ETUDES SUR LES COURBES A' DOUBLE COURBURE
TRACÉES SUR UNE SURFACES ALGÈBRIQUE D'UN ORDRE QUELCONQUE.

PAR E. DE JONQUIÈRES.

1. Dans une communication importante, faite à l'académie le 2 Décembre 1861 (*), au sujet des courbes à double courbure qu'on peut tracer sur l'hyperboloïde à une nappe, M^r. Chasles, après avoir présenté quelques réflexions sur les causes qui ont pu retarder les progrès de la théorie des courbes à double courbure en général, s'exprimait en ces termes :

« On est donc induit à penser que la manière d'étudier les courbes à double » courbure devrait être telle, qu'elle devînt, comme cas particulier, celle en usage pour les courbes planes. Il semble qu'on pourra satisfaire à cette condition si, au lieu de considérer les courbes gauches dans l'espace indéfini, on les étudie par familles, sur telle ou telle surface déterminée : la surface plane ne sera plus qu'un cas particulier de la question, et les procédés employés sur les surfaces courbes deviendront ceux que les géomètres pratiquent sur le plan ».

2. Le présent Mémoire, inspiré par ces justes réflexions, et par la lecture des communications faites à l'Académie, dans ces derniers temps par M^r. Chasles, a pour but de répondre, dans une certaine mesure, au programme tracé par l'illustre géomètre. Je m'occuperai ici des courbes à double courbure tracées sur une surface algébrique d'ordre quelconque, et qui sont les intersections *complètes* de cette surface par d'autres surfaces algébriques. Les résultats auxquels je parviendrai ne seront donc, en général, démontrés que pour les courbes gauches qui satisferont à cette condition, courbes comprises par conséquent parmi celles dans le degré est exprimé par un nombre non premier.

Notations. — Définitions — Propriétés générales.

3. La surface algébrique donnée du degré n , et n'ayant que les singularités qui lui sont propres, sur laquelle on aura à considérer des courbes à double courbure, sera représentée par S^n ; les surfaces sécantes le seront par S^m , S^p , S^r , ... etc. Les courbes gauches résultantes seront désignées par la lettre G , affectée d'un exposant égal au degré de la courbe. Ainsi G^{mn} désigne la courbe gauche, intersection complète des surfaces S^n , S^m ; et son degré nm exprime qu'un plan quelconque la rencontre en nm points.

(*) J'ai eu connaissance de ce mémoire le 29 août 1862.

4. Trois surfaces S^n , S^m , S^p , qui n'ont pas de courbe commune, se coupent généralement en nmp points. Donc deux courbes gauches G^{nm} , G^{np} , tracées sur une même S^n , se coupent en nmp points. Si $m = p$, le nombre des points d'intersection est nm^2 . Dans ce cas, il passe, par ces nm^2 points, une infinité de courbes gauches G^{nm} , qu'on peut regarder comme étant les intersections de S^n par les surfaces d'un faisceau (S^m), dont la courbe commune G^{m2} coupe S^n aux nm^2 points dont il s'agit. Ces nm^2 points forment la *base* du faisceau (G^{nm}), ils en sont les *points fondamentaux*. Par chaque point de S^n , autre que les points de la base du faisceau, il ne passe qu'une courbe G^{nm} du faisceau. Cette importante propriété *suffit pour définir le faisceau*.

5. Quand les surfaces sécantes forment un *réseau*, il en est de même des courbes gauches qu'elles interceptent sur S^n ; il n'en passe qu'une par deux points donnés, *propriété qui suffit pour caractériser le réseau et le définir*.

6. Si la surface S^n n'était pas donnée, il faudrait, pour déterminer une courbe gauche G^{nm} ($n > m$),

$$A = \left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3) - 6}{6} - \frac{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)}{6} \right)$$

points donnés, ainsi que l'a démontré M. Jacobi, dans le tome XV du Journal de Crelle (p. 299). mais quand la surface S^n est donnée, la courbe G^{nm} . ne dépendant plus que de la surface S^m , est déterminé par un moindre nombre de points. Car, si l'on désigne le nombre précédent par A, et celui ci: $\left(\frac{(m+1)(m+2)(m+3) - 6}{6} \right)$ par B, l'inégalité $A > B$, revient, en faisant $n = m + i$, à cette autre:

$$3mi(2m + i + 4) > \text{zéro},$$

que est vraie toutes les fois qu'on n'a pas $n = m$.

Quand $n > m$, on peut prendre sur S^n tous les points nécessaires à la détermination de la courbe G^{nm} , on, en d'autres termes, de la surface S^m . Si $n = m$, tous les points nécessaires à la détermination de G^{nm} , dont le nombre en alors égal à celui que donne la formule précédente, peuvent être pris sur S^n ; mais il faut en prendre un de plus, hors de cette surface, pour déterminer l'une des S^m qui passent, en nombre infini, par la courbe. Enfin, dans le cas de $n > m$, parmi les

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - 1 = C$$

points nécessaires à la détermination d'une surface du degré n , on n'en peut prendre arbitrairement que A au plus sur S^m . Car, si l'on en prenait seulement $A+1$, la surface S^n se décomposerait en deux autres, savoir la surface S^m , qui est donnée,

et la surface S^{n-m} , du degré $(n-m)$, qui est déterminée par des

$$C - A - 1 = \frac{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)}{6} - 1$$

points restants.

7. Les lignes les plus simples qu'on ait à considérer sur une surface S^n , sont les sections ou courbes planes de cette surface. Elles correspondent aux lignes droites sur le plan, et, si l'on convient que les plans de ces sections devront (sauf d'autres déterminations spécifiées) passer toujours par un même point O , choisi d'ailleurs arbitrairement dans l'espace, on peut dire que deux points suffisent pour déterminer une courbe plane C^n , sur la surface comme sur le plan.

8. Une section plane de S^n peut toucher une courbe gauche G^m en un point, on en deux points distincts, ou en deux points consécutifs. Dans ce dernier cas, elle prend le nom de *plan osculateur* de la courbe qui devient osculateur stationnaire, s'il est osculateur en deux points; dans les deux autres, elle correspond aux tangentes simples et aux tangentes doubles des courbes planes.

Outre ces singularités qui existent, en général sur une courbe gauche quelconque, ces courbes peuvent être données de points doubles ou multiples, de tangentes rectilignes doubles ou d'inflexion, de plans osculateurs doubles.

Par exemple, si les deux surfaces S^n , S^m , se touchent en un point, ce point est un point double de leur courbe d'intersection.

Remarque. Le nombre des points doubles (ou de rebroussement, indistinctement), dont une courbe gauche G^m peut être donnée, est limité comme il l'est dans les courbes planes: Il s'agit de fixer cette limite. Supposons $n > m$, et posons

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1 = A.$$

Soit aussi désigné par x le nombre maximum des points doubles dont G^m peut être donnée, cette courbe étant d'ailleurs une courbe générale dans son degré, c'est-à-dire une courbe non décomposée.

On peut faire passer une infinité de surfaces du degré m par $A-1$ points quelconques de la courbe G^m (4). Prenons, pour ces points, les x points doubles de G^m , $(A-x-1)$ autres points simples de cette courbe, et un autre point quelconque de l'espace, pour y faire passer une surface Σ^m . Les trois surfaces S^n , S^m , Σ^m auront en commun, par équivalence $2x + A - x - 1 = x + A - 1$ points simples. Or le nombre doit être égal à nm^2 . Donc on a $x = nm^2 + 1 - A$, au plus; et telle est la limite cherchée.

Si $n = m$, la surface Σ^m ne peut être assujettie à passer que par $A-2$ points

quelconques de la courbe gauche G^{mn} , si l'on veut que cette surface ne contienne pas toute la courbe; la limite est donc alors $x = n^3 + 2 - A$, au plus.

Et comme les points doubles de G^{nm} proviennent des points de contact des surfaces génératrices S^n , S^m qu'on suppose n'avoir pas de courbes doubles, on conclut, de ce qui précède, les théorèmes suivants:

1° Une courbe gauche G^{nm} ne peut avoir plus de $(nm^2 + 1 - A)$ points doubles, si $n > m$; ni plus de $(n^3 + 2 - A)$, si $n = m$.

2° Deux surfaces S^n , S^m , ne peuvent se toucher qu'en $(nm^2 + 1 - A)$ points, au plus, si $n > m$; et, si $n = m$, elles ne peuvent se toucher qu'en $(n^3 + 2 - A)$ points au plus.

M. G. Salmon, dans son intéressant mémoire *on the classification of curves of double curvature*, §. 16, fixe aussi une limite au nombre x . Mais cette limite, déduite de considérations différentes, est moins basse que celle que je donne ici.

Dans le cas où la courbe G^{nm} se décompose en courbes de degrés moindres, le nombre de ses points doubles peut être plus grand, ainsi que cela arrive également pour les courbes planes. Je m'occuperai de ce cas particulier, ainsi que des autres propriétés de ces courbes gauches décomposées, dans un autre mémoire, à cause de l'étendue et de l'importance spéciale du sujet.

9. Les faisceaux de courbes gauches jouissent des deux propriétés fondamentales suivantes, savoir :

1° Les courbes gauches d'un faisceau correspondent anharmoniquement aux tangentes qui leur sont menées en un des points fondamentaux du faisceau.

2° Deux faisceaux (G^{nm}) , (G^{np}) , dont les courbes se correspondent anharmoniquement, engendrent, par les intersections mutuelles des courbes correspondantes, une courbe $G^{n(m+p)}$, qui passe par les bases des deux faisceaux, c'est-à-dire par $n(m^2 + p^2)$ points déterminés.

Ces deux théorèmes résultent directement des propriétés analogues des faisceaux de surfaces. On a aussi le suivant :

10. Les courbes correspondantes de trois faisceaux projectifs de courbes gauches sur S^n , se coupent en $n(mp + pr + rm)$ points.

11. On peut appeler *série* de courbes gauches, d'ordre nm et d'indice M , un groupe de courbes tracés sur S^n telles, qu'il en passe M par un point quelconque de S^n .

La considération des séries donne lieu aux théorèmes suivants :

1° Si les courbes de deux séries, d'ordres et d'indices nm , M et np , P , respectivement; se correspondent une à une, les courbes correspondantes se coupent sur une courbe gauche du degré $n(mP + pM)$ au plus.

2° Si les courbes de trois séries, d'ordres et d'indices mn , M ; np , P ; nr , R ,

respectivement, se correspondent une à une, les courbes correspondantes se coupent, trois à trois, en $n(\text{Mpr} + \text{Prm} + \text{Rmp})$ points au plus situés sur S^n .

DU CONTACT DES COURBES GAUCHES.

12. Le théorème suivant, qu'on démontre sans difficulté, est fondamental pour l'étude des propriétés des courbes gauches:

Théorème. Le lieu d'un point, dont les plans polaires, relatifs à quatre surfaces données, passent par un même point (variable avec le premier), est une surface $\sum^{(m+n+p+r-4)}$, du degré $(m + m + p + r - 4)$.

13. Si les surfaces S^p , S^r sont du même degré, on pourra énoncer le théorème ainsi:

Le lieu d'un point tel, que ses plans polaires, relatifs à deux surfaces S^m , S^n , se coupent suivant une droite située dans le même plan que la droite d'intersection des plans polaires du même point, relatifs à deux surfaces S_1^p , S_2^p , est une surface du degré $(m + n + 2p - 4)$.

14. Si l'on considère la faisceau (S^p) , que déterminent les deux surfaces S_1^p , S_2^p , on sait que les plans polaires d'un même point, relatifs à toutes les surfaces du faisceau, passent par une même droite; et il y a toujours, dans le faisceau, une certaine surface, pour laquelle le plan polaire dont il s'agit, passe par cette droite et a une direction déterminée. Donc on peut dire que:

La surface $\sum^{(m+n+2p-4)}$ est le lieu d'un point, dont les plans polaires relatifs à deux surfaces fixes S^n , S^m et à l'une des surfaces du faisceau (S^p) , passent tous les trois par une même droite.

15. Les points de rencontre de la surface $\sum$ avec la courbe gauche G^{nm} , tracée sur S^n , sont donc tels, que chacun d'eux a pour plan polaire, relatif à l'une des S^p , un plan passant par la tangente en ce point à la courbe gauche. Or ce plan est tangent à cette S^p ; donc le point dont il s'agit est un point de contact de G^{nm} avec la S^p ; Donc, dans un faisceau de surfaces du degré p , il existe, en général, $mn(m + n + 2p - 4)$ surfaces qui touchent une courbe gauche G^{nm} .

16. Et, comme ces surfaces déterminent, sur S^n , un faisceau de courbes gauches G^{np} :

Dans un faisceau de courbes gauches G^{np} , tracées sur S^n , il y a, en général, $nm(n + m + 2p - 4)$ courbes, dont chacune touche, en un point, une courbe G^{nm} , tracée sur la même surface.

17. Ce théorème donne lieu à plusieurs corollaires; nous n'en citerons que deux, savoir:

1°. Si on fait $m = 1$ dans la formule précédente, Parmi les courbes d'un fai-

sceau (G^{np}), il y en a, en général, $n(n + 2p - 3)$, dont chacune touche une section plane de la surface S^n .

Ce nombre est diminué de deux unités, si la section passe par un des points fondamentaux du faisceau.

18. 2°. Si on fait $p = 1$ dans la formule du n° (15) on voit que, *Par une droite, on peut mener $mn(m + n - 2)$ plans tangents à une courbe G^{mn}* ; ou pour conserver une analogie plus complète, dans les termes, avec ce qui se passe sur le plan.

Par un point de S^n , on peut mener $mn(m + n - 2)$ courbes planes tangentes à G^{mn} ; ces courbes devant selon la convention établie plus haut (7), passer par un même point 0.

Ce nombre est diminué de deux unités, si le point de S^n est un point de la courbe G^{mn} ; il est moindre de quatre unités, si le point 0 est, en outre, lui même un point de G^{mn} .

Si la courbe a d points doubles et r points de rebroussement, le nombre de sections tangentes est $[nm(n + m - 2) - 2d - 3r]$.

19. D'après ce qu'on a démontré ci-dessus (13), la surface $\sum^{(n+m-2)}$, dont les points de rencontre avec G^{mn} sont les points conctat des plans tangents à cette courbe, issus d'une droite aO , est le lieu d'un point, dont les plans polaires, relatifs aux deux surfaces S^n , S^m , se coupent suivant une droite qui rencontre aO , en d'autres termes, quand un point se meut sur la droite aO , ses surfaces premières polaires, relatives à S^n et S^m , se coupent sur une courbe gauche $G^{(n-1)(m-1)}$, dont le lieu est la surface $\sum^{(n+m-2)}$.

Or, il est aisé de voir que la même définition peut s'appliquer, dans la théorie des courbes planes, à la courbes planes, à la courbe *polaire première* d'un point a , relative à une courbe C^m .

On peut donc, par une extension fort légitime, appeler *courbe gauche polaire de la droite aO , sur S^n , relative à la courbe gauche G^{nm}* , la courbe $\Gamma^{n(n+m-2)}$, suivant laquelle la dite surface coupe S^n .

Cette courbe passe par les points de contact des sections planes tangentes à G^{nm} menées par aO , et par les points doubles de G^{nm} , si cette courbe en possède Bref, sans entrer dans une énumération fastidieuse, elle jouit de toutes les propriétés de son homonyme, relatives au contact des sections planes de la courbe G^{nm} .

20. Ce qui établit entre ces deux courbes une différence notable, c'est que *les polaires gauches successives* d'une même droite, au lieu d'aller en décroissant, quant à leur degré, vont au contraire en augmentant, de la manière suivante: $n(n - 2 + m)$; $n[2(n - 2) + m]$; $n[3(n - 2) + m]$, et ainsi de suite. Pour qu'elles aillent en diminuant, il faut que $n = 1$, c'est à dire qu'il s'agisse de courbes planes. Il est pourtant un cas remarquable, où leur degré reste stationnaire, c'est celui où $n = 2$; la polaire est alors, comme la courbe gauche G^{2m} , du degré $2m$. Il s'ensuit que les

points, où elle rencontre G^{2m} , forment la base d'un faisceau de courbes du même ordre (4). Donc, *quand une courbe d'ordre pair est tracée sur une surface du second degré, les points de contact des plans tangents qu'on peut lui mener, par une droite quelconque, forment la base d'un faisceau du même ordre; théorème énoncé par M. Chasles dans le mémoire précité § 23.*

Les surfaces du second ordre jouissent seules, comme on voit, de cette propriété.

21. Les courbes gauches polaires donnent lieu aux deux théorèmes suivants, qui sont susceptibles d'applications utiles, savoir:

1° Les courbes gauches polaires d'une même droite, relatives à toutes les courbes d'un faisceau (G^{nm}), forment elles-mêmes un faisceau, et correspondent anharmoniquement à ces courbes.

2° les courbes gauches polaires, relatives à une même G^{nm} , de toutes les droites contenues dans un plan donné et passant par un point de ce plan, forment un faisceau et correspondent anharmoniquement à ces droites.

On voit en effet, sans aucune difficulté, que, dans l'un et l'autre cas, il ne passe, par un point quelconque de l'espace, qu'une surface Σ^{n+m-2} , et par conséquent qu'une seule courbe gauche polaire par un point donné sur S^n , qui satisfassent à la question ce qui, d'après (4), suffit pour prouver que ces surfaces, ou les courbes qui en dérivent, forment un faisceau.

22. La perspective d'une courbe gauche G^{nm} sur un plan, est une courbe du degré nm , qui a $\frac{1}{2} nm(n-1)(m-1)$ points doubles;

En d'autres termes, le cône mené par une courbe gauche G^{nm} a, en général, $\frac{1}{2} nm(n-1)(m-1)$ arêtes doubles.

En effet, d'après la formule qui établit une relation entre le degré, la classe et le nombre D des arêtes doubles d'un cône, qui n'a pas d'arêtes de rebroussement, il vient, en ayant égard à (18),

$$D = \frac{1}{2} [mn(mn-1) - mn(m+n-2)] = \frac{1}{2} mn(m-1)(n-1).$$

23. On conclut aussi très-aisément, de ce même théorème (18), que quand trois surfaces S^p , S^q , S^r , ont une courbe gauche commune G^{nm} , elles se coupent en

$$[pqr - nm(p+q+r-2) + nm(n+m-2)]$$

points, non situés sur cette courbe commune. (voir le mémoire de M. Salmon, intitulé: *on the degree of the surface reciprocal to a given one*; tome XXIII des transactions de l'académie royale d'Irlande, pages 484, 485).

PLANS OSCULATEURS A' UNE COURBE GAUCHE G^{nm} .

24. Le nombre des plans osculateurs qu'on peut mener à G^{nm} , par un point quelconque O , est évidemment égal au nombre des plans tangents stationnaires du cône, de degré mn , qui a la courbe pour base et le point O pour sommet. Les for-

mules de M. Plücker, relatives aux courbes planes, étant directement applicables aux surfaces coniques, on aura immédiatement, pour le nombre cherché $N = 3mn(mn - 2)$ — six fois le nombre des arêtes doubles du cône; car il ne possède pas, par hypothèse, d'arêtes des rebroussement. Or le nombre des arêtes doubles est (22)

$$\frac{1}{2} nm (n - 1) (m - 1). \text{ Donc } N = 3mn(m + n - 3).$$

Autrement. Menons un plan arbitraire M, par le point O. Les droites de ce plan, qui passent par le point O, ont pour courbes polaires gauches, des courbes $G^{n(n+m-2)}$, qui forment un faisceau (21-2°). Quand une de ces courbe touche G^{nm} en un point, la section plane, déterminée par la droite correspondante du plan M et par ce point, touche G^{nm} en ce point par un double contact; donc c'est un des plans osculateurs menés par le point O. Or il y a, dans le faisceau (16), $mn(3m + 3n - 8)$ courbes qui touchent G^{nm} . Mais il y en a d'étrangères à la question, savoir les mn , relatives aux droites qui joignent le point O aux points où le plan M coupe G^{nm} . Donc il en reste $3mn(m + n - 3)$; ce qui confirme le résultat obtenu ci-dessus par une autre méthode.

25. Le nombre précédente doit être diminué de trois unités, si le point O est pris sur la courbe, et qu'on fasse abstraction des plans osculateurs au point O lui même. On voit en effet que, si c, d, o, a, b , sont cinq points consécutifs de la courbe, le point O appartient aux trois plans osculateurs infiniment voisins

$$c d o, d o a, o a b.$$

En général, le nombre des plans osculateurs est diminué de six unités pour chaque point double de G^{nm} , et de huit unités pour chacun de ses points de rebroussement; la formule relative aux tangentes d'inflexion des courbes planes leur étant applicable. Et, si le point O est placé en un point double, ou en un point de rebroussement, la diminution est de neuf ou onze unités respectivement.

DÉVELOPPABLE OSCULATRICE A' LA COURBE G^{nm} .

26. L'ordre de la développable est égal au nombre des tangentes de la courbe qui s'appuient sur une droite; donc à

$$nm(n + m - 2) - 2d - 3d' \quad (18);$$

car le nombre de ces tangentes est égal à celui des plans tangents qu'on peut mener à G^{nm} par la droite, d et d' expriment, respectivement, les nombres des points doubles et de rebroussement de la G^{nm} , quand elle en possède.

27. La classe de la surface développable, c'est-à-dire le nombre des plans tangents qu'on peut lui mener par un point, est égal au nombre des plans osculateurs de G^{nm} qui passent par ce point; donc la classe est

$$3nm(n + m - 3) - 6d - 8d'.$$

28. Les formules, obtenues ci dessus (26) et (27), permettent de déterminer immédiatement, avec l'aide des formules de M. Plücker, toutes les particularités d'une section plane Σ de la développable osculatrice, comme l'ont fait MM. Cayley, et G. Salmon dans deux excellents mémoires, insérés au tome X du *Journal de Liouville*, et dans le *Journal de Cambridge et Dublin*; livraison de février 1850.

29. 1° L'ordre de la courbe est celui de la développable, $nm(n+m-2)$.

2° La classe est le nombre des tangentes qu'on peut lui mener par un point; ces tangentes sont les traces, sur le plan coupant, des plans tangents à la développable, ou plans osculateurs à la courbe gauche, qu'on peut mener par le point; conséquemment leur nombre, ou la classe de la courbe, est $3nm(n+m-3)$; en supposant que la courbe G^{nm} n'ait pas de points multiples.

3° Les points de rebroussement de la courbe Σ sont les points de rencontre de la courbe gauche par le plan sécant; leur nombre est donc mn .

4° D'après cela, la formule de M. Plücker, qui établit une relation entre l'ordre, la classe et les nombres des points doubles et de rebroussement, donne pour le nombre des points doubles cherchés,

$$2D = mn(m+n-2)[mn(m+n-2)-1] - 3mn(m+n-3) - 3mn, \\ \text{d'où} \quad D = \frac{1}{2}mn(mn(m+n-2)^2 - 4(m+n) + 8).$$

5° Le nombre des tangentes d'inflexion de la courbe Σ est donné pour la formule connue relative à ces tangentes; donc on aura ici

$$T' = 3mn(m+n-2)[mn(m+n-2)-2] - 3mn[mn(m+n-2)^2 \\ - 4(m+n) + 8] - 8mn = mn[6(m+n) - 20].$$

C'est, en d'autres termes, le nombre de plans osculateurs stationnaires de la courbe gauche G^{nm} , c'est-à-dire qui ont un contact du 3^e ordre avec G^{nm} .

6° Quant aux droites, qui, étant chacune l'intersection de deux plans osculateurs de G^{nm} , sont situées dans un même plan, leur nombre est le même que celui des tangentes doubles de la section plane Σ . Or, en appelant T ce nombre, on a, par la 3^e formule de M. Plücker,

$$2T = 3mn(m+n-3)[3mn(m+n-3)-1] - mn(m+n-2) \\ - 3mn[6(m+n) - 20].$$

$$\text{Donc} \quad T = \frac{1}{2}mn[9mn(m+n-3)^2 - 22(m+n) + 71].$$

30. Si la courbe donnée G^{nm} possédait des points doubles et des points de rebroussement, les nombres di-dessus subiraient une modification qu'il est aisé de cal-

culer, en remarquant que, pour obtenir ces nouveaux nombres, il suffit de substituer les nombres $[nm(n+m-2) - 2d - 3d']$ et $[3nm(n+m-3) - 6d - 8d']$, respectivement, à ceux $nm[n+m-2]$ et $3nm(n+m-3)$, qui sont entrés seuls, avec le nombre nm (qui exprime le degré de la courbe) dans la composition des formules précédentes.

PROPRIÉTÉS DU CÔNE MENÉ PAR LA COURBE G^{nm} ET AYANT SON
SOMMET EN UN POINT QUELCONQUE DE L'ESPACE.

31. L'ordre du cône est le même que celui de la courbe : nm . Sa classe est le nombre des plans tangentes qu'on peut lui mener par une droite quelconque partant du sommet: ces plans sont tangentes à la courbe gauche. Donc la classe du cône est $mn(m+n-2)$. Les plans d'inflexion du cône sont les plans osculateurs de la courbe, qui passent par le sommet du cône. Leur nombre est donc

$$3mn(m+n-3).$$

Les plans tangentes doubles, qui coupent S^n suivant des sections doublement tangentes à G^{mn} , correspondantes aux tangentes doubles des courbes planes, sont au nombre de

$$\frac{1}{2}mn(mn-2)(m^2n^2-9)-mn(m-1)(n-1)[mn(mn-1)-6] \\ +\frac{1}{2}mn(m-1)(n-1)[mn(m-1)(n-1)-2]=\frac{1}{2}mn[mn(m+n-2)^2-10(m+n)+28].$$

Enfin ses arêtes doubles sont, comme on l'a vu plus haut (22), au nombre de

$$\frac{1}{2}nm(n-1)(m-1).$$

COURBE NODALE SUR LA DEVELOPPABLE OSCULATRICE
A' UNE COURBE G^{nm} . (1)

32. On appelle courbe double ou nodale la courbe lieu des points dans lesquels se rencontrent, deux à deux, les génératrices de la surface.

La courbe d'intersection de la développable par un plan, et en général, par une surface quelconque, a un point double ou noeud, en chaque point situé sur la courbe nodale.

Il s'ensuit que l'ordre de cette courbe est marqué par le nombre des points doubles d'une section plane de la surface développable. L'ordre de la courbe nodale est donc (29. 4°) $\frac{1}{2}nm[nm(n+m-2)^2 - 4(n+m) + 8]$. Cette courbe rencontre chaque génératrice de la développable en $nm(n+m-2) - 4$ points.

(1) Dans ce paragraphe et dans plusieurs autres, j'ai suivi, pour le classement des matières, l'ordre adopté par M. Chasles dans son, *Mémoire sur les courbes tracées à la surface de l'hyperboloïde, à une nappe*, et j'ai employé ses expressions et définitions, quand le sujet m'a permis de le faire. Indépendamment des motifs particuliers à la circonstance, il me semble que l'uniformité dans les termes destinés à désigner une même chose, ne peut être que profitable aux progrès de la science, et qu'en mathématiques, comme ailleurs, il faut s'abstenir d'un néologisme qui n'est pas justifié par la nouveauté du sujet.

Car un plan, mené par une tangente de G^{nm} , coupe la surface développable osculatrice suivant une courbe d'ordre $nm(n+m-2)-1$, qui a une inflexion sur la tangente, et par conséquent la rencontre en $nm(n+m-2)-4$ autres points. Ces points appartiennent à autant de génératrices de la développable, c'est-à-dire de tangentes à la courbe gauche: Ainsi $nm(n+m-2)-4$ exprime le nombre des tangentes de G^{nm} , qui rencontrent une autre tangente quelconque, ce qui, d'après la définition de la courbe nodale, justifie la proposition énoncée.

Les points de la courbe G^{nm} , en chacun desquels le plan osculateur a un contact du troisième ordre avec la courbe, points dont le nombre est $mn[6(m+n)-20]$, (29. 5°), sont situés sur la courbe nodale de la développable osculatrice.

33. Les diverses déterminations, qui ont fait le sujet des paragraphes précédents, mettent en parfaite évidence ce fait, que des courbes gauches du même degré, et qui n'ont d'ailleurs aucune singularité, autre que celles qui sont propres à ce degré, peuvent être très différentes les unes des autres, selon les degrés respectifs des surfaces dont elles sont les intersections, et qu'ainsi les courbes gauches offrent des espèces distinctes dans le même degré, lors même qu'elles sont les intersections complètes de deux surfaces, tandis que, dans les mêmes circonstances, les courbes planes ne présentent que des variétés dans un même degré.

Par exemple, une courbe gauche du 36°, degré peut être l'intersection complète de deux surfaces,

- 1° l'une du 18°, et l'autre du 2° degré;
- 2° l'une du 12°, l'autre du 3° degré;
- 3° l'une du 9°, l'autre du 4° degré;
- 4° l'une du 6°, l'autre du 6° degré.

Dans le premier cas, on peut lui mener 36. 18 plus tangents par une droite, et 3. 36. 17 plans osculateurs par un point;

Dans le second cas, ces nombres sont, respectivement, 36. 13 et 3. 36. 12.

Dans le troisième cas, ils sont 36. 11 et 3. 36. 10;

Enfin, dans le quatrième cas, 36. 10 et 3. 36. 9.

On voit donc, sans entrer dans plus de détails, quelles différences fondamentales existent entre ces quatre espèces de courbes gauches du même degré; différences qu'on remarquerait nécessairement aussi dans les courbes de ce degré, qui seraient les intersections partielles de deux surfaces, si on avait à les examiner ici (1).

PROPRIÉTÉS DES FAISCEAUX DE COURBES GAUCHES.

34. Quand deux faisceaux de courbes gauches (G^{nm}) (G^{np}), tracées sur S^n , ont

(1) Au sujet des différences que présentent les courbes d'un même degré, selon qu'elles sont les intersections complètes ou partielles de deux surfaces, voyez 1.° le mémoire déjà cité de M. G. Salmon: *On the classification of the curves of double curvature*: 2.° en ce qui touche notamment les courbes du

un point fondamental commun a , il existe trois courbes du premier faisceau, qui sont osculatrices à trois courbes du second faisceau.

Car les courbes des deux faisceaux, qui se touchent en a , se correspondent anharmoniquement, et engendrent une courbe gauche $G^{n(m+p)}$, douée d'un point triple en a . Or si une courbe G^{nm} est osculatrice d'une G^{np} , au point a , leur troisième point commun, infiniment voisin du point a , devra se trouver sur $G^{n(m+p)}$; ainsi ces deux courbes se confondront, respectivement, avec les courbes osculatrices en a d'une des branches de $G^{n(m+p)}$. Cette courbe n'a que trois branches passant en a ; donc il ne peut y avoir que trois G^{nm} et trois G^{np} , satisfaisant à la condition de lui être osculatrices en ce point. Donc etc.

35. Si dans le théorème précédent, on fait $p = 1$, on a ce théorème:

Dans un faisceau de G^{nm} , une droite étant menée par un point fondamental, il existe trois courbes, dont les plans osculateurs en ce point passent par la droite.

36. *Quand les courbes d'un faisceau de G^{nm} , sont tangentes entre elles, en un point fondamental, il existe une courbe qui, au lieu d'être tangente aux autres, a un point double en ce point.*

37. *Dans un faisceau de G^{nm} , qui ont toutes un point double en un point fondamental, le couples de tangentes à ces courbes en ce point sont en involution; et il y a deux courbes qui ont un rebroussement en ce point.*

38. La considération de sphères concentriques, ayant leur centre en un point donné, et des courbes sphériques G^{2n} , qu'elles interceptent sur S^n , conduit au théorème suivant, qui a son équivalent dans la théorie des courbes planes:

Par un point donné, on peut, en général, mener $mn(m + n - 1)$ plans normaux à une courbe gauche G^{nm} .

39. *Le lieu des points de contact des courbes de deux faisceaux (G^{nm}), (G^{np}), est une courbe $G^{n(n+2m+2p-4)}$, du degré $n(n + 2m + 2p - 4)$ qui passe par les $n(m^2 + p^2)$ points qui forment les bases des deux faisceaux.*

40. Si l'on fait $p = 1$, dans le théorème précédent, on a celui-ci: *Le lieu des points de contact des plans d'un faisceau (ou des section planes formant un faisceau sur S^n) avec les courbes d'un faisceau G^{nm} , est une courbe gauche Γ du degré $n(n + 2m - 2)$.*

Cette courbe passe par les nm^2 points qui forment la base de (G^{nm}), et par les n points d'intersection de S^n avec la droite L , axe du faisceau.

Ce théorème résulte aussi directement de (21. 1°) et (9. 2°).

41. On en conclut ensuite, en considérant les courbes Γ , Γ' , relatives à deux

quatrième ordre. Un intéressant mémoire de M. L. Cremona, inséré dans le tome IV des *Annali di Matematica pura ed applicata*, sous le titre: *Intorno alla curva gobba del quarto ordine*; et 3.° un mémoire de M. Chasles sur le même sujet, inséré, à la date du 4 novembre 1861, dans le tome LIII des *Comptes-Rendus*.

droites L, L' menées arbitrairement par un même point o , que: le nombre des points doubles d'un faisceau de courbes gauches (G^{nm}) , est en général,

$$\Delta = n[(n + 2m - 3)^2 - (m - 1)(m + 2n - 3)].$$

Car les deux courbes Γ, Γ' se coupent en $n(n + 2m - 2)^2$ points qui satisfont à la question, à l'exception: 1° des mn^2 points de la base du faisceau (G^{nm}) ; 2°, des $n(n + 2m - 3)$ points de contact du faisceau avec le plan LoL' ; 3° des $n(n - 1)(2m - 1)$ points de rencontre des $n(n - 1)$ tangentes, menées dans ce plan à S^n , avec la courbe C^{2m-1} , qui est, dans ce plan, le lieu des points de contact des tangentes, menées par le point o aux courbes planes C^m , suivant lesquelles le plan LoL' coupe le faisceau des surfaces S^m , d'où proviennent les courbes gauches G^{nm} .

Autrement. Dans l'état de généralité où se trouvent, par hypothèse, la surface S^n , et les surfaces S^m , les seuls points doubles dont peuvent être données les courbes gauches G^{nm} , ne peuvent provenir que de celles des surfaces S^m , qui touchent S^n (8). Or, il y a $[n(n + 2m - 3)^2 - (m - 1)(m + 2n - 3)]$, surfaces S^m , qui sont dans ce cas; tel est donc aussi le nombre des points doubles du faisceau. La première démonstration est néanmoins plus satisfaisante.

42. Si $m = n$, la formule se simplifie beaucoup; elle se réduit à

$$\Delta = 6n(n - 1)^2.$$

43. Le nombre des points où les courbes des deux faisceaux ont entre elles un contact du second ordre est

$$N = n[n^2 + 3(m^2 + p^2) + 6n(m + p) + 12mp - 12n - 24(m + p) + 26].$$

44. *Corollaire.* Si l'on suppose $p = 1$, dans la formule précédente, elle devient $H = n(n^2 + 3m^2 + 6mn - 12m - 6n + 5)$, et elle exprime que:

Étant donné un faisceau de courbes gauches (G^{nm}) , sur une S^n , et une droite, il passe, en général, par cette droite, H plans, dont chacun est osculateur à l'une des courbes du faisceau.

Ce théorème, qui résulte de (43), peut aussi se démontrer en remarquant que, si l'on mène, par la droite, des plans tangents à la courbe $\Gamma^{n(n+2m-2)}$ du n° (40), ces plans, au nombre de $n(n + 2m - 2)(2n + 2m - 4)$, satisferont à la question sauf toutefois ceux qui passent. 1° par les n points fondamentaux du faisceau des sections planes, comptés deux fois; 2° par les nm^2 points qui forment la base du faisceau (G^{nm}) ; 3° enfin les $n(n - 1)^2$ plans tangents menés à S^n par la droite; et il vient: $n(n + 2m - 2)(2n + 2m - 4) - 2n - nm^2 - n(n - 1)^2 = H$, comme ci-dessus.

45. Quand on a trois faisceaux de courbes gauches, sur une même S^n , savoir (G^{nm}) , (G^{np}) , (G^{nr}) , le nombre des points tels, que les trois courbes qui y passent, appartenant à trois faisceaux, sont tangentes entre elles, est:

$$T = n[4(mp + pr + rm) + 2(n - 4)(m + p + r) - 4n + 10].$$

c'est une conséquence de (39) et de (41).

PROPRIÉTÉS RELATIVES A' UN RÉSEAU DE COURBES GAUCHES.

46. Les réseaux de courbes gauches jouissent des propriétés générales des réseaux de courbes planes ou de surfaces, et notamment des suivantes, qui nous seront utiles, et dont la première de leur définition même (5).

1°. Parmi les courbes gauches d'un réseau, celles qui passent par un même point forment un faisceau.

2°. Deux faisceaux, appartenant à une même réseau, ont une courbe commune.

47. Cela posé, les courbes gauches polaires $\Gamma^{n(n+m-2)}$ de toutes les droites qu'on peut mener par un point quelconque o , forment un réseau sur la surface S^n , quand elles sont relatives à une même courbe G^{nm} de cette surface.

Conformément à la définition du réseau (5), il suffit de prouver qu'il ne passe qu'une seule de ces courbes par deux points a , b , pris arbitrairement sur S^n , ou, ce qui revient au même, qu'il ne passe, par ces deux points, qu'une seule surface Σ^{n+m-2} génératrice de la courbe. Or, d'après la définition de ces surfaces, quand une surface Σ^{n+m-2} passe par les points a et b , la droite d'intersection L des plans polaires du point a , relatifs à S^m et S^n , s'appuie sur une droite passant en O ; et pareillement, la droite d'intersection L' des plans polaires du point b , relatifs aux deux surfaces S^m , S^n , s'appuie sur une droite passant en O . Ainsi la droite, dont la surface Σ est la courbe gauche polaire, relative à G^{nm} , passe par le point O et s'appuie sur deux droites données L , L' ; donc elle est unique, et par conséquent la surface Σ et la courbe gauche qui en dérive, sont uniques aussi; ce qui démontre la proposition.

48. Soit i un point de contact de deux surfaces du réseau. Il y en a une infinité d'autres qui se touchent en i (46. 1°), et parmi elles il y en a une qui possède un point double en i (36). Donc le lieu des points de contact des courbes gauches polaires, relatives aux droites qui passent en O , est aussi le lieu de leurs points doubles.

Par des motifs identiques à ceux qui se présentent dans la théorie des courbes planes, ce lieu n'est autre chose que celui des points de contact de deux faisceaux quelconques du réseau; donc c'est une courbe gauche du degré

$$n[n + 4(n + m - 2) - 4] = n(5n + 4m - 12).$$

Mais les deux faisceaux ont une courbe commune (46. 2°), qui est étrangère à la question. Le lieu est donc une courbe $\Phi^{n(4n+3m-10)}$ du degré $n(4n + 3m - 10)$.

49. La courbe Φ passe par les points doubles de la proposée G^{nm} , quand celle-ci en possède. Car la courbe gauche polaire de toute droite menée par un point double

de G^{nm} , a elle-même un point double en ce point (19). On peut donc, par un double motif, donner à la courbe Φ le nom de *courbe nodale* relative à la courbe G^{nm} , ainsi qu'on l'a fait, dans la théorie des courbes planes, pour une courbe qui jouit de propriétés analogues.

50. *La courbe nodale Φ passe par tous les points de G^{nm} , tels que les plans osculateurs à la courbe en ces points passent en O.*

Soit i un point qui jouit de cette propriété ; je dis que la courbe Φ y passe. En effet, quand une section plane $O a b i$ de S^n , touche la courbe G^{nm} en i , par un simple contact, toutes les droites menées par le point O dans ce plan, telles que $Oa, Ob, Oc, \dots$ etc. ont, pour courbes gauches polaires, des courbes qui passent simplement par le point i . Mais quand la section $O a b i$ est osculatrice de G^{nm} au point i , ces courbes ont toutes un contact simple avec G^{nm} au point i , et par conséquent elles se touchent en ce point ; Donc ce point se trouve sur la courbe Φ . Les points de contact des plans osculateurs issus du point O , se trouvent donc parmi les

$$mn(4n - 3m - 10),$$

points de rencontre des courbes Φ et G^{nm} . Mais tous ne satisfont pas à la question. Il faut en déduire les $mn(n - 1)$ points de rencontre de cette courbe et de la courbe du contour apparent de la surface S^n , vue du point O . Car chacun de ces points α jouit aussi de la propriété, que la section plane de S^n , contenue dans le plan tangent $O \alpha t$, section qui a un point double au point α , a , en ce point, trois points consécutifs communes avec la courbe G^{nm} ; et pourtant le plan osculateur en ce point ne passe pas³, en général, par le point o , qui est pris arbitrairement. Donc enfin, il résulte de cette analyse, que le nombre des plans osculateurs de G^{nm} , qui passent en O est:

$$mn(4n + 3m - 10) - mn(m - 1) = 3mn(m + n - 3), \quad (*)$$

ainsi qu'on l'a démontré de deux autres manières (24).

51. Le lecteur remarquera que toutes les formules précédentes s'appliquent aux courbes planes, en y faisant $n = 1$; et que les procédés de démonstration et d'investigation conviennent également à ces courbes.

Il me semble donc que le voeu émis par M. Chasles, dans la note citée au début du présent mémoire, se trouve a peu près rempli, du moins dans les limites où j'ai tout d'abord éviscéré la question.

Golfe du Mexique, 21. Octobre 1862.

(*) On peut encore démontrer ce théorème d'une quatrième manière. En effet, la perspective de la courbe G^{nm} sur un plan, est une C^{nm} plane, qui a $\frac{1}{2}mn(m - 1)(n - 1)$ points doubles (22) donc qui a $3mn(mn - 2) - mn \frac{(m - 1)(n - 1)}{2} = 3mn(m + n - 3)$ tangentes d'inflexion. Or, chacune de ces tangentes correspond à un plan osculateur de la courbe gauche, mené par le centre de la perspective. Cette propriété de la courbe gauche est une de celles en très petit nombre, qu'on pourrait démontrer par cette voie.