was das eigentliche Ziel ist. Da hiebei nicht blofs die Winkel, sondern auch die magnetischen Momente der Erde und der Stäbe als variabel betrachtet werden müssen, so mufs die Gleichung

$$M.m.\sin\varphi = a.\sin\omega + b.m^2.f(\psi) \quad (\text{vergl. } \varepsilon)$$

nach M, m, φ, ω und ψ differentiirt werden. Somit ist

$$m.\sin\varphi.\Delta M + M.\sin\varphi.\Delta m + M.m.\cos\varphi.\Delta\varphi = a.\cos\omega.\Delta\omega + 2.b.m.f(\psi).\Delta m + b.m^2.\Delta f(\psi).$$

Die von Δm abhängigen Glieder heben sich nach der in 1) gegebenen Deduction auf (cf. ξ) und es bleibt

$$m.\sin\varphi.\Delta M = a.\cos\omega.\Delta\omega + b.m^2.\Delta f(\psi) - M.m.\cos\varphi.\Delta\varphi$$

$$= -a.\cos\omega.\Delta\varphi + \Delta\psi.\tau - M.m.\cos\varphi.\Delta\varphi$$

weil $\Delta\omega = -\Delta\varphi$ ist;

$$= -M.m.\frac{\sin\varphi'}{\sin\omega'} \cdot \cos\omega.\Delta\varphi + Mm(\cos\varphi - \frac{\sin\varphi'}{\sin\omega'} \cdot p.\cos\omega)\Delta\varphi$$

$$- Mm.\cos\varphi.\Delta\varphi \quad (\text{cf. } \vartheta \text{ und } \xi).$$

$$= -M.m.(\frac{\sin\varphi'}{\sin\omega'} \cdot \cos\omega - \cos\varphi + \frac{\sin\varphi'}{\sin\omega'} \cdot p.\cos\omega + \cos\varphi)\Delta\varphi$$

$$= -M.m.(\frac{\sin\varphi'}{\sin\omega'} \cdot \cos\omega + p.\frac{\sin\varphi'}{\sin\omega'} \cdot \cos\omega)\Delta\varphi$$

$$= -M.m.\frac{\sin\varphi'}{\sin\omega'} \cdot \cos\omega(1+p)\Delta\varphi;$$

folglich

$$\Delta M = - \frac{M \cdot (1 + p) \cdot \sin \varphi' \cdot \cos \omega}{\sin \omega' \cdot \sin \varphi} \cdot \Delta \varphi.$$

Hierin sind für ω und φ die normalen Werthe ω^0 und φ^0 zu setzen. Die Gleichung giebt dann die Variation der horizontalen Componente des Erdmagnetismus als Function der beobachteten Aenderung des Winkels φ und zwar ganz unabhängig von dem magnetischen Moment der Stäbe und folglich auch unabhängig von der Temperatur. Die praktische Anwendung ist zugleich sehr leicht, weil der Coëfficient von $\Delta \varphi$ als constant betrachtet werden kann und nur bei sehr großen Schwankungen auf die Aenderung des $\cos \omega$ Bedacht zu nehmen wäre, (was übrigens durch eine sehr kleine Tabelle in der Praxis sehr erleichtert würde) so wie auch nur nach längern Zeiträumen die bleibende Aenderung von M berücksichtigt zu werden brauchte.

Durch Anwendung der beschriebenen Compensation wird nun allerdings nur *der* Einfluß der Temperatur eliminirt, welcher sich in den Variationen des Stabmagnetismus äußert. Die Temperatur ändert aber außerdem auch, obgleich sehr wenig den Torsions-Coëfficienten a , indem durch Temperaturzunahme die Fäden länger werden und somit die Torsionskraft vermindert wird. Diese Störung läßt sich auch mit obiger rein magnetischen Methode nicht beseitigen, weil sie eine mit der Temperatur stets genau und in unveränderlichem Verhältniß zusammenhängende ist, während die rein magnetische Wirkung der Wärme nicht genau dem Gang der Temperatur folgt. Wenn diese Störung im Apparat selbst eliminirt werden soll, so ist *für sie* eine rein mechanische Compensation anzuwenden; und zwar muß diese von der ersten Compensation, deren Zweck die Elimination der magnetischen Wirkungen der Wärme ist, getrennt und unabhängig seyn. Diese zweite Compensation könnte man aber auf eine höchst einfache Weise erzielen. Die Temperatur verlängert nämlich einestheils die Fäden und verringert dadurch die Torsionskraft; allein

andererseits vermehrt sie auch den Abstand der beiden Fäden von einander, und dadurch wird die Torsionskraft vermehrt. Die erste Wirkung steht mit der Ausdehnung im einfachen Verhältniß, die zweite aber im quadratischen. Wenn man also die Bügel, an denen die Fäden unmittelbar befestigt werden, aus einem Stoff verfertigt, dessen Ausdehnungscoefficient gleich der Wurzel aus dem Ausdehnungscoefficienten der Fäden ist, so werden sich ohne weitere Vorrichtung diese beiden an jedem Bifilar-Magnetometer nothwendig auftretenden Störungen gegenseitig aufheben. Man wird mit hinlänglicher Genauigkeit den Zweck erreichen, wenn die Fäden aus Silber, die Bügel aber aus Platin verfertigt werden.

Anmerk. I. Man kann auch die Variation der Declination, welche während der Dauer des Versuches stattfindet, eliminiren, indem man nach der zweiten Ablesung den Kopf der Fäden wieder in seine frühere Lage bringt und dann eine dritte Ablesung in einem solchen Moment macht, daß die drei Ablesungen durch gleiche Zeitintervalle getrennt sind. Aus der ersten und dritten Ablesung nimmt man das Mittel und hat damit dieselben auf den Augenblick der zweiten reducirt, so daß man (wenigstens wenn die Tageszeit gut gewählt ist) die Declination als unverändert annehmen kann. Sicherer wäre wohl noch folgendes Verfahren: Man läßt gleichzeitig an einem Declinations-Magnetometer die Declinations-Variation beobachten. Ist dieselbe zwischen den beiden Ablesungen $= \Delta D$, so ändert sich an der übrigen Deduction nur dieß, daß nicht $\Delta \psi = \Delta \varphi$ gesetzt werden darf, sondern $\Delta \psi = \Delta \varphi + \Delta D$. Da aber die einzelnen Werthe $\Delta \psi$ und ΔD aus den Ablesungen bekannt sind, so ist auch $\Delta \varphi$ und somit das Verhältniß $\frac{\Delta \varphi}{\Delta \psi} = q$ bekannt. Es ist dann in der folgenden Deduction nur $q \cdot \Delta \psi$ statt $\Delta \varphi$ zu substituiren, was am Calcül nichts weiter ändert.

Anmerk. II. Die Deduction in No. 2 ist eigentlich nicht streng genau, weil die Aenderungen als *sehr klein*

vorausgesetzt werden. Würden dieselben bedeutender, so könnte man nicht mehr die Δm als Infinitesimalgrößen behandeln. Man müßte vielmehr auf die folgenden Glieder der Differentiale Rücksicht nehmen. Man würde dann erhalten

$$M \cdot \sin \varphi \cdot \Delta m = b \cdot f(\psi) \cdot 2 \cdot m \cdot \Delta m + b \cdot f(\psi) \Delta m^2.$$

Jedoch ist in der Praxis der Werth dieser Correction gänzlich vernachlässigbar. Denn nimmt man z. B. an, es sey $\Delta m = \frac{1}{100} m$, so wird aus obiger Gleichung

$$\frac{M \cdot m \cdot \sin \varphi}{100} = \frac{2 \cdot b \cdot m^2 \cdot f(\psi)}{100} + \frac{b \cdot m^2 \cdot f(\psi)}{10000}$$

oder

$$\frac{T}{100} = \frac{2 \cdot \tau}{100} + \frac{\tau}{10000} \text{ (vergl. } \alpha \text{ und } \gamma \text{ coll. } \epsilon).$$

Wird also $\tau = \frac{1}{2} T$ angenommen, so würde der in diesem Fall begangene Fehler nur $\frac{\tau}{10000}$ oder $\frac{T}{20000}$ betragen, was unmeßbar ist. In der Wirklichkeit sind aber die Aenderungen (Δm) des magnetischen Momentes der Stäbe noch geringer, wenigstens wenn sie nach den erfahrungsmäßigen Regeln magnetisirt werden, wenn sie namentlich bei der höchsten auszuhaltenden Temperatur magnetisirt und dann einem vielmaligen Wechsel der Temperatur unterworfen werden.

V. Ueber den in der Theorie der Batterieentladung angenommenen Widerstand des Schließungsbogens; von K. W. Knochenhauer.

In den die Entladung einer Batterie bestimmenden Formeln wird der Widerstand des Schließungsbogens nach den Gesetzen des galvanischen Stroms als constant angenommen. Gewinnt zwar der Widerstand für die gewöhnlich vorkommenden Fälle in den aus den Fundamentalgleichungen abgeleiteten Resultaten keine Bedeutung, so dürfte es doch