Ueber die Vollwerthigkeit und die Stetigkeit analytischer Ausdrücke.

Von

E. B. CHRISTOFFEL †.*)

1.

Sei f ein analytischer Ausdruck mit n Variabeln

$$((x)) \quad x_1 x_2 \cdots x_n.$$

Wir setzen ein für alle mal fest,

A. Dass $x_1 x_2 \cdots x_n$ nur reelle Zahlen im gewöhnlichen Sinne (ganze, positive oder negative, rationale, irrationale) bedeuten sollen, mit Ausschluss complexer Werthe und namentlich anderer Begriffe welche, der Zählkunst fremd, in übertragenem Sinne Zahlen genannt werden, um damit auszudrücken, dass sie ihre massgebenden Eigenschaften mit den Zahlen gemein haben.

B. Ebenso lassen wir das Functionszeichen

$$f \text{ oder } f(x_1 x_2 \cdots x_n) \text{ oder } f((x))$$

nur soweit zu, als es ebenfalls eine Werthbestimmung leistet.

Diese beiden Einschränkungen sind nicht ganz unabhängig von einander. Um zu ermitteln, wie weit sie mit einander bestehen können, muss für jeden analytischen Ausdruck f die Frage beantwortet werden:

C. Unter welchen Bedingungen der Ausdruck f eine in diesem Sinne zulässige Bedeutung hat, d. h. unter welchen Bedingungen für ein ohne Unbestimmtheit zu gebendes Argumentensystem

$$((x))^0 \text{ oder } x_1^0 x_2^0 \cdots x_n^0$$

auch der Ausdruck f einen von jeder Unbestimmtheit freien Zahlenwerth ergiebt.

*) Die vorliegende Arbeit hat E. B. Christoffel im Januar der Redaktion der Annalen zur Veröffentlichung übergeben. Die schon damals für seine Gesundheit gehegten ersten Besorgnisse haben sich leider nur zu bald erfüllt. E. B. Christoffel ist am 16. März seinem Leiden erlegen. Eine druckfertige Abhandlung, die sich in seinem Nachlasse vorfand wird demnächst in diesen Annalen erscheinen. Dem Wirken Christoffels wird in unseren Blättern ein Nekrolog gewidmet werden.

Die Redaktion der Annalen

2.

Zur Beantwortung dieser Frage muss die Rechnung, welche den Werth von f liefern soll, falls er existirt, auf ihren Erfolg geprüft werden.

Diese Rechnung ist als eine *rein numerische* zu denken; ihr Gang ist bestimmt durch den Ausdruck von f mit sinngemässer Berücksichtigung solcher Umstände, welche erst bei der Umsetzung der in f vorgelegten *Buchstabenrechnung* in die hier zu prüfende *numerische Rechnung* hervortreten.

Das betrifft den arithmetischen Charakter der Argumente (x^0) , welcher auf die Einrichtung der numerischen Rechnung den grössten Einfluss hat, während die Buchstabenrechnung auf ihn keine Rücksicht nimmt, und mit allen Zahlen wie mit vollendeten operirt. Es scheiden sich dabei zwei Fälle von einander.

Den ersten Fall bilden solche Argumente, mit deren exacten Werthen die im Ausdruck f geforderten Operationen ohne Weiteres ausgeführt werden können; ich werde sie *numerisch verwendbare* nennen, und vorübergehend durch (x') bezeichnen.

Den zweiten Fall bilden diejenigen Argumente, welche in die *numerische Rechnung* nur durch numerisch verwendbare Annäherungswerthe von stufenweise und unbegrenzt steigender Genauigkeit eingeführt werden können, sie mögen Argumente zweiter Art heissen und vorübergehend durch (x'') bezeichnet werden.

Aus jedem dieser beiden Hauptfälle entspringen für die Auswerthung von f zwei andere, je nachdem f ein sogenannter endlicher oder ein unendlicher Ausdruck ist, was im Ganzen vier Classen von Algorithmen ergibt.

Dass die Einführung der Argumentwerthe (x'') , so wie der zweite Hauptfall sie verlangt, im Buchstabenausdrucke f nicht vorgesehen ist, kann kein Grund sein, die Prüfung der beiden, diesem Hauptfalle entsprechenden numerischen Algorithmen in irgend einer Form abzulehnen.

3.

Wir gehen weiter. Abgesehen von den beiden Fällen, die beim Ausdrucke f zu unterscheiden sind, können wir die beiden Hauptfälle auch so ausdrücken, dass im ersten die Argumente (x') direct einzusetzen, im zweiten die Argumente (x'') durch Annäherungen einzuführen sind. Man erkennt jetzt, dass hier eine unvollständige Abzählung vorliegt; denn während das sogenannte Einsetzen der Argumente sich auf die Classe (x') beschränkt, ist das Annäherungsverfahren nicht bloss bei der Classe (x'') , sondern bei beiden Classen anwendbar. Soll die zur Beantwortung von C. geforderte Prüfung alle Algorithmen umfassen, welche zur Auswerthung von f dienen können, so muss ein dritter Hauptfall hinzugenommen werden,

nämlich die Anwendung des Annäherungsverfahrens auch bei den Argumenten erster Classe (x').

Beide Fälle vereinigen sich zu einem einzigen in der Weise, dass der zweite Hauptfall nicht auf die Argumente (x'') beschränkt bleibt, sondern auf alle Argumente (x) ohne Unterschied ausgedehnt wird.

So erkennen wir, dass zur vollständigen Beantwortung der Frage C.

- 1) Der Erfolg des Annäherungsverfahrens für alle Argumente (x) ohne Ausnahme zu prüfen ist, aber
- 2) für die Classe (x') der numerisch verwendbaren Argumente noch ein zweites Auswerthungsverfahren besteht und auf seinen Erfolg zu prüfen ist, nämlich das sogenannte Einsetzen der Argumente.

4.

Die Algorithmen, welche für die numerische Auswerthung von f zur Verfügung stehen, und aus deren Prüfung die Beantwortung der Frage C. hervorgehen muss, zerfallen demnach in folgende vier Classen:

1. Das vorgelegte Argumentensystem (x^0) ist ein numerisch verwendbares, und direct einzuführen; f ist
 - a) ein endlicher,
 - b) ein unendlicher Ausdruck.
2. Das Argumentensystem (x^0) ist von beliebiger Art, und soll durch numerisch verwendbare Annäherungen von stufenweise unbegrenzt steigender Genauigkeit eingeführt werden; f ist
 - a) ein endlicher,
 - b) ein unendlicher Ausdruck.

5.

Ich werde nun vor allen Dingen versuchen, diese vier Algorithmen und namentlich die Art, wie sie fortschreiten, durch Rechnungsschemata vorstellig zu machen. Dazu gehören folgende Bezeichnungen.

1) *Endliche und unendliche Ausdrücke.* Der Ausdruck f heisst ein endlicher oder unendlicher, je nachdem die Anzahl der von ihm geforderten Operationen mit den Argumenten (x) eine endliche ist oder nie abbricht. Was unter einer solchen Operation zu verstehen ist, wird durch den Ausdruck f an die Hand gegeben, kann aber unter Umständen auch vom Ermessen des Rechners abhängen. In diese Frage mischt sich die zweite nach der Reihenfolge der Operationen; auch sie kann vorgeschrieben oder der Wahl des Rechners überlassen sein. Irgend eine Entscheidung über diese Doppelfrage muss vor Beginn der Rechnung getroffen sein.

Dies so verstanden bezeichnen wir allgemein durch

$$f_m(x)$$

einen endlichen Ausdruck mit den Argumenten $((x))$, welcher die Ausführung der ersten m Operationen vorschreibt. Das giebt, je nachdem die Rechnung mit der 1^{ten}, 2^{ten} ... m^{ten} ... Operation abgebrochen wird, die Folge endlicher Ausdrücke

$$((f)) \quad f_1 f_2 \cdots f_m \cdots$$

und f ist ein endlicher oder ein unendlicher Ausdruck, jenachdem diese Folge abbricht oder sich ohne Ende fortsetzt.

2) *Bezeichnungen für stufenweise Annäherungen von unbegrenzt zunehmender Genauigkeit.* Die unbegrenzte Annäherung an eine reelle Zahl x kann erreicht werden durch wachsende Zahlen, oder durch abnehmende, oder endlich durch Abwechslung zwischen Zahlen der einen oder der andern Art.

So kann man z. B. für $x = 2$ als wachsende Annäherungen benutzen 1,9; 1,99; 1,999; ... und als abnehmende 2,1; 2,01; 2,001; ...

Für das Argument x_μ^0 sei

$$x_\mu^{(1)} x_\mu^{(2)} \cdots x_\mu^{(p)} x_\mu^{(p+1)} \cdots$$

irgend eine derartige Folge von immer genauern, aber zugleich numerisch verwendbaren Annäherungswerthen, und diese Bezeichnung gelte für $\mu = 1, 2, \dots n$. Dann ist

$$((X)) = x_1^{(\lambda)}, x_2^{(\mu)}, x_3^{(\nu)}, \dots x_n^{(\rho)}$$

der allgemeine Ausdruck für ein numerisch verwendbares Annäherungssystem an $((x^0))$, und seine Genauigkeit steigt unbegrenzt, wenn man jeden der Indices $\lambda, \mu, \nu, \dots \rho$ für sich nach irgend einem Gesetze unbegrenzt wachsen lässt.

Eine unendliche Folge numerisch verwendbarer und sich immer genauer an $((x^0))$ anschliessender Argumentensysteme werde durch

$$||X|| \quad ((X')) ((X'')) \cdots ((X)) ((X_1)) ((X_2)) \cdots$$

bezeichnet, was für die erste Uebersicht ausreicht. Dass es solcher Folgen so viele giebt als man will, kommt erst später in Betracht.

6.

Bei diesen Bezeichnungen ergiebt sich folgende Uebersicht über den Verlauf der vier Grundalgorithmen.

I. Das Argumentensystem $((x^0))$ ist ein numerisch verwendbares, und in den Ausdruck f direct einzuführen.

a. Ist f ein endlicher Ausdruck, so ist

$$f((x^0))$$

auszurechnen.

- b. Ist f ein unendlicher Ausdruck, so sind Anfang und Fortsetzung der Rechnung durch die Folge

$$f_1(x^0), f_2(x^0), \dots f_m(x^0) \dots$$

ausgedrückt, aber diese bricht nicht ab.

- II. Das Argumentensystem (x^0) ist ein beliebiges, und soll durch die unendliche Folge von Annäherungswerthen

$$\|X\| \quad (X') (X'') \dots (X) (X_1) (X_2) \dots$$

eingeführt werden.

- a. Ist f ein endlicher Ausdruck, so ist die Rechnung nach folgendem Schema fortzusetzen

$$f(X'), f(X''), \dots f(X), f(X_1), f(X_2), \dots$$

was nicht abbricht.

- b. Ist f ein unendlicher Ausdruck, so ist die Fortsetzung der Rechnung eine zweifach unendliche:

$$\begin{array}{ccccccc} f_1(X') & f_2(X') & \dots & f_m(X') & \dots & & \\ f_1(X'') & f_2(X'') & \dots & f_m(X'') & \dots & & \\ \hline f_1(X) & f_2(X) & \dots & f_m(X) & \dots & & \\ f_1(X_1) & f_2(X_1) & \dots & f_m(X_1) & \dots & & \end{array}$$

In diesem letzten Falle bildet jede Zeile einen besondern Fall von I. b; jede Spalte einen besondern Fall von II. a, so dass diese beiden unendlichen Rechnungen sich zu einer neuen, von jenen durchaus verschiedenen verbinden.

7.

Für die Beantwortung der Frage C. scheidet der Fall I. a. aus; die Möglichkeit, in diesem Falle den Ausdruck $f(x^0)$ so, wie er sich darbietet, numerisch exact auszurechnen, ist Postulat unserer Untersuchung, und dasselbe überträgt sich auf jedes einzelne Glied der unendlichen Folgen von Ausdrücken, auf welche die Untersuchung in den drei folgenden Fällen zu richten ist.

8.

Diese drei Fälle aber fordern unendliche Rechnungen, jeder eine andere. Das sind also Rechnungen die, so wie sie verlangt sind, wohl angefangen, aber nie zu Ende gebracht werden können, und deren Erfolg von ihrer *Convergenz* abhängt.

Die zu I. b. gehörige Convergenzfrage ist die bekannte und, meines Wissens, bisher allein zugelassene: sie betrifft die *Convergenz eines unendlichen*

lichen Ausdruckes f bei festen Werthen seiner Argumente (x). Als geeignetes Beispiel verweise ich auf Dirichlet's Theorie der Fourier'schen Entwicklungen.

Der Nachweis der Convergenz von f in diesem Sinne reicht nicht aus zur Entscheidung derjenigen Fragen, welche an Stelle fester Argumente (x) die unbegrenzte Annäherung an dieselben voraussetzen.

Die beiden hierauf bezüglichen Convergenzfragen zu II. a. und II. b. sind von tieferer Anlage; ihre Untersuchung erweist sich als der gerade Weg zur Einsicht in eine massgebende allgemeine Eigenschaft eines analytischen Ausdruckes, und zu Kriterien für den Ort und die Beschaffenheit seiner Singularitäten.

Dass die Convergenz eines unendlichen Ausdruckes f bei festen Argumenten (x) nicht ausreicht um zu beweisen, dass diesem Ausdruck für jedes Argumentensystem im Convergenzgebiete ein völlig bestimmter Werth zukommt, ist erst in der neuern Zeit erkannt worden. Dieser wichtige Fortschritt in den Grundlagen der Analysis hat sich an die Erscheinungen geknüpft, welche eine Fourier'sche Reihe $f(x)$ an einer Sprungstelle x^0 der in diese Reihe entwickelten Function $\varphi(x)$ darbietet, wenn man versucht, die von Dirichlet für das Argument x^0 selbst geleistete Summation der Reihe $f(x)$ (obiger Fall I. b) durch einseitige unbegrenzte Annäherung an x^0 zu bewirken. Man hat dann einen besondern Fall von II. b., und zwar einen solchen, wo dieser Algorithmus divergirt, während der Algorithmus I. b. sich (unter den zu ihm gehörigen Voraussetzungen) als convergent erweist.

Die scharfsinnigen Mathematiker, deren Aufmerksamkeit wir diese folgenreichen Aufklärungen verdanken, sind von diesen aus zu andern Fragen übergegangen, welche hier nicht zu erörtern sind.

9.

Eine unendliche Rechnung ist convergent, wenn sie zu einem geeigneten, aber ausführbaren Anfange A durch weitere Fortsetzung nur noch Schwankungen S von beliebig, aber ohne Unbestimmtheit vorschreibender Kleinheit: Mod. $S < \varepsilon$, liefert.

Ist eine unendliche Rechnung convergent, so ist demnach ihr Ergebniss ein völlig bestimmtes, dem man durch eine ausführbare Rechnung beliebig nahe kommen kann.

Unendliche Rechnungen, welche nicht convergiren, ohne Unterschied in eine einzige Classe (der divergenten Rechnungen) zu zählen, kann misslich werden. (Man vergl. die interessante Abhandlung von P. Dubois-Reymond über die trigonometrischen Reihen in den Abhandlungen der Münchener Ak. II. Cl., XII. Bd., I. Abth.). Im Uebrigen kann man von

einer solchen Rechnung aussagen dass, wie weit sie auch fortgesetzt werden mag, immer noch Schwankungen übrig bleiben, welche verhindern, dass die Rechnung „zu stehenden Resultaten“ führt. Dass Ergebniss der ins Unbestimmte fortgesetzten Rechnung ist also selber unbestimmt, wozu auch das Unendlichwerden gehört.

10.

Der Algorithmus I. b. setzt voraus, dass $f(x)$ ein unendlicher Ausdruck ist, welcher für ein System $x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0$ numerisch verwendbarer Argumente ausgewerthet werden soll, und zwar soll dies durch directes Einsetzen der Argumente geschehen.

Diese Rechnung kommt darauf hinaus, dass die endlichen Ausdrücke (I. b.)

$$f_1(x^0), f_2(x^0), \dots f_m(x^0), \dots$$

einer nach dem andern ausgerechnet werden, was man anfangen, aber nicht zu Ende führen kann.

Als ausführbar hat $f_m(x^0)$ zu gelten, so lange m ohne Unbestimmtheit gegeben ist. Zu diesem ausführbaren Anfange der Rechnung liefert die weitere Fortsetzung Schwankungen, deren allgemeiner Ausdruck

$$S = f_p(x^0) - f_m(x^0) \quad (\text{für } p > m)$$

ist.

Ich will nun ein für allemal festsetzen, dass im Folgenden unter

$$\varepsilon, \varepsilon', \dots$$

nur Zahlen verstanden werden sollen, welche unter allen Umständen von Null verschieden, positiv und ohne Unbestimmtheit zu geben sind.

Die Convergenz von $f(x^0)$ fordert, dass, wie klein auch ε sein mag, für ein geeignetes m und jedes $p > m$ der Mod. $S < \varepsilon$ wird, und dann kann man ε gewissermassen als ein Mass für die Genauigkeit von $f_m(x^0)$ benutzen.

Soll die Rechnung I. b. convergiren, so ist dafür erforderlich und hinreichend, dass sich für jedes noch so kleine ε aus den Ungleichheiten

$$(\varepsilon_1) \quad \text{Mod. } |f_p(x^0) - f_m(x^0)| < \varepsilon, \quad m < p$$

für m wenigstens ein von jeder Unbestimmtheit freier Werth ergibt, und dann ist

$$f_m(x^0)$$

ein ausführbarer numerischer Ausdruck, welcher den verlangten Werth von f bis auf eine Correction vom Genauigkeitsmasse ε ergibt.

Unter diesen Bedingungen hat also der, mit den Argumenten (x^0) formirte Ausdruck f einen völlig bestimmten Werth.

Ist C das Gesamtgebiet, in welchem diese Bedingungen, wenn auch nicht überall mit demselben Werthe von m , erfüllt sind, so heisst C das *Convergenzgebiet* von f . Innerhalb dieses Gebietes C ist die Convergenz von f durch die Ungleichheiten (ϵ) nur dargethan für die numerisch verwendbaren Argumente (x^0) innerhalb C .

11.

Dies vorausgeschickt, stellen wir aus Nr. 6 nochmals die beiden Hauptfälle einander gegenüber, um unsere Aufgabe für den noch rückständigen Hauptfall vollständig und genau aufstellen zu können.

Das erste Hauptverfahren kommt bei allen Argumenten (x^0) ohne Ausnahme zur Anwendung: es besteht darin, dass die Argumente (x^0) zur Auswerthung von f nicht selber in diesen Ausdruck eingeführt werden, sondern statt ihrer eine unendliche Folge numerisch verwendbarer Annäherungswerthe von unbegrenzt steigender Genauigkeit benutzt werden soll.

Solcher Folgen giebt es unendlich viele. Wir stellen die

Aufgabe I, die Bedingungen zu ermitteln, damit der so begründete Algorithmus für jede Folge von Annäherungswerthen convergirt, und jede Folge zum nämlichen Grenzwert für f führt. Diesen werden wir durch G bezeichnen.

Das zweite Hauptverfahren findet nur statt, wenn die Argumente (x^0) numerisch verwendbar sind, und besteht darin, dass diese Argumente zur Auswerthung von f selber in diesen Ausdruck eingesetzt werden. Was hierüber im Allgemeinen zu sagen ist, ist im Vorangehenden erledigt.

Auf die numerisch verwendbaren Argumente sind also beide Hauptverfahren zur Auswerthung von f anwendbar, es folgt aber keineswegs, dass sie auch beide denselben Werth für f ergeben.

Mit Rücksicht hierauf werden wir unbedingt daran festhalten:

Zusatz I. 1) dem Ausdrücke f für bestimmte Argumente (x^0) nur dann einen Werth zuzuschreiben, wenn das erste Hauptverfahren einen solchen ergiebt, und

2) diesen als den Werth von f für jene Argumente zu erklären, und dies namentlich auch in solchen Fällen, wo auch das zweite Hauptverfahren statt hat, aber für f einen andern Werth ergiebt wie das erste.

Wie das zusammenhängt (hebbare Unstetigkeiten), und dass die vorstehende Festsetzung dem, was in der Analysis üblich ist, genau entspricht, wird sich aus den Bedingungen ergeben, unter denen das erste Hauptverfahren den in vorstehender Aufgabe I. geforderten Erfolg hat.

12.

Auch beim ersten Hauptverfahren scheiden sich die beiden Fälle, je nachdem

- a. f ein endlicher oder
- b. f ein unendlicher Ausdruck ist.

Wir erledigen zunächst, was beiden Fällen gemeinsam ist, und knüpfen an die Bezeichnungen und Voraussetzungen der Nr. 6 an.

In der Argumentenfolge $\|X\|$ wird (X) so gewählt, dass $f((X))$ im Falle a., $f_m((X))$ im Falle b. einen ausführbaren Anfang der Rechnung vorstellt. Zu letzterem gehört, dass m einen endlichen, von jeder Unbestimmtheit freien Werth hat; auf (X) kommen wir später zurück.

Schreitet die Rechnung nach dieser linearen Argumentenfolge $\|X\|$ fort, so erhalten wir als Ausdruck für sämtliche Schwankungen, welche zu diesem Anfangsergebniss kommen können,

$$\text{im Falle a: } S = f((X_\mu)) - f(X) \quad \text{für } \mu \geq 1,$$

$$\text{„ „ b: } S = f_p((X_\mu)) - f_m((X)) \quad \text{für } \mu \geq 0, p \geq m.$$

Dabei darf nicht aus dem Auge gelassen werden, dass die Werthe von f, f_p, f_m durch das zweite Hauptverfahren zu ermitteln sind, so wie dass zwar bei wachsendem μ sich $\lim (X_\mu) = (x^0)$ ergibt, aber das Argument (x^0) selbst in diesen Ungleichheiten nicht vorkommt.

Wird die Untersuchung auf diese specielle Folge $\|X\|$ von Annäherungswerthen beschränkt, so müssen für ein beliebig kleines ε sämtliche Mod. $S < \varepsilon$ werden, und zwar durch geeignete Wahl von (X) allein im Falle a., von (X) und m im Falle b.

Aber unsere Aufgabe I fordert dies für jede Folge $\|X\|$ von Annäherungswerthen. Um dies zum Ausdruck zu bringen, verfahren wir wie folgt.

Für jede Variable x_μ ($\mu = 1, 2 \dots n$) wird ein, den Werth x_μ^0 enthaltendes Schwankungsgebiet ΔE_μ eingeführt und

- 1) x_μ auf die numerisch verwendbaren Werthe innerhalb ΔE_μ beschränkt.
- 2) ΔE_μ wird durch die Ungleichheit

$$x_\mu^0 - \alpha_\mu < x_\mu < x_\mu^0 + \beta_\mu$$

gegeben, wo α_μ, β_μ positiv, mindestens nicht negativ sind.

- 3) Die Grösse des Spielraums für x_μ oder seine Maximalschwankung ist dann

$$\alpha_\mu + \beta_\mu = \Delta x_\mu.$$

Wenn es sich um f oder um das vollständige Argumentensystem (x) handelt, werde ich diese n Schwankungsgebiete $\Delta E_1, \Delta E_2 \dots \Delta E_n$ zusammen als ein einziges auffassen, und dieses ΔE nennen.

Zu den vorstehenden Festsetzungen bezüglich ΔE gehört nun noch eine, welche davon herrührt, dass ΔE ein Argumentensystem $((X))$ enthalten muss, für welches $f((X))$ oder $f_m((x))$ einen ausführbaren Anfang der Rechnung bildet. Da aber die Ausführbarkeit dieser Rechnung mit steigender Annäherung von $((X)) = ((x^0))$ eine zunehmende Verzögerung erfährt (man denke sich x_μ^0 , x_μ durch Decimalbrüche ausgedrückt), so kommt die verlangte Eigenschaft den Argumenten $((X))$ nur zu, so lange sie von den vorgelegten $((x^0))$ nicht bloss unendlich wenig verschieden sind.

Demnach müssen die Schwankungsgebiete $\Delta E_1 \dots \Delta E_n$ so eingerichtet werden, dass sie ausser beliebig genauen Annäherungen an $x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0$ auch solche enthalten, die von ihnen nicht bloss unendlich wenig verschieden, und ausserdem numerisch verwendbar sind. Um dem zu genügen, muss noch festgesetzt werden

- 4) dass die Maximalschwankungen $\Delta x_1, \Delta x_2 \dots \Delta x_n$, wenn auch noch so klein, aber ohne jede Unbestimmtheit angenommen werden müssen.

Ist diese Bedingung für die Abgrenzungen von ΔE erfüllt, so folgt, dass es wirklich in ΔE numerisch verwendbare Argumente $((X))$ von solcher Beschaffenheit giebt, dass $f((X))$ im Falle a., $f_m((X))$ im Falle b. einen ausführbaren Anfang der Rechnung bildet.

Für unsere Aufgabe I. bedürfen wir zu diesen Anfangsergebnissen die zugehörigen Schwankungen bei beliebiger Fortsetzung der Rechnung. In obigen Ausdrücken für S sind also für $((X_\mu))$, d. i. für $((X_1)), ((X_2)) \dots$ alle in ΔE enthaltenen Argumentensysteme, mit einziger Ausnahme von $((x^0))$ selbst, einzuführen, soweit sie zu den numerisch verwendbaren gehören. Wir bezeichnen sie durch

$$((x')), ((x'')), \dots$$

und erhalten, als allgemeinen Ausdruck für alle Schwankungen, welche

- 1) im Falle a. zum Anfangsergebniss $f((X))$ kommen können,

$$S' = f((x')) - f((X)),$$

oder auch

$$S'' = f((x'')) - f((X)),$$

was

$$S = f((x')) - f((x'')) = S' - S''$$

giebt.

- 2) Im Falle b. zum Anfangsergebniss $f_m((X))$ die Schwankungen:

$$S' = f_p((x')) - f_m((X)) \quad \text{für } p \geq n,$$

oder

$$S'' = f_q((x'')) - f_m((X)) \quad \text{für } q \geq n,$$

was

$$S = f_p((x')) - f_q((x'')) = S' - S'' \quad \text{für } p \geq m, q \geq n$$

giebt.

In beiden Fällen soll, mit den nöthigen Zusätzen, $\text{Mod. } S' < \varepsilon$ oder, was dasselbe ist, $\text{Mod. } S'' < \varepsilon$ werden. Es ist also unerlässlich, dass $\text{Mod. } S < 2\varepsilon$ wird. Aber das reicht auch aus. Denn wenn $\text{Mod. } S < 2\varepsilon$ ist, so ist für den $\text{Mod. } S$ ein höchster Werth sichergestellt, da S nicht unendlich werden kann, und dieser höchste Werth des $\text{Mod. } S$ kann mit ε nach Belieben verkleinert werden. Das überträgt sich auf seine übrigen Werthe, zu denen $\text{Mod. } S'$ und $\text{Mod. } S''$ gehören. Ersetzen wir 2ε durch ε' , so folgt:

Für die Aufgabe I ist erforderlich und ausreichend, dass für alle in ΔE enthaltenen, von $((x^0))$ verschiedenen und numerisch verwendbaren Argumente $((x'))$, $((x''))$ der

$$\text{Mod. } S < \varepsilon'$$

wird, wo im Falle a.: $S = f((x')) - f((x''))$,

$$\text{„ „ b.: } S = f_p((x')) - f_q((x'')) \text{ und } p \geq m, q \geq m$$

ist; und zwar muss sich das für ein beliebig klein gegebenes ε' erreichen lassen, ohne dass eine der Schwankungen $\Delta x_1 \Delta x_2 \dots \Delta x_n$ unendlich klein wird, wozu im Falle b. noch kommt, dass die Zahl m eine endliche sein muss.

13.

Sei f ein endlicher Ausdruck. (Fall a.)

A. Für die Aufgabe I ist erforderlich und hinreichend dass, nach Ausscheidung des Punktes $((x^0))$ selbst, die Maximalschwankung von f in ΔE :

$$(a) \quad \text{Mod. } |f((x')) - f((x''))| < \varepsilon'$$

wird, und zwar für ein beliebig klein gegebenes ε' , und ohne dass eine der Maximalschwankungen $\Delta x_1 \Delta x_2 \dots \Delta x_n$ unter jede Grenze sinkt. Dabei sind $((x'))$, $((x''))$ beschränkt auf die numerisch verwendbaren Argumente innerhalb ΔE (mit Ausschluss von $((x^0))$), und bezüglich der Werthe von f ist vorausgesetzt, dass sie nach dem zweiten Hauptverfahren berechnet sind.

Sei

$$G((x^0))$$

der Werth, welchen alsdann das erste Hauptverfahren für f zum Punkte $((x^0))$ ergibt.

In dem besondern Falle, wo auch $((x^0))$ zu den numerisch verwendbaren Argumenten gehört, liefert das zweite Hauptverfahren ebenfalls einen Werth für f , welcher durch

$$f((x^0))$$

zu bezeichnen ist. In den Ungleichheiten (a) kommt er nicht vor.

Um auch diesen Fall zu erledigen, nehme ich an Stelle dieses ausgeschlossenen Punktes (x^0) einen andern, etwa (x') . Dann dürfen in (a) für (x'') alle Annäherungsfolgen genommen werden, welche in (x') auslaufen; es folgt, dass für (x') an Stelle von (x^0) ebenfalls die in der Aufgabe I geforderte Convergenz stattfindet. Sei $G(x')$ der Werth, den das erste Hauptverfahren ergiebt, mithin $G(x') = \lim f(x'')$, während $f(x')$ durch das zweite Verfahren gewonnen wird. Wir erhalten

$$(a) \quad \text{Mod. } |f(x') - G(x')| < \varepsilon',$$

also $f(x') - G(x') = 0$, weil andernfalls sein Modul nicht mit ε' nach Belieben verkleinert werden könnte. Dass dies nicht folgt, wenn man an Stelle der, die Ungleichheit (a) befriedigenden Zahl $f(x')$ eine andere nimmt, springt in die Augen. Auf (x^0) übertragen, heisst dies:

B. In dem besondern Falle, wo auch (x^0) zu den numerisch verwendbaren Argumenten gehört, liefern beide Hauptverfahren zum Punkte (x^0) stets und nur dann denselben Werth

$$G(x^0) = f(x^0),$$

wenn die Ungleichheit (a) auch noch nach Hinzuziehung des Punktes (x^0) erfüllt bleibt.

Nun sei (y') ein beliebiges Argument innerhalb ΔE . Ist es ein numerisch verwendbares, so ist $f(y') = G(y')$, auf alle Fälle aber ist $\lim f(x'') = G(y')$, wenn (x'') eine Annäherungsfolge durchlaufend, gegen (y') convergirt. Dann also kann durch Annäherung von (x'') an (y') erreicht werden, dass $f(x'') - G(y')$ numerisch unter alle Grenzen sinkt. Dabei bleibt die Ungleichheit (a) bestehen, da $f(x'')$ nur solche Werthe durchläuft, wie sie in (a) vorausgesetzt werden, und der Uebergang zu $G(y')$ am Maximalmodul nichts ändert. Gehören ebenso (y'') und $G(y'')$ als Grenzen zu (x'') und $f(x'')$, so geht (a) über in

$$(a'') \quad \text{Mod } |G(y') - G(y'')| < \varepsilon',$$

und dies gilt für alle Argumente (y') , (y'') innerhalb ΔE .

C. Unter den Voraussetzungen des Satzes A erklären wir $G(x^0)$ als den Werth von f im Punkte (x^0) , gleichviel ob für diesen Punkt auch das zweite Hauptverfahren statthat, und namentlich auch, wenn dieses für f einen von $G(x^0)$ verschiedenen Werth ergeben sollte. In Folge dessen dehnt sich die Ungleichheit

$$(a) \quad \text{Mod. } |f(x'') - f(x'')| < \varepsilon'$$

von den numerisch verwendbaren Argumenten aus auf alle Argumente (x') , (x'') innerhalb ΔE ,

wie aus (a'') folgt, wenn man (y') , (y'') durch (x') , (x'') ersetzt und nun benutzt, dass G der Werth von f ist.

- D. Das überträgt sich auf alle Theile ΔE eines Grössengebietes E , wenn die Bedingungen des Satzes A in jedem Theile ΔE von E erfüllt sind, und der Werth von f für jeden Punkt (x^0) von E nach vorstehendem Princip, also stets durch das erste Hauptverfahren bestimmt wird (Nr. 11, Zus. II). Sind aber diese Bedingungen verletzt in irgend einem Punkte (oder einer Linie u. s. w.) von E , so ist das ein *singulärer* Punkt (oder eine singuläre Linie u. s. w.) von f .
- E. Wenn ein endlicher Ausdruck f in jedem Punkte (x^0) eines Grössengebietes E einen völlig bestimmten Werth besitzt, und dieser Werth sich aus den Nachbarwerthen von f durch das erste Hauptverfahren ergibt, so werde ich f als *vollwerthig* in E bezeichnen.
- F. Für die Vollwerthigkeit eines endlichen Ausdruckes f in einem Gebiete E ist eine Eigenschaft dieses Ausdruckes erforderlich und hinreichend, welche darin besteht, dass für jeden Theil ΔE von E der grösste Schwankungsmodul von f , also seine Maximalschwankung, unter eine beliebig kleine Grenze ε sinkt, wenn die Maximalschwankungen seiner Argumente unter völlig bestimmte, von Null verschiedene und aus ε zu berechnende Grenzen gebracht werden.

14.

Die Stetigkeit analytischer Ausdrücke. Dass diese Eigenschaft von f mit der *Stetigkeit* von f in Beziehung steht, braucht nicht erst gesagt zu werden.

Sie bedarf aber eines Namens, da sie — zunächst bei den endlichen Ausdrücken — das Kriterium für die Convergenz des Annäherungsalgorithmus IIa im Sinne der Aufgabe I enthält, mithin jedesmal erwähnt werden muss, wo es sich um diese Convergenz oder die auf die Vollwerthigkeit von f bezüglichen Folgerungen aus ihr handelt.

Von der *Continuität* Cauchy's, als einer Beziehung zwischen den *gleichzeitigen* Aenderungen der Variabeln $x_1, x_2, \dots, x_n$ und des Ausdruckes f ist diese Eigenschaft durchaus verschieden: als Continuität von f wird sie demnach nicht bezeichnet werden dürfen.

Aber sie selbst, nämlich ihr im Vorstehenden nachgewiesenes Kriterium leistet — wenigstens vorläufig für die endlichen Ausdrücke f — genau das, wofür man sich auf die Stetigkeit von f zu berufen gewöhnt hatte, wobei der Irrthum nur darin bestand, dass man glaubte es reiche aus, als Stetigkeit von f seine Continuität nachzuweisen, während es richtig gewesen wäre

zu untersuchen, was man für den angegebenen Zweck unter dem Worte *Stetigkeit* verstehen müsse.

Diese Untersuchung ist im Vorangehenden für die endlichen Ausdrücke f geleistet, und ich bezeichne die bezügliche Eigenschaft (F) von f als seine Stetigkeit, da in sprachlicher Beziehung nichts vorliegt, was zur bisher üblichen, irreleitenden Auslegung dieses Wortes nöthigen könnte.

G. Ich nenne allgemein einen Ausdruck f mit den Variablen $x_1 x_2 \dots x_n$, oder auch eine Function dieser Variablen stetig in einem $\left| \begin{array}{c} \text{Punkte } (x^0) \\ \text{Gebiete } E \end{array} \right|$, wenn für jedes $\left| \begin{array}{c} (x^0) \text{ einschliessende} \\ \text{in } E \text{ enthaltene} \end{array} \right|$ engere Grössengebiet ΔE 1) f keiner unendlichen Schwankung unterliegt und 2) seine Maximalschwankung unter eine beliebige Grenze ε gebracht werden kann, indem man die Maximalschwankungen der Variablen in ΔE unter Grenzen bringt, die alle von Null verschieden sind und sich aus ε ohne Unbestimmtheit ergeben.

Diese Definition der Stetigkeit für die einfachern Fälle $n = 1, 2, 3$ habe ich meinen Vorlesungen über Functionentheorie und, seit mehr als 30 Jahren, meinen Vorlesungen über bestimmte Integration zu Grunde gelegt. Ich bin zu derselben ursprünglich veranlasst worden durch eine empfindliche Lücke in der überkommenen Begründung des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe, welche von der oben erwähnten ungenügenden Vorstellung vom Wesen der Stetigkeit herrührte.

In seinen *Vorlesungen über die einfachen und vielfachen Integrale* (Seite 28) hat Herr Kronecker eine andere Definition der Stetigkeit gegeben, deren wesentlicher Unterschied von der vorstehenden darauf beruht, dass sie (für $n = 2$) den zu (x^0) gehörigen Werth $f(x^0)$ (an der angegebenen Stelle $f(x, y)$) voraussetzt, während es sich hier um die Frage nach seiner Existenz handelt. Dass die obige Definition der Stetigkeit diesem grossen Mathematiker nicht unbekannt gewesen ist, er sie aber abgelehnt hat, scheint aus einer andern Stelle des erwähnten Werkes hervorzugehen (Seite 6, Zeile 14—11 v. u.).

Im Uebrigen findet sich obige Definition der Stetigkeit auch schon bei P. Dubois-Reymond, ich erinnere mich aber nicht, dass er angegeben hätte, was ihn zu derselben nöthigte.

H. Ist ein endlicher Ausdruck f mit den Variablen $x_1 x_2 \dots x_n$ stetig in einem Punkte (x^0) , so hat er in diesem Punkte einen völlig bestimmten Werth, und kann demselben durch numerisch ausführbare Annäherungsrechnungen nach Belieben genähert werden.

Ist f stetig in allen Punkten oder allen Theilen ΔE eines Grössengebietes E , so gilt dieser Satz von jedem Punkte dieses Gebietes, und F heisst vollwerthig in E .

Enthält E eine Stelle (Punkt, Linie, ...) wo die Stetigkeit von f aussetzt, so bezeichnet man diese als eine singuläre Stelle von f .

Wir schliessen an die Untersuchung des Falles II. a., in welcher bereits der Kernpunkt der hier vorliegenden allgemeinen Frage vollständig zur Erörterung gekommen ist, zwei Beispiele nebst einer Bemerkung über das Wesen der numerisch verwendbaren Argumente.

15.

Zunächst zwei Beispiele einfachster Art. Ich nehme $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, setze $x + iy = z$ bei geometrischer Repräsentation von x, y, z , und nehme für f die Ausdrücke z^p , $\frac{1}{z-a}$, wo p eine positive ganze Zahl, a eine Constante ist.

Unter ΔE verstehe ich ein Stück der Zahlenebene, welches den Punkt z^0 enthält, und bezeichne durch z', z'' beliebige Werthe von z innerhalb ΔE .

1. Für $f = z^p$ wird der Ausdruck für seine Schwankungen innerhalb ΔE :

$$S = z'^p - z''^p = (z' - z'') |z'^{p-1} + z'^{p-2} z'' + \dots + z''^{p-1}|.$$

Um den Punkt $z = 0$ lege ich ein Kreisgebiet

$$E. \quad \text{Mod. } z < \varrho,$$

welches ΔE enthält. Dann ist für jede Lage von ΔE innerhalb E

$$\text{Mod. } |z'^{p-1} + z'^{p-2} z'' + \dots + z''^{p-1}| < p \cdot \varrho^{p-1}.$$

Ist ferner $\Delta \xi$ die grösste Sehne von ΔE , so ist

$$\text{Mod. } (z' - z'') \leq \Delta \xi,$$

und für die Maximalschwankung von f innerhalb ΔE folgt:

$$\text{Mod. } S < p \varrho^{p-1} \Delta \xi.$$

Soll diese $< \varepsilon$ werden, so muss

$$\Delta \xi < \frac{\varepsilon}{p \cdot \varrho^{p-1}}$$

genommen werden, und das genügt allen Bedingungen, so lange es nicht unendlich klein, d. h. so lange ϱ nicht unendlich gross wird.

Der Ausdruck z^p ist stetig und vollwerthig, so lange der Mod. ϱ nicht alle ohne Unbestimmtheit angebbaren Grenzen überschreitet.

2. Für $f = \frac{1}{z-a}$ wird

$$S = \frac{1}{z'-a} - \frac{1}{z''-a} = \frac{z''-z'}{z'-a \cdot z''-a}, \quad \text{Mod. } S = \frac{\text{Mod.}(z''-z')}{r' r''},$$

wenn r', r'' die Entfernungen von a bis z', z'' sind.

Enthält nun 1) ΔE den Punkt $z = a$, so gehört es zu den Voraussetzungen unserer Untersuchung, dass z', z'' dem Werthe a beliebig nahe kommen können. Bei der Annäherung von z'' an a wächst der Mod. S über alle Grenzen, f ist nicht stetig im Punkte a . Wenn dagegen 2) a ausserhalb ΔE liegt, so können r', r'' nicht unter jede Grenze sinken, und wenn $\Delta \xi$ die vorige Bedeutung hat, so ergibt sich für die Maximalschwankung von f in ΔE

$$\text{Mod. } S < \frac{\Delta \xi}{r' r''}$$

bei möglichst kleinen Werthen von r' und r'' , woraus die Stetigkeit und Vollwerthigkeit von f ausserhalb a folgt. Als numerisch verwendbar hat im ersten Beispiel jede rationale Zahl $z = R_1 + i R_2$, im zweiten jede Zahl von der Form $z = a + R_1 + i R_2$ zu gelten. Dies zeigt zur Genüge, dass die numerische Verwendbarkeit der Argumente zwar von ihrem arithmetischen Charakter abhängt, aber dieser Charakter sich nach der Beschaffenheit von f richtet.

3. Es ist noch ein Fall zu erwähnen, in welchem scheinbar weder das erste noch das zweite Hauptverfahren anwendbar ist. Dieser Fall kann wirklich vorkommen, nämlich wenn der Ausdruck f ausser den n Variablen $x_1 \dots x_n$ noch Irrationalzahlen $j_{n+1} \dots j_p$ so enthält, dass es für $x_1 \dots x_n$ überhaupt gar keine numerisch verwendbaren Werthe gibt.

Die Ausnahme ist nur eine scheinbare, denn die Auswerthung von f für einen Punkt $x_1^0 \dots x_n^0$ ist ohnehin nicht anders möglich, als dass auch $j_{n+1} \dots j_p$ durch Annäherungswerthe eingeführt werden. Dies kommt darauf hinaus, dass in f an Stelle von $j_{n+1} \dots j_p$ zunächst Variable $x_{n+1} \dots x_p$ eingeführt werden, wodurch $f(x_1 \dots x_n)$ in $f(x_1 \dots x_p)$ übergehe, und dann die Auswerthung von f für den Punkt $x_1^0 \dots x_n^0, j_{n+1} \dots j_p$ eintritt, wozu nur das erste Hauptverfahren dienen kann, weil $j_{n+1} \dots j_p$ irrational sind, aber numerisch verwendbare Argumente, nämlich die rationalen Zahlen, zur Verfügung stehen.

Dass man ebenso, von allereinfachsten Beispielen abgesehen, in jedem Falle verfährt, wo f Irrationalzahlen enthält, versteht sich von selbst.

16.

Die unendlichen Ausdrücke f. In Nr. 12 ist alles vorbereitet, was auf diesen Fall Bezug hat. Die Aufgabe I (Nr. 11) fordert

(S) dass für $S = f_p(x') - f_q(x'')$ und $p \geq m, q \geq m$ der
Mod. $S < \epsilon'$

wird, für alle in $\Delta\epsilon$ enthaltenen, von (x^0) verschiedenen und numerisch verwendbaren Argumente (x') , (x'') , und zwar muss sich dies für jedes beliebig klein gegebene ϵ' erreichen lassen, ohne dass m , die untere Grenze von p und von q , unendlich gross, oder eine der Schwankungen $\Delta x_1 \dots \Delta x_n$ unendlich klein wird. Alle hier vorkommenden Werthe von f_p, f_q sind nach dem zweiten Hauptverfahren zu berechnen.

Wir beginnen mit zwei besonderen Fällen, und nehmen zuerst $(x'') = (x')$ und für q die gemeinsame untere Grenze von p und von q , nämlich die Zahl m . Das giebt

$$S = f_p(x') - f_m(x') \quad \text{und} \quad \text{Mod. } S < \epsilon'.$$

für den grössten Mod. S , mithin für alle Moduln S .

Das ist gefordert für $p \geq m$ und alle numerisch verwendbaren Argumente (x') innerhalb $\Delta\epsilon$, mit Ausnahme von (x^0) , nebst dem Zusatze bezüglich m und $\Delta x_1 \dots \Delta x_n$. Es ist die Bedingung für die Convergenz des unendlichen Ausdruckes $f(x')$ bei festem Argumente (x') , was dem Falle I. b. entspricht, aber mit einem Zusatze, welcher sich auf die verschiedenen Argumente bezieht, welche für (x') sollen zugelassen werden. Der Zusatz besteht darin, dass Mod. $S < \epsilon'$ gefordert ist für alle Argumente (x') , und zwar zum nämlichen ϵ' und zur nämlichen unteren Grenze m von p und von q .

In Folge dessen erweist sich, für ein und dasselbe m , $f_m(x')$ als ausführbares Anfangsergebniss der Rechnung zu jedem (x') innerhalb $\Delta\epsilon$, mit Ausnahme von (x^0) , und ein und dasselbe ϵ' als Mass der Genauigkeit für die hinzutretenden Correctionen (Schwankungen):

(a) Der gegenwärtige besondere Fall sagt also aus, dass innerhalb $\Delta\epsilon$ der unendliche Ausdruck f nicht nur für jedes feste, von (x^0) verschiedene, numerisch verwendbare Argument (x') convergiren muss, sondern dass er für alle diese Argumente (x') gleichmässig convergiren muss. Und das Criterium für die gleichmässige Convergenz von f bei festen Argumenten (x') innerhalb $\Delta\epsilon$ besteht darin dass, wenn die Ungleichheit

$$\text{Mod. } |f_p(x') - f_m(x')| < \epsilon'$$

für jedes $p \geq m$ gefordert wird, man ihr für alle diese Argumente (x') durch das nämliche m genügen kann, und zwar, ohne dass von den Schwankungen $\Delta x_1 \dots \Delta x_n$ irgend eine unendlich klein wird.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so convergiren $f_p(x')$ bei wachsendem p , $f_q(x'')$ bei wachsendem q gegen feste Grenzen, die aus dem zweiten Hauptverfahren entspringenden Werthe $f(x')$, $f(x'')$ von f zu den von (x^0) verschiedenen, numerisch verwendbaren Argumenten (x') , (x'') . Die Ungleichheit (S) geht dabei über in

$$\text{Mod. } |f(x') - f(x'')| < \varepsilon',$$

das ist dieselbe Ungleichheit, und mit denselben Zusätzen, welche der Untersuchung über die endlichen Ausdrücke f zu Grunde liegt (Nr. 13. A.), und demnach auch zu denselben Folgerungen führt. Wir werden sie weiter unten auf anderm Wege wiederfinden.

Ein zweiter besonderer Fall ist der, wo $q = p$ genommen wird, was

$$S = f_p(x') - f_p(x'')$$

und $\text{Mod. } S < \varepsilon'$ giebt für $p \geq m$ und alle numerisch verwendbaren Argumente (x') , (x'') innerhalb $\Delta\varepsilon$, mit Ausnahme von (x^0) . Das ist ein besonderer Fall zu II. a. und sagt aus, dass f_p bis auf den Punkt (x^0) innerhalb $\Delta\varepsilon$ stetig sein muss, und zwar für $p \geq m$.

(β) Unsere gegenwärtige Aufgabe fordert auch, dass bei der in (α) festgestellten Bedeutung von m die sämtlichen Ausdrücke

$$f_m f_{m+1} \cdots f_p \cdots$$

innerhalb $\Delta\varepsilon$ mit Ausschluss des Punktes (x^0) stetig sein müssen.

Diese Bedingungen (α) und (β) sind demnach für unsere Aufgabe unerlässlich, sie reichen aber auch aus. In der That ist der allgemeine Ausdruck von S :

$$\begin{aligned} S &= f_p(x') - f_q(x'') \\ &= |f_p(x') - f_p(x'')| + |f_p(x'') - f_m(x'')| - |f_q(x'') - f_m(x'')|, \end{aligned}$$

und das giebt, unter Voraussetzung von (α) und (β)

$$\text{Mod. } S < 3\varepsilon'.$$

Wenn das nun auch nicht $< \varepsilon'$ ist, wie ursprünglich (in (S)) verlangt wurde, so beweist es doch, dass ein Maximalwerth des $\text{Mod. } S$ existirt, und dieser unter den Bedingungen (α) (β) nach Belieben verkleinert werden kann, was der wahre Sinn der Ungleichheit (S) ist.

Aber die Bedingungen (α) und (β) sind nicht unabhängig von einander, sondern wenn (α) erfüllt ist, kann (β), und wenn (β) erfüllt ist, kann (α) durch eine viel einfachere Bedingung ersetzt werden.

Sei die Bedingung (β) erfüllt. Wir nehmen für (X) ein von (x^0) verschiedenes, numerisch verwendbares Argument innerhalb $\Delta\varepsilon$, und zerlegen S wie folgt:

$$S = f_p(x') - f_q(x'') \\ = |f_p(x') - f_p(X)| - |f_q(x'') - f_q(X)| + |f_p(X) - f_q(X)|$$

oder

$$S = \sigma + \tau, \text{ für } \sigma = f_p(X) - f_q(X), \tau = |f_p(x') - f_p(X)| - |f_q(x'') - f_q(X)|.$$

Werden p, q auf die Werthe $\geq m$ beschränkt, so folgt aus (β) , dass $\text{Mod. } \tau < 2\varepsilon'$ ist, das giebt $\text{Mod. } S < 2\varepsilon' + \text{Mod. } \sigma$, $\text{Mod. } \sigma < 2\varepsilon' + \text{Mod. } S$. Unsere Aufgabe (S) fordert $\text{Mod. } S < \varepsilon'$, also $\text{Mod. } \sigma < 3\varepsilon'$. Und wenn umgekehrt $\text{Mod. } \sigma < 3\varepsilon'$ ist, so wird $\text{Mod. } S < 5\varepsilon'$. Das ist nicht die ursprüngliche Ungleichheit $\text{Mod. } S < \varepsilon'$, aber sie sagt dasselbe aus, nämlich dass ein höchster Werth des $\text{Mod. } S$ existirt, und dieser unter den gegenwärtigen Voraussetzungen nach Belieben verkleinert werden kann, was sich auf seine übrigen Werthe überträgt. Aber die hiernach nothwendige und ausreichende Bedingung $\text{Mod. } \sigma < 3\varepsilon'$ fordert nur die Convergenz des unendlichen Ausdruckes f für das feste Argument (x) , und dieses mit (β) zusammen bildet hiernach ebenso wie (α) mit (β) zusammen ein System von Bedingungen, welche für die Aufgabe (S) nothwendig sind und ausreichen. Wir heben für's Erste nur folgendes Resultat heraus:

(γ) Wir schliessen den Punkt (x^0) von $\Delta\varepsilon$ aus. Sind dann (β)

$$f_m f_{n+1} \cdots f_p \cdots$$

stetig innerhalb $\Delta\varepsilon$, und ist f selbst convergent für irgend ein numerisch verwendbares, festes Argument (x) innerhalb $\Delta\varepsilon$, so ist es innerhalb $\Delta\varepsilon$ bei festen Argumenten gleichmässig convergent,

und allen Bedingungen der Aufgabe (S) ist genügt.

Nun sei umgekehrt die Bedingung (α) erfüllt. Wenn der unendliche Ausdruck f für ein festes Argument (x) convergirt, so heisst dies, dass 1) in der unendlichen Folge $f_1 f_2 \cdots f_p \cdots$ die spätern Glieder sich, ihrem Werthe nach, immer weniger von dem, durch die Convergenz nachgewiesenen Werthe von f zum Argumente (x) unterscheiden, und dass 2) dieser Werth von f dem zweiten Hauptverfahren entspringt, da sein Argument nicht durch Annäherungen einzuführen ist. Man könnte versucht sein, dies dadurch zur Anschauung zu bringen, dass man diese Folge ohne Rücksicht darauf, dass sie kein Ende hat, gleichwohl mit f als Schlussglied schreibt: $f_1 f_2 \cdots f_p \cdots f$.

Aus (α) erhalten wir nun, unter (x') , (x'') feste, numerisch verwendbare Argumente innerhalb $\Delta\varepsilon$, mit Ausschluss von (x^0) verstanden,

$$\begin{aligned} \text{Mod. } |f_p(x') - f_m(x')| &< \varepsilon', & \text{Mod. } |f_q(x'') - f_m(x'')| &< \varepsilon', \\ \text{Mod. } |f(x') - f_m(x')| &< \varepsilon', & \text{Mod. } |f(x'') - f_m(x'')| &< \varepsilon'. \end{aligned}$$

Sodann ist

$$S = f_p(x') - f_q(x'') = |f_p(x') - f_m(x')| - |f_q(x'') - f_m(x'')| \\ - |f(x') - f_m(x')| + |f(x'') - f_m(x'')| + \sigma$$

für

$$\sigma = f(x') - f(x''),$$

und wenn wir das, was rechts zu σ kommt, durch τ bezeichnen, $S = \sigma + \tau$,
 $\sigma = S - \tau$.

Für $p \geq m$, $q \geq m$ folgt aus dem Vorangehenden $\text{Mod. } \tau < 4\varepsilon'$, also
 $\text{Mod. } \sigma < 4\varepsilon' + \text{Mod. } S$, $\text{Mod. } S < 4\varepsilon' + \text{Mod. } \sigma$. Wenn nun, wie ver-
 langt, $\text{Mod. } S < \varepsilon'$ ist, so gibt das $\text{Mod. } \sigma < 5\varepsilon'$; und wenn umgekehrt
 dies erreicht ist, so wird $\text{Mod. } S < 9\varepsilon'$; es gibt dann einen höchsten Werth
 des $\text{Mod. } S$, und er so wie alle übrigen können mit Einhaltung aller
 Bedingungen unserer Aufgabe nach Belieben verkleinert werden, was
 einzig und allein gefordert ist.

Ist (α) erfüllt, so reicht es für die Aufgabe (S) aus, dass

$$\text{Mod. } \sigma = \text{Mod. } |f(x') - f(x'')| < 5\varepsilon'$$

wird, d. h. dass, auf numerisch verwendbare Argumente mit Ausschluss
 von (x^0) beschränkt, f innerhalb $\Delta\varepsilon$ stetig ist.

(δ) Der unendliche Ausdruck f werde auf die numerisch verwend-
 baren Argumente innerhalb $\Delta\varepsilon$, mit Ausnahme von (x^0) be-
 schränkt. Ist alsdann f innerhalb $\Delta\varepsilon$ bei festen Argumenten
 gleichmässig convergent, und ausserdem stetig, so sind die
 Ausdrücke $f_m f_{m+1} \cdots f_p \cdots$ ebenfalls stetig innerhalb $\Delta\varepsilon$,

und allen Bedingungen der Aufgabe (S) ist genügt.

Dazu kommt noch ein Zusatz. Im Ausdrucke für S nehme man
 $q = p$, so dass S übergeht in

$$\sigma_p = f_p(x') - f_p(x'').$$

Wird das Zeichen τ zur Abkürzung beibehalten, so folgt

$$\sigma_p = \sigma + \tau, \quad \sigma = \sigma_p - \tau, \quad \text{Mod. } \sigma_p < 4\varepsilon' + \text{Mod. } \sigma, \quad \text{Mod. } \sigma < 4\varepsilon' + \text{Mod. } \sigma_p.$$

Die Verkleinerung des einen der beiden Moduln $\text{Mod. } \sigma$, $\text{Mod. } \sigma_p$, zieht
 also die Verkleinerung des andern nach sich und ist umgekehrt durch
 sie bedingt: immerhin unter der Voraussetzung, dass die Bedingung (α)
 erfüllt ist.

(ε) Ist die Bedingung (α) erfüllt, d. h. f innerhalb $\Delta\varepsilon$ bis auf
 den Punkt (x^0) gleichmässig convergent, so ist für die Stetig-
 keit von f und sämtlicher Ausdrücke $f_m f_{m+1} \cdots f_p \cdots$ im
 gleichen Umfange erforderlich und hinreichend, dass irgend
 einer von diesen endlichen Ausdrücken f_p dort stetig ist.

Bei massgebenden Ausdrücken f der Analysis, namentlich den Potenz-
 reihen innerhalb ihres Convergenzgebietes für feste Argumente, ist diese

letzte Bedingung identisch erfüllt; für solche Ausdrücke folgt dann aus (γ), dass ihre Convergenz die locale gleichmässige Convergenz nach sich zieht. Einen Anhaltspunkt für die Annahme, dass nicht bloss für ausgewählte Ausdrucksformen f , sondern allgemein, aus ihrer *gleichmässigen Convergenz bei festen Argumenten* ihre Stetigkeit folge, habe ich in der hier vorgelegten Darstellung nicht finden können.

Wir haben folgende Resultate:

- A. Auch einem unendlichen Ausdrucke f schreiben wir für ein gegebenes Argument $((x^0))$ nur dann einen Werth zu, wenn das erste Hauptverfahren für diesen Punkt convergirt und bei jeder Anordnung zum nämlichen Grenzwerte führt (Nr. 11, Aufgabe I. und Zusatz II.). Diesen erklären wir als den Werth von f zum Punkte $((x^0))$ und bezeichnen ihn durch

$$G((x^0)).$$

- B. Damit die Convergenz des ersten Hauptverfahrens in dieser Weise statthabe, ist erforderlich und hinreichend, dass in einem den Punkt $((x^0))$ enthaltenden Schwankungsgebiete $\Delta\epsilon$, abgesehen von diesem Punkte selbst, eine der drei Doppelbedingungen erfüllt ist:

entweder (α) und (β),
oder (γ),
oder (δ),

und zwar, ohne dass von den Schwankungen $\Delta x_1 \dots \Delta x_n$ irgend eine unendliche klein wird.

Für die unendlichen Ausdrücke f liegen jetzt, wenn auch aus andern Gründen, im Wesentlichen dieselben Verhältnisse vor, wie oben (Nr. 13. 14) für die endlichen. Die Eigenschaft, in $\Delta\epsilon$ für jedes numerisch verwendbare Argument $((x'))$ (abgesehen von $((x^0))$) seinen völlig bestimmten Werth $f((x'))$ zu besitzen, der nach dem zweiten Hauptverfahren zu berechnen ist, besitzen die endlichen Ausdrücke f selbstverständlich, die unendlichen wegen der geforderten Convergenz bei festen Argumenten. Die Eigenschaft der Stetigkeit ist ebenfalls übereinstimmend, nämlich für die gleichen Argumente $((x'))$ gefordert. In Folge dessen wiederholen sich alle Schlüsse, die wir bei den endlichen Ausdrücken aus diesen beiden Eigenschaften und der Convergenz des ersten Hauptverfahrens gezogen haben.

- C. Soweit die Bedingung (δ) der Convergenz und der Stetigkeit von f für die numerisch verwendbaren Argumente $((x))$ erfüllt ist, liefern beide Hauptverfahren zu diesen Argumenten für f denselben Werth

$$G((x)) = f((x)).$$

Dies gilt auch für den Punkt (x^0) : für die Existenz von $G(x^0)$ ist weder die Convergenz noch die Stetigkeit von f in diesem Punkte erforderlich; wohl aber bedarf es der Convergenz von f , wenn das zweite Hauptverfahren anwendbar sein und einen Werth $f(x^0)$ von f ergeben, und dazu der Stetigkeit, wenn er $= G(x^0)$ sein soll.

- D. Wo f , auf die numerisch verwendbaren Argumente beschränkt, bei festen Argumenten gleichmässig convergirt und zugleich stetig ist, ist es stetig für alle Argumente ohne Ausnahme und für alle $= G$. Besteht zwar die Convergenz, aber nicht zugleich die Stetigkeit von f auch noch im Punkte (x^0) , so wird die Stetigkeit von f auch in diesem Punkte hergestellt, wenn man $f(x^0)$ als seinen Werth verwirft und durch den von ihm verschiedenen Werth $G(x^0)$ ersetzt.

Diese Unstetigkeit von f erweist sich demnach als Beispiel einer hebbaren Unstetigkeit im Sinne Riemann's, und sie wird gehoben, indem man auch für das Argument (x^0) den vom zweiten Hauptverfahren gelieferten Werth von f durch $G(x^0)$ ersetzt, d. h. die Auswerthung von f ausschliesslich auf das erste Hauptverfahren gründet.

- E. Sind die Bedingungen des Satzes B. nicht erfüllt, so ist das Annäherungsverfahren IIb. nicht convergent im Sinne der Aufgabe I., und bei der Annäherung seiner Argumente an (x^0) convergirt f nicht gegen eine feste Grenze, mindestens nicht stets gegen dieselbe Grenze.

Damit ist nicht ausgeschlossen, dass unter geeigneten Umständen das zweite Hauptverfahren zu diesem Punkte einen völlig bestimmten Werth für f ergibt.

Hierhin gehört das bereits in Nr. 8 erwähnte Beispiel, welches die Fourier'schen Reihen liefern, wenn die in eine solche Reihe f entwickelte Function φ für das Argument x^0 eine Discontinuität besitzt.

- F. Sind die Bedingungen des Satzes B. erfüllt in allen Theilen eines Gebietes E , so hat f auf Grund des Uebereinkommens A. in jedem Punkte (x^0) von E einen völlig bestimmten Werth, dem es sich bei jeder unbegrenzten Annäherung seiner Argumente an diesen Punkt ohne Ende nähert; f heisst vollwerthig innerhalb E , seine Stetigkeit umfasst alle Argumente in E ohne Ausnahme, und zu numerisch verwendbaren Argumenten liefert das zweite Hauptverfahren stets denselben Werth für f wie das erste.

- G. Enthält E eine Stelle (Punkt, Linie, ...), in welcher die Bedingungen des Satzes B. ganz oder zum Theil aussetzen, so bezeichnet man diese als eine singuläre Stelle von f .

Statt, wie in B., zu fordern dass, bei festen Argumenten, f in jedem hinlänglich kleinen Theile ΔE von E gleichmässig convergiren soll, kann man bündiger verlangen dass, immer bei festen Argumenten, innerhalb E unendliche Schwankungen in der Convergenz von f ausgeschlossen sein sollen. Bei der Prüfung der Frage, ob oder in wie weit das der Fall ist, wird man aber auf das in (α) zu Grunde gelegte Kriterium für die locale gleichmässige Convergenz von f bei festen Argumenten zurückgreifen müssen.

17.

Ich stelle nun aus dem Vorangehenden die Hauptpunkte zusammen welche auf die Vollwerthigkeit von f Bezug haben.

An der Spitze steht die Frage, unter welchen Bedingungen ein Ausdruck f für gegebene Argumente (x^0) einen einzigen, von jeder Unbestimmtheit freien Werth hat, dazu kommt die zweite Frage, unter welcher Bedingung f diese Eigenschaft in allen Punkten (x) eines Grössengebietes E besitzt.

Die Beantwortung der ersten Frage wirft sich auf die numerische Auswerthung von f für die vorgeschriebenen Argumente (x^0). Für diese stehen zwei Wege zur Verfügung.

Das erste Hauptverfahren setzt voraus, dass in den Ausdruck f , behufs Ausrechnung desselben, nicht die vorgeschriebenen Argumente (x^0) selbst eingeführt werden, sondern an ihrer Stelle numerisch verwendbare Annäherungswerthe, aber diese in unbegrenzter Folge und mit unbegrenzt steigender Genauigkeit.

Unsere *Aufgabe* besteht für diesen Fall darin, zu ermitteln, unter welchen Bedingungen dieser unendliche Algorithmus convergirt und bei jeder Anordnung zum nämlichen Grenzwerte G für f führt. Ist ein solcher vorhanden, so wird G als Werth von f im gegebenen Punkte (x^0) erklärt.

Geschieht dem in einem Gebiete E allenthalben Genüge, so heisst f , auf Grund dieser Bestimmung seiner Werthe, vollwerthig in E .

Das zweite Hauptverfahren ist beschränkt auf numerisch verwendbare Argumente (x^0); es setzt voraus, dass behufs Auswerthung von f , die vorgeschriebenen Argumente selber in diesen Ausdruck eingesetzt werden, wodurch $f = f(x)$ in den rein numerischen Ausdruck $f(x^0)$ übergeht.

Ist f ein endlicher Ausdruck, so liegt dieses zweite Hauptverfahren auch dem ersten zu Grunde, und es ist Postulat unserer Untersuchung, dass nicht bloss die Ausrechnung von $f(x^0)$ für numerisch verwendbare Argumente (x^0) im Allgemeinen durchgeführt werden kann, sondern auch die Hilfsmittel vorhanden sind um zu ermitteln, für welche Argumente die numerische Rechnung an Singularitäten des Ausdruckes f scheitert.

Ist f ein unendlicher Ausdruck, so hängt die Frage, ob $f(x^0)$ einen bestimmten Werth vorstellt, ab von der Convergenz des Ausdruckes f bei festen Argumenten. Im Falle der Convergenz kann $f(x^0)$ je nach Umständen $= G$ oder aber auch von G verschieden sein. Im letztern Falle wird nicht $f(x^0)$, sondern G als Werth von f zum Punkte (x^0) angenommen.

Dies so festgestellt, fanden wir folgendes:

Soll beim ersten Hauptverfahren der von unserer Aufgabe geforderte Grenzwert G existiren, also f nach Uebereinkunft in (x^0) diesen völlig bestimmten Werth haben, so muss

1) f , falls dies ein unendlicher Ausdruck ist, in einem den Punkt (x^0) enthaltenden, hinlänglich kleinen Schwankungsgebiete ΔE stetig sein und, bei festen Argumenten, gleichmässig convergiren, beides, ohne dass eine der Schwankungen $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ unendlich klein wird.

2) Wenn dagegen f ein endlicher Ausdruck ist, so reicht seine Stetigkeit in ΔE aus.

3) Soll f vollwerthig sein in E , so müssen diese Bedingungen erfüllt sein in jedem Theile ΔE von E , und dann liefert das zweite Hauptverfahren, wo es anwendbar ist, stets denselben Werth für f wie das erste.

4) Sind diese Bedingungen in E im Allgemeinen erfüllt, aber so, dass sie an einzelnen Stellen (Punkte, Linien, ...) alle oder zum Theil aussetzen, so bezeichnet man diese als singuläre Stellen von f , und es ist nur ausgeschlossen, dass f an einer solchen beim ersten Hauptverfahren einen einzigen, völlig bestimmten Werth erlangt.

5) Das erste Hauptverfahren führt also seiner Natur nach auf den Begriff der Singularitäten von f und ihre Kriterien, während das zweite, auf gleiche Allgemeinheit beschränkt, nur zur Prüfung der Convergenz bei festen Argumenten Anlass gibt, was dann zum Begriff des Convergenzgebietes G und seiner Grenzen, aber nicht auf den Begriff der Singularitäten führt.

Es versteht sich, dass dies sich sofort ändern kann; wenn man von dieser Untersuchung, welche alle Ausdrücke f umfassen soll, aufsteigt zur Untersuchung völlig charakterisirter Ausdrucksformen f .

18.

Die Singularitäten von f . Die Kriterien dafür sind folgende:

1. Ist f ein endlicher Ausdruck, so findet eine Singularität statt, wo f nicht stetig ist.
2. Ist f ein unendlicher Ausdruck, so findet eine Singularität statt, wo

entweder f nicht stetig ist,
 oder f in einem abnehmenden Schwankungsgebiete ΔE nicht
 bei festen Argumenten gleichmässig convergirt,
 oder wo beide Eigenschaften aussetzen.

Damit muss die allgemeine Untersuchung abbrechen; der Versuch, vollständig nachzuweisen, worin nun die so localisirten Singularitäten bestehen können, dürfte wohl völlig aussichtslos sein.

Wir stehen hier derjenigen Classe von Eigenthümlichkeiten analytischer Ausdrücke gegenüber, welche in einem berühmten Werke (Clebsch und Gordan, Theorie der Abel'schen Functionen, Vorrede) als unbekannte Möglichkeiten bezeichnet sind. In jedem gegebenen Falle wird, wie in der Lehre von den Functionen einer einzigen, complexen Variablen, das Stadium der wirklich möglichen Singularitäten von f zu den Hauptaufgaben der Theorie von f gehören.

19.

Die Umformung eines analytischen Ausdrucks. Sei der Ausdruck f durch eine einwandfreie Rechnung in einen andern Ausdruck G umgeformt worden. *Es fragt sich, in welchem Umfange und aus welchen Gründen hieraus auf die Gleichheit beider Ausdrücke, also auf die Gleichung*

$$G = f$$

geschlossen werden darf.

Bei unserer Beschränkung der Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ auf wirkliche Zahlenwerthe, und der analytischen Ausdrücke auf diejenigen Fälle, wo sie wirkliche Werthsbestimmungen leisten, springt in die Augen, dass nach der Gleichheit zwischen f und G nur gefragt werden kann, soweit sie beide zugleich den Charakter einer Werthsbestimmung besitzen, also z. B. wenn einer von beiden Ausdrücken ein unendlicher ist, sicher nicht ausserhalb seines Convergenzgebietes C bei festen Argumenten.

Aber dies reicht zur vollständigen Begründung der Gleichung $G = f$ nicht aus: denn durch die Umformungsrechnung allein, ohne Hinzuziehung anderer Beweisgründe, ist der Nachweis der Gleichheit zwischen f und G beschränkt auf diejenigen Argumente (x) , mit deren Zahlenwerthen die zur Umformung von f erforderliche Buchstabenrechnung numerisch exact ausgeführt werden kann, das sind die (bei f) numerisch verwendbaren Argumente. Setzen wir

$$f - G = h,$$

so ist also für diese Argumente die Gleichung $h = 0$ gesichert, zunächst aber auch nur für sie allein.

Nach der Gleichheit oder Ungleichheit zwischen f und G für die übrigen Argumente kann nur gefragt werden in einem solchen Grössengebiete, in welchem auch zu diesen übrigen Argumenten Werthe von f und G sicher gestellt sind, also *in demjenigen Gebiete $\mathfrak{E}$, in welchem f und G zugleich die Eigenschaft der Vollwerthigkeit besitzen*, wozu unbedingt die Stetigkeit beider in $\mathfrak{E}$ gehört.

Dann aber ist in jedem hinlänglich kleinen Theile $\Delta\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{E}$

$$\text{Mod. } |f(x') - f(x'')| < \varepsilon', \quad \text{Mod. } |G(x') - G(x'')| < \varepsilon'',$$

für alle Argumente (x') , (x'') innerhalb $\Delta\mathfrak{E}$ ohne Ausnahme. Daraus folgt

$$\text{Mod. } |h(x') - h(x'')| < \varepsilon' + \varepsilon'',$$

und wenn wir nun für (x'') ein bei f numerisch verwendbares Argument nehmen, was $h(x'') = 0$ gibt, für alle übrigen Argumente (x') innerhalb $\Delta\mathfrak{E}$: $\text{Mod. } h(x') < \varepsilon' + \varepsilon''$. Daraus aber folgt $h(x') = 0$. Denn wäre das nicht der Fall, so müsste es in $\Delta\mathfrak{E}$ Argumente (x') geben, für welche der $\text{Mod. } h(x')$ über einer von Null verschiedenen und, wenn auch kleinen, aber ohne Unbestimmtheit angebbaren Grenze liegt, und h wäre nicht stetig, da seine Schwankungen innerhalb $\Delta\mathfrak{E}$ durch Verkleinerung von $\Delta\mathfrak{E}$ nicht *nach Belieben* verkleinert werden könnten. Also ist auch $h(x') = 0$, also $h = 0$ in jedem Theile von $\mathfrak{E}$:

Die Umformung eines analytischen Ausdruckes in einen andern ist gültig in demjenigen Gebiete $\mathfrak{E}$, in welchem beide Ausdrücke vollwerthig sind.

Wo aber einer von beiden Ausdrücken, oder der eine und der andere zugleich, einen singulären Punkt hat, versagen die Schlüsse, welche zu $h(x') = 0$ führten.

Da jede Rechnung, welche im Ausdrucke f mit den Buchstaben $x_1, x_2, \dots, x_n$ ausgeführt wird, auf eine Umformung hinauskommt, so können wir auch den folgenden Satz aussprechen:

Wo ein analytischer Ausdruck f vollwerthig ist, ist die Buchstabenrechnung mit seinen Argumenten numerisch gültig ohne Beschränkung auf besondere Categorien derselben, d. h. dort rechnet man mit seinen Argumenten wie mit vollendeten Zahlen.

Ohne den Nachweis der gleichzeitigen Vollwerthigkeit von f und G entbehrt der Schluss ($h(x') = 0$) auf die Gleichheit beider der ausreichenden Begründung. Es müsste denn sein, dass man die Aufgabe der Analysis dahin abänderte, dass analytische Ausdrücke nicht als Werthsbestimmungen zu gelten haben.

Zum Verzicht auf die numerische Verwendbarkeit der Analysis wird man sich wohl nicht entschliessen. Soll sie aber zu den Anwendungen

berechtigen, welche man in dieser Beziehung von ihr erwartet, so darf sie nicht ausschliesslich auf Umformungen begründet werden, da auch bei diesen nur eine Stetigkeitsuntersuchung den Ausschlag für die Gültigkeit der Umformung geben kann, wofern für f und G zugleich der Charakter als Werthsbestimmungen *gesichert* bleiben soll.

Strassburg, 25. Januar 1900.

Inhalt.

	Seite
1. Die Variabeln werden auf reelle Zahlenwerthe beschränkt, analytische Ausdrücke nur in Betracht gezogen, soweit sie Werthsbestimmungen leisten. Unter welchen Bedingungen kommt einem Ausdrucke f diese Bedeutung zu?	465
2. Numerische Auswerthung von f . Die Anlage der Rechnung abhängig vom arithmetischen Charakter der Argumente. Numerisch verwendbare Argumente; Argumente die nur durch Annäherungen eingeführt werden können	466
3. Zweierlei Algorithmen, jeder für endliche und für unendliche Ausdrücke f	466
4. Die vier Classen auf ihren Erfolg zu prüfender Algorithmen	467
5. 6. Die vier Algorithmen I. a. b. und II. a. b. durch Rechnungsschemata dargestellt	468
7. Der Fall I. a. scheidet aus	469
8. Die drei übrigen Fälle sind Convergenzfragen, I. b. die übliche, II. a. und b. von anderer Art.	469
9. Wann eine unendliche Rechnung convergent ist	470
10. Der Algorithmus I. b.: Convergenz eines unendlichen Ausdruckes bei festen Argumenten. Convergenzgebiet C	471
11. Das erste Hauptverfahren (Annäherungsrechnung); Aufgabe I. Das zweite Hauptverfahren (Einsetzen der Argumente) Zusatz I	472
12. Vorbereitung für die Theorie des ersten Hauptverfahrens	473
13. <i>Das erste Hauptverfahren für endliche Ausdrücke f. A. Convergenzbedingung. B. Wann beide Hauptverfahren für f denselben Werth ergeben. C. Der Werth von f zum Punkte $((x^0))$ wird festgelegt. D. Ausdehnung auf ein Grössengebiet E. Singuläre Stellen von f. E. Vollwerthigkeit von f. F. Die Eigenschaft von f, welche die Vollwerthigkeit von f nach sich zieht.</i>	475
14. Die Stetigkeit analytischer Ausdrücke (G). Stetigkeit und Vollwerthigkeit von $f(H)$.	377
15. Zwei Beispiele. Numerisch verwendbare Argumente. Behandlung der Fälle, wo f irrationale Constanten enthält.	479
16. <i>Die unendlichen Ausdrücke f, erstes Hauptverfahren. Aufgabe (S). Besondere Fälle (α) und (β). Beide zusammen reichen zur Lösung der Aufgabe (S) aus. Vereinfachte Bedingungen (γ) und (δ). Zusatz (s)</i>	480
<i>A. Der Werth von f für den Punkt $((x^0))$. B. Convergenzbedingung für das erste Hauptverfahren: entweder (α) und (β), oder (γ), oder (δ). C. Wann beide Hauptverfahren für f denselben Werth liefern. D. Ausdehnung der Stetigkeit von f auf alle Argumente. E. Folgerung, wenn das Verfahren</i>	

nicht convergirt. <i>F.</i> Vollwerthigkeit von <i>f</i> in einem Gebiete <i>E.</i> <i>G.</i> Singu- läre Stellen	Seite 000
17. Zusammenstellung der Hauptergebnisse	487
18. Die Singularitäten von <i>f</i>	488
19. Die Umformung analytischer Ausdrücke. Die Umformung eines Ausdruckes in einen andern gültig, wo beide <i>vollwerthig</i> sind. Wo ein Ausdruck voll- werthig ist, rechnet man mit seinen Argumenten wie mit vollendeten Zahlen	489