Theorie der Involutionssysteme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in beliebig vielen abhängigen und unabhängigen Veränderlichen.

(Erste Abhandlung.)

Von

E. v. WEBER in München.

Jedes beliebige System partieller Differentialgleichungen kann durch Einführung geeigneter abhängiger Variabeln in ein System von Gleichungen *erster* Ordnung verwandelt werden. Unter den letztgenannten Systemen beanspruchen die von Lie*) so bezeichneten „Involutionssysteme“ das hauptsächlichste Interesse. Wir betrachten im Folgenden nur solche Systeme I. O. in den Independenten $x_1 \dots x_m$ und den unbekannten Functionen $z^1 \dots z^n$, die sich in gewisser Weise nach den Ableitungen der z^i auflösen lassen**); die Involutionseigenschaft kann dann kurz dahin charakterisirt werden, dass ein solches System die grösstmögliche, mit seiner Form verträgliche Mannigfaltigkeit von Integralen $z^1 \dots z^n$ besitzt. Die vorliegende *erste* Abhandlung beschäftigt sich mit folgenden Gegenständen:

Das *erste* Capitel behandelt die algebraischen Definitionsgleichungen eines Involutionssystems, und die Frage nach der Existenz eines allgemeinen Integrals, wobei wir uns im Wesentlichen auf die grundlegenden Untersuchungen des H. Bourlet**) stützen.

Das *zweite* Capitel ist der Betrachtung einer für die ganze Theorie fundamentalen *Matrix* gewidmet. Die Eigenschaften dieser Matrix führen uns in Cap. III zu einer Theorie der charakteristischen Mannigfaltigkeiten, insbesondere zur Definition einer besonderen Categorie von Involutionssystemen, der sog. „*Normalsysteme*“. Für diese letzteren skizziren wir in Cap. IV eine *Integrationstheorie*, indem wir zeigen,

*) Vgl. Leipz. Ber. 47, p. 53—128 (1895).

**) Einen Specialfall hiervon untersucht Herr König, Math. Ann. 23, p. 520, den allgemeinen Fall für *lineare* Systeme Herr Bourlet, Ann. de l'Éc. Norm. (3) VIII (1891) Supplém. p. 43 ff.

wie man unter der Annahme der Integrabilität gewisser totaler Differentialgleichungen eine *Reduction der Anzahl der Independenten* herbeiführen kann*).

Die weitere Durchführung dieses Ansatzes, die Besprechung der mannigfachen Analogien, die unsere Theorie zu derjenigen der partiellen Differentialgleichungen I. O. mit *einer* Unbekannten darbietet, endlich die Untersuchung der *linearen* Involutionssysteme soll einer *zweiten* Abhandlung vorbehalten bleiben.

Capitel I.

Die Definitionsgleichungen und das allgemeine Integral des Involutionssystems.

1. Wir bezeichnen mit $z^1, z^2, \dots, z^n$ Functionen der m unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_m$, setzen:

$$p_i^k \equiv \frac{\partial z^k}{\partial x_i}$$

und betrachten das folgende System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$(A) \quad f_1(x_1 \dots x_m, z^1 \dots z^n, p_1^1 \dots p_m^n) = 0, \quad f_2 = 0 \dots f_N = 0.$$

Die Anzahl N dieser Gleichungen sei kleiner als mn , aber nicht kleiner als n , so dass wir schreiben können:

$$N = \mu n + \nu \quad (0 \leq \nu \leq n - 1; \quad 1 \leq \mu \leq m - 1),$$

Es werde nun angenommen, dass die Gleichungen (A) sich in folgender Weise auflösen lassen:

$$(A') \quad \begin{cases} -p_1^1 + \varphi_1^1 = 0, & -p_2^1 + \varphi_2^1 = 0, & \dots & -p_\mu^1 + p_\mu^1 = 0, & -p_{\mu+1}^1 + \varphi_{\mu+1}^1 = 0, \\ -p_1^2 + \varphi_1^2 = 0, & -p_2^2 + \varphi_2^2 = 0, & \dots & -p_\mu^2 + p_\mu^2 = 0, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_1^\nu + \varphi_1^\nu = 0, & -p_2^\nu + \varphi_2^\nu = 0, & \dots & -p_\mu^\nu + p_\mu^\nu = 0, & -p_{\mu+1}^\nu + \varphi_{\mu+1}^\nu = 0, \\ -p_1^n + \varphi_1^n = 0, & -p_2^n + \varphi_2^n = 0, & \dots & -p_\mu^n + p_\mu^n = 0, & \dots \end{cases}$$

Hierin bedeuten die φ_a^b gewisse Functionen der Variablen $x_i, z^k, p_{\mu+1}^{\nu+1} \dots p_{\mu+1}^n, p_{\mu+2}^1 \dots p_{\mu+2}^n$. Der von den Herrn Méray und Riquier**) eingeführten Terminologie folgend nennen wir die N Grössen $p_1^1 \dots p_1^n, p_2^1 \dots p_\mu^n, p_{\mu+1}^1 \dots p_{\mu+1}^\nu$ „*principale*“, die übrigen $mn - N$ Grössen p_i^k „*parametrische*“ Ableitungen I. O.; die ersteren werden im Folgenden generell mit p_a^b , die letzteren mit p_g^h bezeichnet. Dementsprechend

*) Diese Theorie findet sich skizzirt in meiner Note: „Sur l'intégration etc.“, Comptes Rendus vom 3. August 1896.

**) Ann. de l'Ec. Norm. (3) VII (1890).

theilen wir die mn Indicespaare (i, k) ($i = 1 \dots m$, $k = 1 \dots n$) in zwei Classen, indem wir die N Paare (a, b) der ersten, die Paare (g, h) der zweiten zuzählen; endlich werde die zweite Ableitung

$$r_{ij}^k \equiv \frac{\partial^2 z^k}{\partial x_i \partial x_j}$$

„parametrisch“ oder „einfach principal“ oder „doppelt principal“ genannt, je nachdem von den beiden Zahlenpaaren (i, k) (j, k) keines oder eines oder alle beide der ersten Classe angehören.

2. Indem wir die Gleichungen (A') partiell nach $x_{\mu+2} \dots x_m$ differentiiren, wobei z^i , p_i^k als Functionen der x zu betrachten sind, erhalten wir die einfach principalen Ableitungen

$$r_{a, \mu+2}^b, r_{a, \mu+3}^b \dots r_{a, m}^b$$

ausgedrückt als ganze lineare Functionen $\psi_{a, \mu+2}^b \dots \psi_{a, m}^b$ der parametrischen 2. Ableitungen, deren Coefficienten von den Variabeln x , z , p_g^h abhängen. Durch Differentiation der Gleichungen

$$-p_\alpha^\beta + \varphi_\alpha^\beta = 0 \quad (\beta = \nu + 1 \dots n, \alpha = 1 \dots \mu)$$

nach $x_{\mu+1}$ gewinnen wir für die noch übrigen einfach principalen Ableitungen $r_{a, \mu+1}^\beta$ Ausdrücke, die ausser von parametrischen Derivirten noch von einfach principalen Ableitungen

$$r_{s, \mu+1}^t \quad (s = \mu + 2 \dots m, t = 1 \dots \nu)$$

abhängen; ersetzen wir diese Grössen durch ihre vorhin gefundenen Werthe $\psi_{\mu+1, s}^t$, so sind schliesslich alle einfach principalen 2. Ableitungen $r_{a, t}^b$ dargestellt durch ganze lineare Ausdrücke $\psi_{a, t}^b$ in den parametrischen 2. Ableitungen; die Coefficienten der letzteren sind Functionen von x , z , p_g^h .

3. Sind (a, b) (a', b) Zahlenpaare der ersten Classe, so gewinnt man durch partielle Differentiation der Gleichung:

$$-p_a^b + \varphi_a^b = 0$$

nach x_a für die doppelt principale Ableitung $r_{a, a}^b$ einen Ausdruck, der zunächst noch von den parametrischen und einfach principalen 2. Derivirten abhängt, aber, indem man letztere durch ihre obigen Werthe ersetzt, in eine Linearfunction $\psi_{a, a}^b$ der parametrischen r_{ij}^k übergeht. Ein ähnlicher Ausdruck $\psi_{a, a}^b$ ergibt sich für $r_{a, a}^b$ aus der Gleichung

$$-p_{a'}^b + \varphi_{a'}^b = 0$$

durch Differentiation nach x_a . Indem wir verlangen, dass die Identitäten

$$(1) \quad \psi_{a, a}^b \equiv \psi_{a', a}^b$$

keine Relation zwischen den parametrischen Ableitungen begründen, d. h. unabhängig von den Werthen derselben erfüllt seien, erhalten

wir das nachstehende System von Bedingungsgleichungen, worin zur Abkürzung:

$$P_{ag}^{bh} \equiv \frac{\partial \varphi_a^b}{\partial p_g^h}, \quad K_{aa'r}^{bt} \equiv \sum_{v=1}^n P_{a,\mu+1}^{bh} P_{a'r}^{ht} \quad \left(\begin{matrix} r = \mu + 2 \dots m \\ t = 1 \dots v \end{matrix} \right)$$

$$M_{al}^b \equiv \frac{\partial \varphi_a^b}{\partial x_l} + \sum_1^n p_l^h \frac{\partial \varphi_a^b}{\partial x^h} *)$$

gesetzt ist:

$$(B) \left\{ \begin{aligned} (1) & \sum_1^v \left[(K_{aa'r}^{bt} - K_{a'r}^{bt}) P_{\mu+1,s}^{tl} + (K_{aa's}^{bt} - K_{a's}^{bt}) P_{\mu+1,r}^{tl} \right] \\ & \equiv \sum_1^n (P_{as}^{hl} P_{a'r}^{bh} - P_{a's}^{hl} P_{ar}^{bh} + P_{ar}^{hl} P_{a's}^{bh} - P_{a'r}^{hl} P_{as}^{bh}), \\ (2) & \sum_1^v (K_{aa'r}^{bt} - K_{a'r}^{bt}) P_{\mu+1,\mu+1}^{tj} + \sum_{r=1}^n (P_{a'r}^{hj} P_{a,\mu+1}^{bh} - P_{ar}^{hj} P_{a',\mu+1}^{bh}) \\ & \equiv \sum_1^n (P_{a'r}^{bh} P_{a,\mu+1}^{hj} - P_{ar}^{bh} P_{a',\mu+1}^{hj}), \\ (3) & \sum_{r=1}^n (P_{a,\mu+1}^{bh} P_{a',\mu+1}^{hj} - P_{a',\mu+1}^{bh} P_{a,\mu+1}^{hj}) = 0, \\ & (a, a' = 1 \dots \mu; \quad b = 1 \dots n; \quad r, s = \mu + 2 \dots m; \quad l = 1 \dots n; \\ & \quad \quad \quad j = v + 1 \dots n). \end{aligned} \right.$$

$$(B') \quad M_{aa'}^b - M_{a'a}^b + \sum_{g,h} (P_{ag}^{bh} M_{a'g}^h - P_{a'g}^{bh} M_{ag}^h) \\ \equiv \sum_{\mu+2}^m \sum_1^v (K_{aa's}^{bt} - K_{a'a}^{bt}) M_{\mu+1,s}^t \\ (a, a' = 1 \dots \mu; \quad b = 1 \dots n),$$

$$(C) \left\{ \begin{aligned} (1) & \sum_1^v \left[(P_{ar}^{bt} - K_{\mu+1,a,r}^{bt}) P_{\mu+1,s}^{tl} + (P_{as}^{bt} - K_{\mu+1,a,s}^{bt}) P_{\mu+1,r}^{tl} \right] \\ & \equiv \sum_1^n (P_{\mu+1,r}^{bh} P_{as}^{hl} + P_{\mu+1,s}^{bh} P_{ar}^{hl}), \end{aligned} \right.$$

*) Für die principalen 1. Ableitungen sind hierin ihre Werthe aus (A') zu substituieren.

$$(C) \left\{ \begin{aligned} (2) \quad P_{ar}^{bj} &+ \sum_1^v (P_{ar}^{bt} - K_{\mu+1, ar}^{bt}) P_{\mu+1, \mu+1}^{tj} \\ &\equiv \sum_{r+1}^n P_{ar}^{hj} P_{\mu+1, \mu+1}^{bh} + \sum_1^n P_{\mu+1, r}^{bh} P_{a, \mu+1}^{hj}, \\ (3) \quad P_{a, \mu+1}^{bj} &\equiv \sum_{r+1}^n P_{a, \mu+1}^{hj} P_{\mu+1, \mu+1}^{bh}, \\ &(\alpha = 1 \dots \mu; b = 1 \dots v; l = 1 \dots n; r, s = \mu + 2 \dots m; \\ &\quad j = v + 1 \dots n), \end{aligned} \right.$$

$$(C') \quad M_{\mu+1, a}^b - M_{a, \mu+1}^b + \sum_{g, h} P_{\mu+1, g}^{bh} M_{ag}^h \\ \equiv \sum_{\mu+2}^m \sum_1^v (P_{as}^{bt} - K_{\mu+1, as}^{bt}) M_{\mu+1, s}^t \quad (\alpha = 1 \dots \mu; b = 1 \dots v).$$

Für $\mu = 1$ kommen die Relationen (B) (B'), für $\nu = 0$ (C) (C') in Wegfall; ist $\mu = 1$, $\nu = 0$, so bestehen überhaupt keine Relationen für die partiellen Ableitungen der φ_a^b ; ist $\mu = m - 1$ oder $\nu = 0$, so verschwinden alle von den Grössen $K_{a\alpha's}^{bt}$ abhängenden Terme.

Sind die Bedingungen (B) (B'), (C) (C'), wie wir fortab voraussetzen, identisch, d. h. für beliebige Werthe der x, z, p_g^y erfüllt, so werde (A) ein *Involutionssystem* genannt, und zur Abkürzung mit J bezeichnet.

4. Ueberträgt man die Benennungen „parametrisch“, „einfach principal“ u. s. w. auf die dritten Ableitungen r_{ijl}^k der z^k , so erkennt man leicht, dass nunmehr vermöge der Gleichungen, die aus (A') durch zweimalige partielle Ableitung nach den x entstehen, sich auch für jede einfach, zweifach und dreifach principale 3. Ableitung r_{ijl}^k je ein und nur ein in den parametrischen 3. Ableitungen linearer Ausdruck ergibt, dessen Coefficienten von x, z , und den parametrischen 1. und 2. Ableitungen abhängen; Analoges gilt für die Derivierten beliebiger Ordnung*).

5. Die Relationen (C) (C') zeigen, dass jedes einzelne der μ Systeme von Gleichungen

$$(2) \quad \begin{cases} -p_a^1 + \varphi_a^1 = 0, \dots, -p_a^\nu + \varphi_a^\nu = 0, \\ -p_{\mu+1}^1 + \varphi_{\mu+1}^1 = 0, \dots, -p_{\mu+1}^\nu + \varphi_{\mu+1}^\nu = 0 \end{cases}$$

für sich genommen ein Involutionssystem bildet, wenn man darin die Grössen $x_1 \dots x_{\alpha-1}$, $x_{\alpha+1} \dots x_\mu$ als constante Parameter betrachtet; die Gleichungen (2) mögen als „Theilsystem J_α “ bezeichnet werden.

*) Bourlet, l. c. pag. 36.

Sind ferner $\alpha_1 \dots \alpha_s$ irgend welche Zahlen der Reihe $1, 2 \dots \mu$, so bilden die $sn + v$ Gleichungen, aus welchen die Theilsysteme $J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, \dots, J_{\alpha_s}$ bestehen, ebenfalls ein Involutionssystem, wenn man die ausser $x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_s}$ noch vorhandenen Grössen der Reihe $x_1 \dots x_\mu$ als Parameter ansieht.

6. Für die unaufgelöste Form (A) von J lassen sich die Bedingungen der Nr. 3 folgendermassen formuliren: durch einmalige partielle Differentiation von (A) nach $x_1 \dots x_m$ erhält man mN in den $\frac{1}{2}m(m+1)n$ Unbekannten r_{il}^k lineare Gleichungen:

$$(3) \quad f_{il} \equiv M_{il} + \sum_1^n \sum_1^m P_{ij}^k r_{jl}^k = 0; \quad i = 1 \dots N; \quad l = 1 \dots m,$$

worin

$$M_{il} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \sum_1^n \frac{\partial f_i}{\partial z^k} p_l^k, \quad P_{ij}^k \equiv \frac{\partial f_i}{\partial p_j^k}$$

gesetzt ist. Diese Gleichungen sollen nun alle parametrischen Ableitungen r_{jl}^k willkürlich lassen; die Anzahl derselben ist

$$(m - \mu)(n - v) + \frac{1}{2}n(m - \mu)(m - \mu - 1),$$

mithin sind genau

$$N' = \mu v + \frac{1}{2}n\mu(\mu - 1),$$

der Relationen (3) eine Consequenz der übrigen, d. h. es verschwinden alle $(mN - N' + 1)$ reihigen, aber nicht alle $(mN - N')$ reihigen Determinanten der zu dem Gleichungssystem (3) gehörigen Matrix, die aus mN Zeilen und $\frac{1}{2}n(m+1)m+1$ Colonnen besteht*).

Offenbar sind auch umgekehrt die so erhaltenen Bedingungsgleichungen mit denjenigen der Nr. 3 völlig äquivalent.

7. Wir stellen in dieser Nr. einige der von Herrn Bourlet veröffentlichten Resultate und Bezeichnungen zusammen**).

Jedes System von linearen partiellen Differentialgleichungen in m unabhängigen Variabeln $x_1 \dots x_m$ und p unbekannten Functionen $u_1 \dots u_p$ kann durch Auflösung nach einer gewissen Zahl von Ableitungen $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ auf eine Form gebracht werden, in der es nur Gleichungen der folgenden Art enthält:

*) Dies folgt auch daraus, dass N' die Anzahl der verschiedenen Identitäten (1) ist.

**) Vgl. die Anmerkung pag. 547.

$$(4) \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = a_{00}^{ik} + \sum_{j=1}^p a_{jk}^{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^m a_{jk}^{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k};$$

die Coefficienten a_{rs}^{ik} sind Functionen der x und u .

Ein solches System heisst *canonisch*; die Variable x_k heisst „*principal*“ oder „*parametrisch*“ in Bezug auf u_i , je nachdem $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ auf der linken Seite einer der Gleichungen (4) auftritt oder nicht, und entsprechend wird auch die Ableitung $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ *principal* oder *parametrisch* genannt;

eine zweite Ableitung $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial u_l}$ wird *parametrisch*, *einfach* oder *doppelt principal* genannt, je nachdem keine, oder eine oder alle beide Variablen x_k, x_l in Bezug auf u_i *principal* sind. Die einfach *principal* 2. Ableitungen können mit Hülfe der Gleichungen, die aus (3) durch partielle Differentiation nach den x folgen, als Linearfunctionen der *parametrischen* 2. Ableitungen dargestellt werden, deren Coefficienten von den x, u und von *parametrischen* 1. Ableitungen abhängen. Für die *doppelt principal* Derivirten erhält man dagegen im allgemeinen zwei verschiedene derartige Darstellungen; sind diese für alle Werthe der x, u und der 1. und 2. *parametrischen* Ableitungen identisch, so heisst das *canonische* System (4) *unbeschränkt integrabel*.

Sind die Coefficienten a_{rs}^{ik} in der Umgebung der Stelle $x_h = x_h^0, u_k = u_k^0$ *holomorph*, und ist φ_i eine *arbiträre* Function der in Bezug auf u_i *parametrischen* Variablen x_h , die an der Stelle $x_j = x_j^0$ *holomorph* ist und den Werth u_i^0 annimmt, so giebt es ein und nur ein System von Functionen u_i der Variablen x_h , die an der Stelle $x_h = x_h^0$ *holomorph* sind, dem *unbeschränkt integrabeln* System (4) *identisch* genügen, und sich resp. auf φ_i *reduciren*, wenn die in Bezug auf u_i *principal* Variablen x_i die Werthe x_i^0 annehmen.

8. Indem wir zu den Bezeichnungen der Nr. 3 zurückkehren, betrachten wir das folgende System linearer partieller Differentialgleichungen 1. O.:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial p_a^b}{\partial x_a} = \psi_{aa}^b, & \frac{\partial p_a^b}{\partial x_a} = \psi_{aa}^b, \\ \frac{\partial p_a^b}{\partial x_i} = \psi_{ai}^b, & \frac{\partial p_i^b}{\partial x_a} = \psi_{ai}^b, \\ \frac{\partial p_g^k}{\partial x_g} = \frac{\partial p_g^k}{\partial x_g}, & \frac{\partial x^k}{\partial x_i} = p_i^k. \quad (i=1\dots m; k=1\dots n) \end{cases}$$

In diesen Gleichungen durchlaufen die Zahlenpaare (a, b) ($a' b$) alle Paare der 1. Classe; für jedes einzelne Werthsystem (a, b) ist

dass sich ferner die Ableitungen

$$\frac{\partial \xi^s}{\partial x_{\mu+s}} \quad (s = 3, 4 \dots m - \mu)$$

für

$$x_{\mu+2} = \bar{x}_{\mu+2} \dots x_{\mu+s-1} = \bar{x}_{\mu+s-1}$$

bez. auf die arbiträren Functionen $\pi_{\mu+s}^i$ reduciren, und überdies ξ^i an der Stelle $\bar{x}$ den Werth $\bar{z}^i$ annimmt; desgleichen giebt es ein einziges System von Functionen $\xi^k (k = \nu + 1 \dots n)$ der Variablen $x_{\mu+1} \dots x_m$, derart, dass:

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial x_{\mu+1}} \equiv \pi_{\mu+1}^k,$$

ferner die Ableitungen

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial x_{\mu+s}} \quad (s = 2, 3 \dots m - \mu)$$

für

$$x_{\mu+1} = \bar{x}_{\mu+1} \dots x_{\mu+s-1} = \bar{x}_{\mu+s-1}$$

bez. in die Ausdrücke $\pi_{\mu+s}^k$ übergehen, endlich ξ^k an der Stelle $\bar{x}$ den Werth $\bar{z}^k$ erhält; umgekehrt sind bei willkürlicher Wahl der Functionen ξ die π_g^k durch obige Bedingungen eindeutig bestimmt; hieraus ergibt sich mit Hülfe der vorigen Nr. das folgende Theorem:

„Es seien $\xi^1 \dots \xi^\nu$ arbiträre Functionen von $x_{\mu+2} \dots x_m$, ferner $\xi^{\nu+1} \dots \xi^n$ ebensolche von $x_{\mu+1} \dots x_m$; für $x_i = \bar{x}_i$ gehe ξ^i in $\bar{z}^i$, $\frac{\partial \xi^h}{\partial x_g}$ in $\bar{p}_g^h$ über. Sind dann die Functionen φ_a^b an der Stelle $\bar{x}, \bar{z}, \bar{p}_g^h$ holomorph, so giebt es ein und nur ein an der Stelle $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m$ reguläres Integralsystem $z^1 \dots z^n$ des Involutionssystems J , von der Beschaffenheit, dass $z^1 \dots z^\nu$ für

$$x_1 = \bar{x}_1 \dots x_{\mu+1} = \bar{x}_{\mu+1}$$

sich bez. auf $\xi^1 \dots \xi^\nu$, ferner $z^{\nu+1} \dots z^n$ für

$$x_1 = \bar{x}_1 \dots x_\mu = \bar{x}_\mu$$

bez. auf $\xi^{\nu+1} \dots \xi^n$ reduciren. Wir nennen das so definirte System $z^1 \dots z^n$ das allgemeine Integral von J , in das sonach $n - \nu$ willkürliche Functionen von $m - \mu$ Argumenten, sowie ν willkürliche Functionen von je $m - \mu - 1$ Argumenten eingehen.“

10. Ein Werthsystem $z^1 \dots z^n, x_1 \dots x_m, p_1^1 \dots p_m^n$ heisst nach Lie ein „Element“; zwei benachbarte Elemente $x + dx, z + dz, p_i^k + dp_i^k$ heissen „vereinigt liegend“, wenn die Relationen

$$(6) \quad dz^k = \sum_1^m p_i^k dx_i$$

erfüllt sind. Eine $m - q$ -fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Elementen, die den totalen Differentialgleichungen (6) identisch genügt,

heisse eine „*Element- M_{m-q}* “. In der vorliegenden Arbeit wollen wir ausdrücklich nur solche Elementmannigfaltigkeiten betrachten, welche durch Gleichungen der Form:

$$(7) \quad \begin{cases} x_s = \xi_s(x_{q+1}, x_{q+2} \dots x_m), & (s = 1 \dots q) \\ z^i = z^i(x_{q+1} \dots x_m), \\ p_i^k = p_i^k(x_{q+1} \dots x_m) \end{cases}$$

definiert werden können, deren zugehörige Punktmannigfaltigkeit also ebenfalls $m - q$ -fach ausgedehnt ist.

Eine *Element- M_{m-q}* , die den Gleichungen (A) identisch genügt, heisse eine „*Integral- M_{m-q}* “ von J . Unter Beibehaltung der Bezeichnungsweise der vorigen Nr. existirt eine und nur eine *Integral- $M_{m-\mu}$* von J , unter deren Definitionsgleichungen die folgenden enthalten sind:

$$(8) \quad x_s = \bar{x}_s \quad (s = 1 \dots \mu); \quad z^k = \xi^k(x_{\mu+1} \dots x_m) \quad (k = \nu + 1 \dots n)$$

und welche der Bedingung genügt, dass sich die Ausdrücke von $z^1 \dots z^\nu$ für $x_{\mu+1} = \bar{x}_{\mu+1}$ bez. auf $\xi^1(x_{\mu+2} \dots x_m)$, $\xi^2 \dots \xi^\nu$ reduciren. Denn das System von ν Gleichungen in den abhängigen Variablen $z^1 \dots z^\nu$ und den Independenten $x_{\mu+1} \dots x_m$, das man erhält, wenn man in den Relationen

$$\frac{\partial z^i}{\partial x_{\mu+1}} = \varphi_{\mu+1}^i \quad (i = 1 \dots \nu)$$

für die x_s und z^k ihre Ausdrücke (8) substituirt, besitzt nach der vor. Nr. ein und nur ein System von Integralen $z^k(x_{\mu+1} \dots x_m)$, das den obigen Festsetzungen entspricht, worauf die noch fehlenden Definitionsgleichungen der gesuchten *Integral- $M_{m-\mu}$* sich unmittelbar aus (A') ergeben, wenn man in die Functionen φ_a^b für $x_1 \dots x_\mu$ $z^1 \dots z^\nu$ die erhaltenen Ausdrücke in $x_{\mu+1} \dots x_m$ einsetzt. Ebenso erhält man durch Integration des „*Theilsystems J_μ* “ (vgl. Nr. 5) eine und nur eine *Integral- $M_{m-\mu+1}$* , welche die soeben bestimmte *$M_{m-\mu}$* umfasst; ferner durch Integration des Systems von Gleichungen, aus denen die Theilsysteme $J_{\mu-1}$, J_μ bestehen, eine ganz bestimmte *Integral- $M_{m-\mu+2}$* etc. Man erkennt so, dass durch die zuerst gefundene *Integral- $M_{m-\mu}$* successive eine ganz bestimmte Serie von Integralmannigfaltigkeiten $M_{m-\mu+1} \dots M_m$ festgelegt ist, deren jede die vorhergehende ganz in sich enthält.

Der Fall, dass die ersten μ Definitionsgleichungen der Ausgangs- *$M_{m-\mu}$* die allgemeinere Form

$$x_s = \xi_s(x_{\mu+1} \dots x_m) \quad (s = 1 \dots \mu)$$

besitzen, wird auf den vorhergehenden zurückgeführt, indem man vermöge der Gleichungen:

$$\begin{aligned} X_s - \bar{X}_s &= x_s - \xi_s, \quad s = 1 \dots \mu; \\ X_t - \bar{X}_t &= x_t - \bar{x}_t, \quad t = \mu + 1 \dots m, \end{aligned}$$

neue unabhängige Veränderliche $X_1 \dots X_m$ einführt, wodurch weder die Involutionseigenschaft noch die Gestalt der Gleichungen (A') geändert wird.

Die allgemeinste Integral- $M_{m-\mu}$ der Form (7) ergibt sich somit durch Integration eines Hilffssystems von ν Gleichungen in ν abhängigen und $m - \mu$ unabhängigen Variablen, im Falle $\nu = 0$ also ohne jede Integration; die allgemeinste Integral- $M_{m-\mu+s}$ von J durch Integration eines Involutionssystems, bestehend aus $N - sn$ Gleichungen in n abhängigen und $m - \mu + s$ unabhängigen Veränderlichen.

11. Führt man in das System (A') vermöge der Mayer'schen Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} (9) \quad x_2 &= \bar{x}_2 + y_1 y_2 \dots x_\mu = \bar{x}_\mu + y_1 y_\mu, \\ x_1 &= \bar{x}_1 + y_1, \quad x_{\mu+1} = \bar{x}_{\mu+1} + y_{\mu+1} \dots x_m = \bar{x}_m + y_m \end{aligned}$$

neue Independenten $y_1 \dots y_m$ ein, und wird:

$$\frac{\partial z^k}{\partial y_i} = q_i^k, \quad \psi_a^b \equiv \varphi_a^b(\bar{x}_1 + y_1, \bar{x}_2 + y_1 y_2 \dots z^1, \dots z^n, p_g^k)$$

gesetzt, so geht das System (A') über in das folgende:

$$\begin{aligned} (A'') \quad & \begin{cases} -q_1^b + \psi_1^b + y_2 \psi_2^b + \dots y_\mu \psi_\mu^b = 0, & b = 1 \dots n; \\ -q_{\mu+1}^c + \psi_{\mu+1}^c = 0, & c = 1 \dots \nu; \\ -q_k^b + y_k \psi_k^b = 0, & k = 2, 3 \dots \mu; \quad b = 1 \dots n. \end{cases} \end{aligned}$$

Die $n + \nu$ Gleichungen (A'') bilden nun für sich genommen ein Involutionssystem J_0 in den unabhängigen Variablen $y_1, y_{\mu+1}, y_{\mu+2}, \dots y_m$, und zwar für beliebige Werthe der als Parameter zu betrachtenden Grössen $y_2 \dots y_\mu$. In der That: die Relationen (C) (C') der Nr. 3 bestehen der Annahme nach für alle Werthe der Variablen x, z, p_g^k , also auch, wenn man die x durch ihre Ausdrücke (9), die p_g^k durch q_g^k ersetzt. Wir fassen nun nach erfolgter Substitution eine bestimmte der Relationen (C) oder (C') ins Auge, lassen darin a successive die Werthe $1, 2 \dots \mu$ annehmen, multipliciren die so erhaltenen, den Indices $a = 2, 3 \dots \mu$ entsprechenden Gleichungen bez. mit $y_2 \dots y_\mu$ und addiren sie zu der dem Index $a = 1$ entsprechenden Gleichung; verfahren wir analog mit allen Beziehungen (C) (C'), so erhalten wir gerade die Bedingungen dafür, dass die Gleichungen (A'') ein Involutionssystem darstellen. Nach Nr. 3 besitzen dieselben also ein und nur ein Integral $z_0^1(y_1 \dots y_m) \dots z_0^\nu(y_1 \dots y_m)$ von der Beschaffenheit, dass $z_0^s(s = 1 \dots \nu)$ für $y_1 = 0, y_{\mu+1} = 0$ in den arbiträren

Ausdruck $\xi^i(\bar{x}_{\mu+2} + y_{\mu+2}, \dots, \bar{x}_m + y_m)$ übergeht, während sich die Functionen $z_0^i(t = \nu + 1 \dots n)$ für $y_1 = 0$ bzw. auf die willkürlichen Functionen $\xi^i(\bar{x}_{\mu+1} + y_{\mu+1}, \dots, \bar{x}_m + y_m)$ reduciren. Ersetzt man in den z_0^i , welche die Parameter $y_2 \dots y_\mu$ augenscheinlich nur in den Verbindungen $y_1 y_2, \dots, y_1 y_\mu$ enthalten, die y_i durch ihre aus (9) folgenden Ausdrücke, so erhält man gerade wieder die in Nr. 9 definirten Integralfunctionen $z^1 \dots z^n$ des gegebenen Systems J .

Die Integration von J kann sonach auf diejenige eines Involutionssystems J_0 von $n + \nu$ Gleichungen in n abhängigen und $m - \mu + 1$ unabhängigen Variablen zurückgeführt werden.

Capitel II.

Die charakteristische Matrix.

12. Indem wir die Bezeichnungen und Voraussetzungen des vorigen Capitels beibehalten, schreiben wir

$$L_i^k \equiv \sum_1^m P_{is}^k \lambda_s \quad (\text{vgl. Nr. 6}),$$

worin $\lambda_1 \dots \lambda_m$ unbestimmte Grössen bedeuten. Das rechteckige Schema

$$(D) \quad \left\| \begin{array}{c} L_1^1, L_2^1 \dots L_N^1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ L_1^n, L_2^n \dots L_N^n \end{array} \right\|$$

werde die „charakteristische Matrix“ des Involutionssystems J genannt. Wir wollen nunmehr folgendes Theorem beweisen:

„Bedeutend die Grössen x, z, p_i^k irgend welche den Relationen (A) genügende Constanten, und interpretirt man die Variablen $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m$ als homogene Punktcoordinaten eines $m - 1$ -fach ausgedehnten Raums, so stellen die Gleichungen, die man durch Nullsetzen aller n -reihigen Determinanten der charakteristischen Matrix (D) erhält, eine $m - \mu - 1$ -fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit M der Ordnung $n - \nu$ dar“, mit andern Worten: „Zu jedem beliebig gewählten System von Werthen $\lambda_{\mu+1}, \lambda_{\mu+2} \dots \lambda_m$ giebt es $n - \nu$ Werthsysteme der Variablen $\lambda_1 \dots \lambda_\mu$, welche alle n -reihigen Determinanten von (D) annulliren“.

13. Für die aufgelöste Form (A') von J hat die charakteristische Matrix folgende Gestalt

$$(D) \quad \left\| \begin{array}{c} L_1^{11} \dots L_1^{n1}, L_2^{11} \dots L_\mu^{n1}, L_{\mu+1}^{11} \dots L_{\mu+1}^{n1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ L_1^{1n} \dots L_1^{nn}, L_2^{1n} \dots L_\mu^{nn}, L_{\mu+1}^{1n} \dots L_{\mu+1}^{nn} \end{array} \right\|,$$

worin gesetzt ist:

$$L_a^{bj} \equiv \lambda_a \delta_{bj} + \sum_{\mu+2}^m \lambda_s P_{as}^{bj}, \quad j = 1, 2 \dots v,$$

$$L_a^{bh} \equiv \lambda_a \delta_{bh} + \sum_{\mu+2}^m \lambda_s P_{as}^{bh}, \quad h = v+1 \dots n$$

$$(\delta_{ik} = 0, \delta_{ii} = -1).$$

Substituiren wir nun in die Relationen (A) für die p_a^b ihre aus (A') folgenden Werthe und differentiiren die erhaltenen Identitäten nach p_g^h , so kommt:

$$\sum_{a,b} P_{ia}^b P_{ag}^{bh} + P_{ig}^h = 0,$$

woraus sofort folgt:

$$L_i^k \equiv \sum_{a,b} P_{ia}^b L_a^{bk} \quad (i = 1 \dots N, k = 1 \dots n).$$

Umgekehrt lassen sich die nN Grössen L_a^{bk} linear durch die L_i^k darstellen, da die N -reihige Determinante:

$$(1) \quad \left\| \begin{array}{cccc} P_{11}^1 \dots P_{11}^n, & P_{12}^1 \dots P_{1\mu}^n, & P_{1,\mu+1}^1 \dots P_{1,\mu+1}^v \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{N1}^1 \dots P_{N1}^n, & P_{N2}^1 \dots P_{N\mu}^n, & P_{N,\mu+1}^1 \dots P_{N,\mu+1}^v \end{array} \right\|$$

der Annahme nach vermöge (A) nicht Null ist. Die n -reihigen Determinanten der Matrices (D) (D') verschwinden also bez. für dieselben Werthe der λ_s , wenn das Element x, z, p_i^k innerhalb der durch (A) definirten Mannigfaltigkeit beliebig gewählt ist, und es genügt somit, das Theorem der vorigen Nr. für die Matrix (D') zu erweisen.

14. Wir betrachten die folgenden beiden Matrices, von denen die erste einen Bestandtheil von (D') bildet:

$$(\alpha) \quad \left\| \begin{array}{cccc} L_a^{11} \dots L_a^{n1}, & L_{\mu+1}^{11} \dots L_{\mu+1}^{v1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_a^{1n} \dots L_a^{nn}, & L_{\mu+1}^{1n} \dots L_{\mu+1}^{vn} \end{array} \right\|,$$

$$(\beta) \quad \left\| \begin{array}{cccc} L_{\mu+1}^{11} \dots L_{\mu+1}^{1n}, & \Theta_a^{11} \dots \Theta_a^{1v} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{\mu+1}^{v1} \dots L_{\mu+1}^{vn}, & \Theta_a^{v1} \dots \Theta_a^{vv} \end{array} \right\|$$

hierin ist

$$\Theta_a^{ik} \equiv -L_a^{ik} + \sum_{\mu+2}^m \lambda_s K_{\mu+1,as}^{ik}$$

gesetzt, die Grössen $K_{\mu+1, a_s}^{ik}$ haben die in Nr. 3 erklärte Bedeutung; unter a ist eine beliebige Zahl der Reihe $1 \dots \mu$ zu verstehen. Die Relationen (C) der Nr. 3 drücken aus, dass für beliebige Werthe der λ_i und für alle Indices $h = 1, 2, \dots n$; $l = 1, 2, \dots \nu$ die folgende Identität besteht:

$$\sum_1^n L_a^{sh} L_{\mu+1}^{ls} + \sum_1^\nu L_{\mu+1}^{lh} \Theta_a^{ls} \equiv 0,$$

d. h. also, dass die beiden Matrices (α) (β) für jedes Werthsystem der λ einander *correspondiren**). Eine beliebige n -reihige Determinante des Schema's (α) ist demnach bis auf das Zeichen identisch gleich dem Product einer Function K_a der Variabeln λ in die complementäre ν -reihige Determinante von (β) . Aber die ganz-rationalen homogenen Functionen der λ , welche durch die ν -reihigen Determinanten von (β) dargestellt werden, besitzen keinen gemeinsamen, von den λ_i abhängigen Factor, da die beiden Determinanten, welche aus den ersten, resp. letzten ν Columnen von (β) bestehen, von λ_a bzw. $\lambda_{\mu+1}$ frei sind, und resp. die Glieder $(-\lambda_{\mu+1})^\nu$, $(-\lambda_a)^\nu$ enthalten. *Der gemeinschaftliche Factor K_a aller n -reihigen Determinanten von (α) ist demnach ein ganzrationaler homogener Ausdruck $n - \nu$ Grades in $\lambda_a, \lambda_{\mu+1}, \lambda_{\mu+2} \dots \lambda_m$, der augenscheinlich das Glied $(-\lambda_a)^{n-\nu}$ enthält, und dessen Coefficienten in den Grössen P_{ag}^{bh} rational sind.*

15. Durch die erhaltenen Resultate ist unser Theorem im Falle $\mu = 1$ bereits bewiesen. In diesem Falle nämlich ist das Verschwinden aller n -reihigen Determinanten von (α) äquivalent mit einer einzigen ganzrationalen homogenen Gleichung $n - \nu$ Grades in $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$:

$$(2) \quad K(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m) = 0.$$

Wir wollen die Form K gelegentlich als die „*charakteristische Form*“ des Involutionssystems J ($\mu=1$) bezeichnen.

Diese Thatsache lässt sich auch unmittelbar aus den Bemerkungen der Nr. 6 erschliessen. Darnach existiren nämlich $N' = \nu$ linear unabhängige Systeme von je mN Functionen α_{il}^s ($s = 1 \dots \nu$) der Grössen x, z, p_i^k von der Beschaffenheit, dass für beliebige Werthe der zweiten Ableitungen r_{ij}^k die Identitäten stattfinden:

$$(3) \quad \sum_1^N \sum_1^m \alpha_{il}^s f_{il} = 0 \quad (s = 1 \dots \nu)$$

Hieraus folgen die Beziehungen:

*) Vgl. z. B. Gordan-Kerschensteiner, Vorlesungen über Invariantentheorie I Leipzig 1885. pag. 94 ff.

$$(4) \quad \sum_1^N \sum_1^m \alpha_{il}^s M_{il} \equiv 0, \quad \sum_1^N \alpha_{ij}^s P_{il}^k + \sum_1^N \alpha_{il}^s P_{ij}^k \equiv 0$$

$$(l, j = 1 \dots m; k = 1 \dots n).$$

Setzt man demnach

$$\pi_i^s \equiv \lambda_1 \alpha_{i1}^s + \lambda_2 \alpha_{i2}^s + \dots + \lambda_m \alpha_{im}^s,$$

so hat man für $s = 1 \dots v$, $k = 1 \dots n$ die Identität

$$\sum \pi_i^s L_i^k \equiv 0,$$

d. h. die Matrix der Ausdrücke π_i^s ist zu (D) correspondirend, woraus das Theorem der Nr. 12 für den Fall $\mu = 1$ wie oben gefolgert wird.

16. Wir wenden uns nun zu dem allgemeinen Fall $\mu > 1$. Da sich unter den Definitionsgleichungen der im Theorem genannten Mannigfaltigkeit M die μ Gleichungen

$$(5) \quad K_1 = 0, K_2 = 0 \dots K_\mu = 0$$

vorfinden, so ist die Dimensionszahl von M sicher $\leq m - \mu - 1$; erreicht sie diese Zahl und ist r die Ordnung von M , so dass bei beliebigen Werthen von $\lambda_{\mu+1} \dots \lambda_m$ die ev. theilweise coincidirenden r Werthsysteme $\lambda_1^{(s)} \dots \lambda_\mu^{(s)}$ ($s = 1 \dots r$) alle n -reihigen Determinanten von (D'), also auch von (D) annulliren, so ist der in den $\lambda_a, \lambda_{\mu+1} \dots \lambda_m$ ganzrationale homogene Ausdruck

$$\prod_{s=1}^r (-\lambda_a + \lambda_a^{(s)})$$

augenscheinlich als Factor in K_a enthalten, also ist $r \leq n - v$.

17. Um den Beweis für $\mu > 1$ zu Ende zu führen, verstehen wir unter a' eine von a verschiedene Zahl der Reihe $1 \dots \mu$ und setzen:

$$H_{aa'}^{bk} \equiv \sum_{\mu+2}^m \lambda_s (K_{aa's}^{bk} - K_{a'sa}^{bk});$$

dann sagen die Relationen (B) der Nr. 3 aus, dass für beliebige λ und alle Indicespaare $p, q = 1 \dots n$ die Identität

$$0 \equiv \sum_1^n (-L_a^{sp} L_a^{qs} + L_a^{sq} L_a^{ps})$$

$$+ \sum_1^v L_{\mu+1}^{ip} H_{aa'}^{qi}$$

stattfindet. Hieraus und aus den Entwicklungen der Nr. 14 ergibt sich, dass die folgenden beiden Matrices:

$$\begin{aligned}
 (\gamma) \quad & \left\| \begin{array}{cccc} L_a^{11} & \dots & L_a^{n1} & , & L_{a'}^{11} & \dots & L_{a'}^{n1} & , & L_{\mu+1}^{11} & \dots & L_{\mu+1}^{v1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_a^{1n} & \dots & L_a^{nn} & , & L_{a'}^{1n} & \dots & L_{a'}^{nn} & , & L_{\mu+1}^{1n} & \dots & L_{\mu+1}^{vn} \end{array} \right\| , \\
 (\delta) \quad & \left\| \begin{array}{cccc} -L_{a'}^{11} & \dots & -L_{a'}^{1n} & , & L_a^{11} & \dots & L_a^{1n} & , & H_{aa'}^{11} & \dots & H_{aa'}^{1v} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -L_{a'}^{n1} & \dots & -L_{a'}^{nn} & , & L_a^{n1} & \dots & L_a^{nn} & , & H_{aa'}^{n1} & \dots & H_{aa'}^{nv} \\ L_{\mu+1}^{11} & \dots & L_{\mu+1}^{1n} & , & 0 & \dots & 0 & , & \Theta_a^{11} & \dots & \Theta_a^{1v} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{\mu+1}^{v1} & \dots & L_{\mu+1}^{vn} & , & 0 & \dots & 0 & , & \Theta_a^{v1} & \dots & \Theta_a^{vv} \end{array} \right\|
 \end{aligned}$$

für beliebige λ einander correspondiren, und zwar ist jede $n + v$ -reihige Determinante von (δ) bis aufs Zeichen identisch gleich der zu ihr complementären n -reihigen Determinante von (γ) multiplicirt mit der Determinante

$$(\delta) \quad |\Theta_a^{ik}| \quad i, k = 1, 2 \dots v$$

18. Wir machen nun für den Augenblick die Annahme, dass wenigstens eine der μ Gleichungen

$$(7) \quad \Delta_a \equiv \begin{vmatrix} L_a^{11} & \dots & L_a^{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ L_a^{1n} & \dots & L_a^{nn} \end{vmatrix} = 0$$

nicht für beliebige Werthe $\lambda_{\mu+1} \dots \lambda_m$ mehrfach zählende Wurzeln λ_a besitze; dass diese Voraussetzung „im Allgemeinen“ zutrifft, folgt schon daraus, dass sich aus den Bedingungen (B), (C) der Nr. 3 für die Coefficienten eines einzelnen Schemas Δ_a keine Relationen ableiten lassen.

Es genüge also die dem Index a entsprechende Gleichung (7) der genannten Bedingung; substituiren wir nun in die Relation

$$K_a = 0$$

für $\lambda_{\mu+1} \dots \lambda_m$ beliebige Constante $\lambda_{\mu+1}^0 \dots \lambda_m^0$ und bezeichnen wir mit λ_a^0 irgend eine der $n - v$ Wurzeln der so erhaltenen algebraischen Gleichung für λ_a , so dürfen wir nach dem eben gesagten annehmen, dass für die Werthe $\lambda_a^0, \lambda_{\mu+1}^0 \dots \lambda_m^0$ nicht alle ersten Hauptunterdeterminanten von Δ_a verschwinden; es sei etwa der zum Element L_a^{11} gehörige Minor nicht null. Ist jetzt (α') die Matrix, die aus (α) entsteht, wenn man ihr die $n + 1^{\text{te}}$ Colonne von (γ) hinzufügt, so verschwinden alle n -reihigen Determinanten von (α') , wenn man $\lambda_a, \lambda_{\mu+1} \dots \lambda_m$ resp. durch $\lambda_a^0, \lambda_{\mu+1}^0 \dots \lambda_m^0$ und $\lambda_{a'}$ durch einen Werth $\lambda_{a'}^0$ ersetzt, der sich durch $\lambda_a^0 \dots \lambda_m^0$ rational darstellen lässt. Nach dem

Ergebniss der vor. Nummer verschwinden nun für die genannten Werthe der λ auch alle $n + \nu$ -reihigen Determinanten von (δ) , welche zu den (auch in (γ) enthaltenen) Determinanten von (α') bezw. complementär sind, d. h. die $n + 2^{\text{te}}$, $n + 3^{\text{te}}$... $2n^{\text{te}}$ Colonne miteinander gemein haben, mithin, da unter den $n - 1$ -reihigen aus diesen Columnen gebildeten Determinanten auch der oben genannte nicht verschwindende Minor von Δ_a sich vorfindet, *überhaupt alle $n + \nu$ -reihigen Determinanten von (δ)* . Aber die Determinante (6) ist für das wiederholt genannte Werthsystem der λ von Null verschieden, da sonst wegen:

$$\Delta_a \equiv K_a \cdot |\Theta_a^{ik}|$$

die Gleichung (7) für $\lambda_{\mu+1} = \lambda_{\mu+1}^0 \dots \lambda_m = \lambda_m^0$ entgegen unserer Voraussetzung die *mehrfach* zählende Wurzel λ_a^0 besässe; *es giebt also nach Nr. 17 zu jedem beliebigen System von Constanten $\lambda_{\mu+1}^0 \dots \lambda_m^0$ $n - \nu$ verschiedene Werthepaare λ_a^0, λ_a^0 von der Beschaffenheit, dass diese Werthe der λ alle n -reihigen Determinanten von (γ) annulliren*. Lässt man nun den Index a' alle Zahlen $1 \dots \mu$ mit Ausnahme von a durchlaufen, so folgt die Richtigkeit unseres Theorems unter den zu Anfang dieser Nr. gemachten Voraussetzungen.

18. Besitzen alle μ Gleichungen (7) für beliebige Werthe von $\lambda_{\mu+1} \dots \lambda_m'$ mehrfach zählende Wurzeln, so denken wir uns die Constanten $P_{ag}^{b\delta}$ unendlich wenig derart variirt, dass diese Besonderheit nicht mehr stattfindet, die Bedingungen (B), (C) der Nr. 3 aber nach wie vor erfüllt sind. Für die charakteristische Matrix, die mit Hülfe der variirten Grössen $P_{ag}^{b\delta}$ gebildet wird, gilt nun das Theorem der Nr. 12; durch Rückübergang ergiebt sich sofort, dass die Dimensions- und Ordnungszahl der zur ursprünglichen Matrix gehörigen Punktmannigfaltigkeit M nicht kleiner sind als bezw. $m - \mu - 1$ und $n - \nu$, also nach Nr. 16 mit diesen Zahlen übereinstimmen, vorausgesetzt, dass eventuell irreducible $m - \mu - 1$ -fach ausgedehnte Bestandtheile von M mit geeigneter Vielfachheit in Rechnung gezogen werden.

19. Wir schreiben

$$\Omega_{ij}^k \equiv \lambda_1 P_{i1}^k + \lambda_2 P_{i2}^k + \dots + \lambda_\mu P_{i\mu}^k + \lambda_j P_{ij}^k$$

und bilden die $m - \mu$ Matrices:

$$(E_j) \quad \left\| \begin{array}{cccc} \Omega_{1j}^1 & \Omega_{1j}^2 & \dots & \Omega_{1j}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Omega_{Nj}^1 & \Omega_{Nj}^2 & \dots & \Omega_{Nj}^n \end{array} \right\|, \\ j = \mu + 1 \dots m.$$

deren n -reihige Determinanten nach dem Theorem der Nr. 12 resp. für $n - \nu$ im allgemeinen verschiedene Werthsysteme

$$(6) \quad \Lambda_{1j}^{(\kappa)}, \Lambda_{2j}^{(\kappa)} \dots \Lambda_{\mu j}^{(\kappa)} \quad (\kappa = 1, 2 \dots n - \nu)$$

der Verhältnisse:

$$- \lambda_1 : \lambda_j, - \lambda_2 : \lambda_j, \dots - \lambda_\mu : \lambda_j$$

sämmtlich verschwinden. Es sei nun (E) die aus N Zeilen und $(m - \mu)n$ Columnen bestehende Matrix, die durch Nebeneinanderstellung der $m - \mu$ Schemata $(E_{\mu+1}) \dots (E_m)$ erhalten wird. Wir nehmen für den Augenblick an, dass alle n -reihigen Determinanten von (E) verschwinden, wenn in jedem der Theilschemata (E_j) die Verhältnisse

$$- \lambda_1 : \lambda_j \dots - \lambda_\mu : \lambda_j$$

resp. durch die Grössen (6) ersetzt werden, vorausgesetzt, dass der Index (κ) in allen Theilschematen gleich gewählt wird und der Reihe nach die Werthe $1, 2, \dots, n - \nu$ annimmt. Durch diese Voraussetzung legen wir den Grössen P_{ij}^k natürlich eine Serie neuer algebraischer Bedingungen auf. Sind diese erfüllt, so zerfällt die Punktmannigfaltigkeit M der Nr. 22 in $n - \nu$ lineare $m - \mu - 1$ -fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeiten, die bez. durch die Gleichungen:

$$(7) \quad \lambda_1 + \sum_{\mu+1}^m \Lambda_{1j}^{(\kappa)} \lambda_j = 0 \dots \lambda_\mu + \sum_{\mu+1}^m \Lambda_{\mu j}^{(\kappa)} \lambda_j = 0; \quad \kappa = 1 \dots n - \nu$$

definiert werden; in der That folgt aus unseren Voraussetzungen sofort, dass alle n -reihigen Determinanten von (D) für beliebige Werthe der Variablen $\lambda_{\mu+1}, \lambda_{\mu+2} \dots \lambda_\mu$ verschwinden, wenn man für $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$ ihre aus (7) hervorgehenden Werthe substituirt. *)

Im Falle $\mu = 1$ zerfällt also unter den gemachten Annahmen die charakteristische Form K in $n - \nu$ lineare Factoren, d. h. man hat identisch:

$$K \equiv \pm \Lambda_1 \Lambda_2 \dots \Lambda_{n-\nu},$$

$$\Lambda_\kappa \equiv \lambda_1 + \Lambda_2^{(\kappa)} \lambda_2 + \Lambda_3^{(\kappa)} \lambda_3 + \dots + \Lambda_m^{(\kappa)} \lambda_m;$$

hierin bedeuten $\Lambda_2^{(1)} \dots \Lambda_s^{(n-\nu)}$ die Werthe des Verhältnisses $-\lambda_1 : \lambda_s$, welche die Form K annulliren, nachdem man darin alle λ_i mit Ausnahme von λ_1 und λ_s durch Null ersetzt hat.

Capitel III.

Die Charakteristiken.

20. Durch ein System von Gleichungen zwischen den Grössen x, z, p_i^k , welches $x_m, z^1 \dots z^n, p_1^1 \dots p_m^n$ als Functionen der Variablen $x_1, x_2 \dots x_{m-1}$ auszudrücken gestattet, sei eine beliebige Integralmannigfaltigkeit M_{m-1} des gegebenen Involutionssystems J definiert

*) Das Theorem lässt sich nicht umkehren.

(vgl. Nr. 10). Die genannten Functionen von $x_1 \dots x_{m-1}$ genügen dann den aus den Relationen

$$(1) \quad dz^k = p_1^k dx_1 + \dots + p_m^k dx_m$$

hervorgehenden Differentialgleichungen:

$$(2) \quad \frac{\partial z^k}{\partial x_l} - p_m^k \frac{\partial x_m}{\partial x_l} - p_l^k = 0; \quad k = 1 \dots n; \quad l = 1, \dots, m-1.$$

Da nach Nr. 10 durch eine beliebige Integral- M_{m-1} von J im Allgemeinen eine und nur eine Integral- M_m hindurchgeht*), so ist durch jedes Element x, z, p^k unserer M_{m-1} ein einziges System von Werthen r_{ij}^k definirt, welche den Gleichungen

$$(3) \quad f_{il} = 0 \quad (\text{vgl. Nr. 6})$$

sowie den aus den Beziehungen

$$(4) \quad dp_i^k = r_{i1}^k dx_1 + \dots + r_{im}^k dx_m$$

folgenden Relationen:

$$(5) \quad \frac{\partial p_i^k}{\partial x_j} - r_{im}^k \frac{\partial x_m}{\partial x_j} - r_{ij}^k = 0;$$

$$j = 1 \dots m-1; \quad l = 1 \dots m; \quad k = 1 \dots n,$$

Genüge leisten. Durch Elimination der r_{ij}^k folgen hieraus, beiläufig bemerkt, die für jede Element- M_{m-1} gültigen Beziehungen:

$$(6) \quad \frac{\partial p_i^k}{\partial x_j} - \frac{\partial p_j^k}{\partial x_i} + \frac{\partial p_m^k}{\partial x_j} \frac{\partial x_m}{\partial x_i} - \frac{\partial p_m^k}{\partial x_i} \frac{\partial x_m}{\partial x_j} = 0$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, m-1; \quad k = 1 \dots n),$$

die sich übrigens auch leicht aus (2) ableiten lassen.

21. Aus den Combinationen

$$f_{il} + \frac{\partial x_m}{\partial x_l} f_{im} = 0 \quad (l = 1 \dots m-1, \quad i = 1 \dots n)$$

fallen die Grössen r_{ij}^k vermöge (5) heraus, und es folgen die Beziehungen

$$(7) \quad M_{il} + \frac{\partial x_m}{\partial x_l} M_{im} + \sum_1^n \sum_1^m P_{is}^k \frac{\partial p_s^k}{\partial x_l} = 0,$$

die natürlich für jede Integral- M_{m-1} von J identisch erfüllt sind. Um die r_{ij}^k aus (3) und (5) zu berechnen, genügt es sonach, die Relationen

$$f_{1m} = 0, f_{2m} = 0 \dots f_{nm} = 0$$

zu betrachten, aus denen vermöge (5) für die Ableitungen r_{mm}^k das folgende Gleichungssystem hervorgeht:

*) Wobei allerdings vorausgesetzt wird, dass die Relation, die x_m als Function von $x_1 \dots x_{m-1}$ darstellt, nach x_1 auflösbar sei.

$$(8) \quad M_{im} + \sum_1^N \sum_1^{m-1} P_{is}^k \frac{\partial P_m^k}{\partial x_s} - \sum_1^N \Pi_i^k r_{m,m}^k = 0$$

$$(i = 1, 2 \dots N).$$

Hierin ist

$$\Pi_i^k \equiv -P_{im}^k + \sum_1^{m-1} P_{ij}^k \frac{\partial x_m}{\partial x_j}$$

gesetzt. Nach dem oben gesagten lassen sich die Unbekannten $r_{m,m}^k$ hieraus eindeutig bestimmen, worauf die übrigen Ableitungen r_{ij}^k mit Hilfe von (5) ermittelt werden.

Nennen wir ein Werthsystem x, z, p_r^*, r_{ij}^k ein „*Element 2. Ordnung*“, welches das *Element 1. Ordnung* x, z, p_r^* „*enthält*“, so können wir sagen: zu jedem *Element 1. O. der betrachteten Integral- M_{m-1}* gehört ein und nur ein *Element 2. O.*, das jenes *Element 1. O. und alle ∞^{m-2} dazu benachbarten Elemente von M_{m-1} enthält, und den Relationen (3) Genüge leistet.*

Es existiren im Allgemeinen zu jedem Werthsystem x, z, p_i^k unserer *Integral- M_{m-1}* $N - n$ linear unabhängige Lösungssysteme

$$l_{1,s}, l_{2,s} \dots l_{N,s} \quad (s = 1 \dots N - n)$$

der linearen Gleichungen in den Unbekannten l_i :

$$(9) \quad \sum l_i \Pi_i^k = 0 \quad (k = 1 \dots n),$$

und es ergibt sich somit, dass jede beliebige *Integral- M_{m-1}* der betrachteten Art auch die aus (8) folgenden $N - n$ Relationen

$$(10) \quad \sum_1^N \left(M_{im} + \sum_1^N \sum_1^{m-1} P_{is}^k \frac{\partial P_m^k}{\partial x_s} \right) l_{i,s} = 0$$

erfüllen muss.

22. Anders verhält sich die Sache, wenn für alle Elemente x, z, p_i^k der betrachteten *Integral- M_{m-1}* die sämtlichen n -reihigen Determinanten der aus den Grössen Π_i^k gebildeten Matrix verschwinden, was wir durch die symbolische Gleichung:

$$(11) \quad \|\Pi_i^k\| = 0$$

anduten wollen. Die Relationen (3) und (5) reichen jetzt zur Bestimmung der Unbekannten r_{ij}^k nicht mehr hin. Sollen die Gleichungen (8) überhaupt von endlichen Werthsystemen der r_{ij}^k befriedigt werden, so müssen auch alle Relationen (10), deren Anzahl nunmehr $> N - n$ ist, für die Elemente unserer M_{m-1} erfüllt sein. Eine derartige M_{m-1} heisse eine *$m - 1$ -fach ausgedehnte charakteristische Mannigfaltigkeit oder Charakteristik des Involutionssystems J* und werde generell mit C_{m-1} bezeichnet.

Eine C_{m-1} ist demnach dadurch gekennzeichnet, dass es unbegrenzt viele Elemente 2. Ordnung gibt, welche ein beliebiges Element 1. O. von C_{m-1} , sowie alle dazu benachbarten enthalten und den Beziehungen (3) genügen.

23. Es erhebt sich vor allem die Frage, ob Charakteristiken C_{m-1} für ein beliebig gegebenes Involutionssystem J überhaupt existiren. Wir machen zunächst die Annahme $\mu = 1$. Nach den Ergebnissen der Nr. 15 sind dann die Bedingungen (11) äquivalent mit der einen Gleichung:

$$(12) \quad K \left(\frac{\partial x_m}{\partial x_1}, \frac{\partial x_m}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial x_m}{\partial x_{m-1}}, -1 \right) = 0.$$

Drücken wir hierin mit Hülfe der Definitionsgleichungen einer beliebigen Integral- M_m von J die Grössen z, p_i^k als Functionen von $x_1 \dots x_m$ aus, so ergibt sich eine partielle Differentialgleichung I. O. mit der unbekannten Function x_m und der Independenten $x_1 \dots x_{m-1}$. Sind die x_i cartesische Punktcoordinaten eines R_m , so sind dem Grade $n - \nu$ der Gleichung (12) entsprechend nach bekannten Sätzen durch eine im R_m beliebig gewählte Punktmannigfaltigkeit π von $m - 2$ Dimensionen $n - \nu$ sie enthaltende Zweige

$$(13) \quad x_m = \psi_i(x_1 \dots x_{m-1}) \quad i = 1 \dots n - \nu$$

einer $m - 1$ -dimensionalen Integralmannigfaltigkeit von (12) festgelegt; dieselbe projicirt sich auf die oben betrachtete Integral- M_m von J offenbar als eine Charakteristik, d. h. jede der Relationen (13) stellt zusammen mit den Definitionsgleichungen von M_m , die z, p_i^k als Functionen der x bestimmen, eine C_{m-1} von J dar. Da sich ebenso die Mannigfaltigkeit π als beliebige $m - 2$ -dimensionale Mannigfaltigkeit auf M_m projicirt, so haben wir das Theorem:

„Im Falle $\mu = 1$ gehen durch eine beliebige $m - 2$ -fach ausgedehnte Elementenmannigfaltigkeit, die auf einer Integral- M_m des Involutionssystems J verläuft, im allgemeinen $n - \nu$ vollständig bestimmte Zweige einer ganz auf M_m enthaltenen Charakteristik C_{m-1} hindurch.“

24. Ist $\mu > 1$, so sind die Relationen (11) mit μ verschiedenen partiellen Differentialgleichungen für x_m äquivalent. Auf die Frage, ob diese Gleichungen gemeinsame Integrale besitzen, gehen wir an dieser Stelle nicht näher ein.

25. Es ist leicht, die Entwicklungen der Nrn. 22 und 23 zu verallgemeinern. Betrachten wir zunächst, falls $m > 2$, eine Integral- M_{m-2} von J , die auf irgend einer Integral- M_m verlaufen möge, und durch deren Definitionsgleichungen die Grössen x_{m-1}, x_m, z, p als Functionen der Variabeln $x_1, x_2, \dots, x_{m-2}$ dargestellt seien. Aus den Relationen (3) und

$$\frac{\partial p_i^k}{\partial x_j} - r_{i,m-1}^k \frac{\partial x_{m-1}}{\partial x_j} - r_{i,m}^k \frac{\partial x_m}{\partial x_j} - r_{i,j}^k = 0$$

ergeben sich sofort die folgenden:

$$(14) \quad M_{i,l} + \frac{\partial x_{m-1}}{\partial x_i} M_{i,m-1} + \frac{\partial x_m}{\partial x_i} M_{i,m} + \sum_1^n \sum_1^m P_{i,s}^k \frac{\partial p_s^k}{\partial x_i} = 0$$

$$(l = 1, 2 \dots m-2),$$

welche für ein Integral- M_{m-2} eo ipso erfüllt sind, ferner noch die Beziehungen:

$$(15) \quad M_{i,m-1} + \sum_1^n \sum_1^{m-2} P_{i,s}^k \frac{\partial p_{m-1}^k}{\partial x_s} = \sum_1^n \Phi_i^k r_{m-1,m-1}^k + \sum_1^n \Psi_i^k r_{m-1,m}^k,$$

$$(16) \quad M_{i,m} + \sum_1^n \sum_1^{m-2} P_{i,s}^k \frac{\partial p_m^k}{\partial x_s} = \sum_1^n \Phi_i^k r_{m-1,m}^k + \sum_1^n \Psi_i^k r_{m,m}^k,$$

worin

$$\Phi_i^k \equiv -P_{i,m-1}^k + \sum_1^{m-2} P_{i,s}^k \frac{\partial x_{m-1}}{\partial x_s},$$

$$\Psi_i^k \equiv -P_{i,m}^k + \sum_1^{m-2} P_{i,s}^k \frac{\partial x_m}{\partial x_s},$$

gesetzt wird. Wir wollen die betrachtete Integral- M_{m-2} eine C_{m-2} , d. h. eine „ $m-2$ -fach ausgedehnte Charakteristik“ nennen, wenn alle n -reihigen Determinanten der Matrix

$$(17) \quad \left\| \begin{array}{cc} \Phi_1^1 \dots \Phi_1^n, & \Psi_1^1 \dots \Psi_1^n \\ \dots & \dots \\ \Phi_N^1 \dots \Phi_N^n, & \Psi_N^1 \dots \Psi_N^n \end{array} \right\|$$

identisch Null sind. Diese Annahme liefert ein System partieller Differentialgleichungen I. O. mit den abhängigen Variablen x_{m-1} , x_m und den unabhängigen Variablen $x_1 \dots x_{m-2}$, wenn man die in den Coefficienten $P_{i,s}^k$ auftretenden Grössen s, p durch die Ausdrücke in $x_1 \dots x_m$ ersetzt, welche der oben erwähnten Integral- M_m zukommen. Die erhaltenen partiellen Differentialgleichungen sind aber selbst im Falle $\mu = 1$ (und a fortiori für $\mu > 1$) im Allgemeinen nicht miteinander verträglich. Dies lehrt schon der einfache Fall $\mu = 1$, $\nu = 0$, $m = 3$; die charakteristische Form K ist hier identisch mit der n -reihigen Determinante, die aus dem (nunmehr quadratischen) Schema (D) p. 554 gebildet wird; d. h. mit einer vollständig allgemeinen Form n . Grades in $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, während das Verschwinden aller n -reihigen Determinanten der zugehörigen Matrix (17) nach Nr. 19 die Zerlegbarkeit der Form K im Gefolge hätte,

Auch für Involutionssysteme $\mu = 1$ enthält somit eine beliebige Integral- M_m im allgemeinen keine Charakteristiken C_{m-2} .

26. In der vorliegenden ersten Abhandlung werden fortan nur solche Involutionssysteme J betrachtet, für welche die Zahl μ den Werth eins besitzt. Nach Nr. 11 kann jedes beliebige Involutionssystem mit Hülfe der Mayer'schen Transformation auf diesen Fall zurückgeführt werden.

27. Durch leichte Verallgemeinerung der in den vor. Nummern durchgeführten Rechnungen gelangt man zu einer ganz analogen Definition der Charakteristiken C_{m-3} , C_{m-4} etc.; wir betrachten ausführlich den Fall der Charakteristiken C_1 .

Es seien die Grössen $x_2, x_3 \dots x_m, z, p$ als Functionen der unabhängigen Variablen x_1 so bestimmt, dass die Relationen

$$(18) \quad dz^k = p_1^k dx_1 + \dots + p_m^k dx_m \quad (k = 1 \dots n)$$

identisch bestehen. Die so definirte Element- M_1 , die wir gelegentlich auch als „Streifen“ bezeichnen wollen, ist eine Integralmannigfaltigkeit von J , wenn die Bedingungen

$$(19) \quad df_1 = 0, df_2 = 0 \dots df_{n+\nu} = 0$$

erfüllt sind, und ausserdem ein Element des Streifens die Relationen (A) erfüllt. Ist M_m eine m -fach ausgedehnte Integralmannigfaltigkeit, welche unsere M_1 enthält, so ist jedem Element von M_1 durch die M_m ein bestimmtes System von Werthen r_{ij}^k zugeordnet, welche den Relationen (3) sowie den folgenden:

$$(20) \quad dp_i^k = r_{i1}^k dx_1 + \dots + r_{im}^k dx_m \quad (k = 1 \dots n, i = 1 \dots m)$$

Genüge leisten. Die Elimination der Grössen r_{i1}^k aus (3) und (20) führt auf die schon betrachteten Beziehungen (19), sowie auf die nachfolgenden $m - 1$ Systeme von je $N = n + \nu$ Gleichungen:

$$(F_h) \quad \left\{ M_{ih} + \sum_1^n P_{i1}^k \frac{dp_h^k}{dx_1} + \sum_1^n \sum_2^m r_{hj}^k \left(P_{ij}^k - \frac{dx_j}{dx_1} P_{i1}^k \right) = 0 \right. \\ (i = 1, 2 \dots N).$$

Wir nennen den Streifen M_1 einen „charakteristischen Streifen“ oder eine C_1 von J , wenn sich die N Gleichungen eines jeden der Systeme $(F_2) \dots (F_m)$ auf nur $n - 1$ in Bezug auf die Unbekannten r_{ij}^k linear unabhängige Relationen reduciren.

28. Nach Nr. 19 hat man für eine C_1 die Beziehungen

$$(21) \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \Lambda_2^{(x)}, \quad \frac{dx_3}{dx_1} = \Lambda_3^{(x)} \dots \frac{dx_m}{dx_1} = \Lambda_m^{(x)},$$

unter x einen der Indices 1, 2, $\dots$, $n - \nu$ verstanden, und es müssen die in jener Nr. angegebenen algebraischen Bedingungsgleichungen

drücke sind andererseits zufolge der Relationen (4) der Nr. 15 mit den folgenden identisch:

$$- \sum_1^N \alpha_{i1}^s \frac{df_i}{dx_1};$$

dabei ist in df_i für dz^k sein aus (18), (21) folgender Werth

$$(p_1^k + p_2^k \Lambda_2^{(x)} + \dots + p_m^k \Lambda_m^{(x)}) dx_1$$

einzusetzen. Demnach sind ν unabhängige Linearcombinationen der Gleichungen (23), — und wie leicht ersichtlich auch nicht mehr — eine Folge von (19). Also sind die Gleichungen (19), (23) für jeden Index x zusammen nur mit $(m-1)(\nu+1) + n$ unabhängigen Relationen für die Ableitungen $\frac{dp_j^k}{dx_1}$ äquivalent.

Wir bezeichnen ein Involutionssystem der Form (A) als ein Normalsystem, wenn die Zahl $\mu = 1$ ist und die algebraischen Bedingungsgleichungen der Nr. 19 erfüllt sind. Dann können wir folgenden Satz aussprechen:

„Jedes Normalsystem besitzt $n - \nu$ im allgemeinen verschiedene Systeme charakteristischer Streifen C_1 “.

30. Wir wollen die $n - \nu$ Systeme von Definitionsgleichungen der C_1 der Uebersicht halber noch einmal zusammenstellen:

$$(H_x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \frac{dx_2}{dx_1} = \Lambda_2^{(x)}, \dots, \frac{dx_m}{dx_1} = \Lambda_m^{(x)}, \\ \text{b) } \frac{dz^k}{dx_1} = p_1^k + \sum_2^m \Lambda_j^{(x)} p_j^k, \quad (k=1 \dots n) \\ \text{c) } df_1 = 0, df_2 = 0, \dots, df_{\nu+1} = 0, \\ \text{d) } \sum_1^N l_{is}^{(x)} M_{ih} + \sum_1^N \sum_1^n l_{is}^{(x)} P_{i1} \frac{dp_h^k}{dx_1} = 0, \\ \quad (h=2, 3, \dots, m; s=1, 2, \dots, \nu+1). \end{array} \right.$$

$x=1, 2, \dots, n-\nu$

Man kann die Gleichungen c) aus diesem System weglassen und die Grössen $p_1^1 \dots p_1^n, p_2^1 \dots p_2^\nu$ nebst ihren Differentialen vermöge des aufgelösten Systems (A') aus (H_x) entfernen. Das so modificirte Gleichungssystem (H_x) werden wir später mit (H_x') bezeichnen. Es besteht aus $(m-1)(\nu+1) - \nu + n + m - 1$ unabhängigen Gleichungen zwischen den $(m-1) + n + (mn - n - \nu)$ Ableitungen $\frac{dx_j}{dx_1}, \frac{dz^k}{dx_1}, \frac{dp_g^h}{dx_1}$; die Zahl der letzteren ist somit um $(m-1)(n-\nu-1)$ grösser als die der ersteren, also gleich derselben nur im Falle $\nu = n - 1$.

„Ein Normalsystem $\nu = n - 1$ besitzt demnach eine Schaar von eindimensionalen Charakteristiken, die nur von einer endlichen Parameterzahl abhängt.“

31. Ihrer Entstehungsweise nach sind die Definitionsgleichungen (H_x) der C_1 völlig äquivalent mit den folgenden:

$$(24) \quad dx_j = \Lambda_j^{(x)} dx_1, \quad j = 2 \dots m;$$

$$(25) \quad dz^k = p_1^k + \sum_2^m p_i^k \Lambda_i^{(x)}, \quad k = 1 \dots n;$$

$$(26) \quad dp_i^k = r_{i1}^k + \sum_2^m r_{iu}^k \Lambda_u^{(x)}, \quad k = 1 \dots n, \quad i = 1 \dots m;$$

wenn unter den r_{ii}^k beliebige Grössen verstanden werden, die den Beziehungen (3) genügen. Jede eindimensionale Mannigfaltigkeit von „Punkten“ $x_1 \dots x_m, z_1 \dots z_n$, welche den Differentialgleichungen (24) genügt und einer Integral- M_m von J angehört, bestimmt also mit den ihr zugehörigen Elementen 1. O. von M_m eine Charakteristik C_1 ; wir schliessen daraus sofort:

„Jede Integral- M_m des Normalsystems J ist erzeugt von je ∞^{m-1} Streifen C_1 eines jeden der $n - \nu$ Charakteristikensysteme, in dem Sinne, dass für $\kappa = 1, 2 \dots, n - \nu$ durch jedes Element x, z, p von M_m ein und nur ein Streifen hindurchgeht, welcher dem κ^{ten} Charakteristikensystem angehört und ganz auf M_m enthalten ist.“

32. Die partielle Differentialgleichung (12) der Charakteristiken C_{m-1} unseres Normalsystems J zerfällt in die $n - \nu$ linearen Gleichungen:

$$(27) \quad \frac{\partial x_m}{\partial x_1} + \Lambda_2^{(x)} \frac{\partial x_m}{\partial x_2} + \dots + \Lambda_{m-1}^{(x)} \frac{\partial x_m}{\partial x_{m-1}} = \Lambda_m^{(x)},$$

$$(\kappa = 1, 2 \dots n - \nu).$$

Ersetzt man in den Functionen $\Lambda_j^{(x)}$ die Grössen z, p vermöge der Definitionsgleichungen irgend einer Integral- M_m von J durch Functionen der x , so entstehen lineare partielle Differentialgleichungen für x_m , deren „Charakteristiken“ im gewöhnlichen Sinn durch (24) definit werden. Man schliesst daraus unmittelbar:

„Ein Normalsystem besitzt $n - \nu$ verschiedene C_{m-1} -Systeme; die allgemeinste C_{m-1} , die auf einer beliebigen Integral- M_m von J enthalten ist, wird von ∞^{m-2} Charakteristiken $C_1^{(x)}$ erzeugt, die ganz auf M_m verlaufen und bezw. von den Elementen einer beliebigen, auf M_m gelegenen M_{m-2} ausgehen.“

Für die $m - s$ -dimensionalen Charakteristiken C_{m-s} , hat man ebenso die $n - \nu$ Systeme von je s Gleichungen:

$$\frac{\partial x_{m-s+j}}{\partial x_1} + \Lambda_2^{(x)} \frac{\partial x_{m-s+j}}{\partial x_2} + \dots + \Lambda_{m-s}^{(x)} \frac{\partial x_{m-s+j}}{\partial x_{m-s}} = \Lambda_{m-s+j}^{(x)},$$

$$(j = 1, 2, \dots, s),$$

woraus wie oben folgt:

„Es gibt für ein Normalsystem $n - v$ verschiedene Systeme von Charakteristiken C_{m-s} ; die allgemeinste, auf einer beliebigen Integral- M_m von J verlaufende C_{m-s} , wird von ∞^{m-s-1} Charakteristiken $C_1^{(x)}$ erzeugt, die bezw. von den Elementen einer willkürlichen, auf M_m gelegenen M_{m-s-1} auslaufen.“

Capitel IV.

Reduction der Anzahl der Independenten.

33. Aus den Entwicklungen der Nr. 30 und 31 ergibt sich für Normalsysteme, deren Zahl v den Werth $n - 1$ hat, eine Theorie, die derjenigen einer partiellen Differentialgleichung 1. O. mit einer unbekannten Function vollkommen analog ist, und auch thatsächlich in dieselbe übergeht, wenn wir im vorigen Capitel die Annahme $n = 1$, $\mu = 1$, $v = 0$ machen. Für $v = n - 1$ gibt es nämlich einerseits nach Nr. 30 nur ein einziges System von eindimensionalen Charakteristiken, die durch gewöhnliche Differentialgleichungen definirt werden, und zwar ist jedes Flächenelement der durch (A) definirten Schaar auf einer und nur einer C_1 enthalten; andererseits sind nach Nr. 31 auf jeder Integral- M_m je ∞^{m-1} C_1 gelegen, und es folgt:

Die allgemeinste Integral- M_m eines Normalsystems $v = n - 1$ wird erzeugt von ∞^{m-1} Charakteristiken C_1 , die bezw. durch die ∞^{m-1} Elemente einer beliebigen Integral- M_{m-1} bestimmt werden. Die Integration des Systems (A) ist so zurückgeführt auf diejenige eines gewöhnlichen Differentialgleichungssystems, auf ausführbare Operationen und auf die Herstellung der allgemeinsten Integral- M_{m-1} von J , die nach Nr. 10 die Integration eines Hülffsystems von $n - 1$ Gleichungen I. O. in $m - 1$ Independenten und $n - 1$ unbekannten Functionen erfordert.

34. Betrachten wir nunmehr den Fall $v < n - 1$. Die um eins verminderte Zahl der Differentiale $dx_1, dx_m, dz^1, dz^2, dp_2^{v+1} \dots dp_2^v, dp_3^1 \dots dp_m^v$ übertrifft nunmehr nach Nr. 30 diejenige der unabhängigen Gleichungen in dem System (H_x) , und es sind gewisse Integrabilitätsbedingungen erforderlich, wenn sich aus den linken Seiten der (in den Differentialen homogen geschriebenen) Gleichungen (H_x) lineare Combinationen der Form $d\psi^{(x)}$ sollen bilden lassen, unter x irgend eine der Zahlen $1 \dots n - v$, unter $\psi^{(x)}$ eine Function der Grössen x, z, p_g^h verstanden. Nehmen wir nun an, es sei eine solche Combination vorhanden, von der Beschaffenheit, dass sich die Gleichung

$$(1) \quad d\psi^{(x)} = 0$$

in der Form

$$-p_2^{v+1} + \varphi_2^{v+1}(x, z, p_2^{v+2} \dots p_2^n, p_3^1 \cdot p_m^n) = 0$$

aufösen lässt.

Dann bilden die $n + v + 1$ Relationen:

$$(2) \quad -p_b^1 + \varphi_b^1 = 0, \quad -p_c^2 + \varphi_c^2 = 0 \quad (b = 1 \dots n; c = 1 \dots v + 1)$$

wieder ein Involutionsystem, wenn man sich die Grösse p_2^{v+1} aus den ersten N Gleichungen vermöge der letzten eliminirt denkt. Denn der Umstand, dass $d\psi^{(x)}$ eine integrable Combination der linken Seiten des Systems (H_x) ist, lässt sich nach Nr. 31 so ausdrücken: Der totale Differentialausdruck $d\psi^{(x)}$ verschwindet vermöge der Relationen (3), pag. 6, wenn man dx_i, dz^k, dp_g^h durch ihre Ausdrücke (24), (25), (26) des vor. Cap. ersetzt. Schreiben wir demnach:

$$\psi_i^{(x)} \equiv \frac{\partial \psi^{(x)}}{\partial x_i} + \sum_1^n \frac{\partial \psi^{(x)}}{\partial z^k} p_i^k + \sum_{g,h} \frac{\partial \psi^{(x)}}{\partial p_g^h} r_{gi}^h,$$

so besteht vermöge (A) eine Identität der Form

$$(3) \quad \psi_1^{(x)} + \Lambda_2^{(x)} \psi_2^{(x)} + \dots + \Lambda_m^{(x)} \psi_m^{(x)} \equiv \sum_1^m \sum_1^N \sigma_{ii} f_{ii}$$

für alle Werthe der r_{ij}^k ; also gibt es nach Nr. 6 zwischen den linken Seiten der $m(N + 1)$ Relationen, die durch partielle Ableitung aus:

$$(4) \quad f_1 = 0 \dots f_N = 0, \quad \psi^{(x)} = 0$$

erhalten werden, $v + 1$ unabhängige lineare Identitäten, woraus die Involutionsseigenschaft des Systems (4) oder (2) sofort folgt.

35. Die charakteristische Matrix des Involutionsystems (4) hat folgende Gestalt:

$$(5) \quad \left\| \begin{array}{cccc} L_1^1 \dots L_N^1, & \lambda_1 \frac{\partial \psi^{(x)}}{\partial p_1^1} + \lambda_2 \frac{\partial \psi^{(x)}}{\partial p_2^1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \psi^{(x)}}{\partial p_m^1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_1^n \dots L_N^n, & \lambda_1 \frac{\partial \psi^{(x)}}{\partial p_1^n} + \lambda_2 \frac{\partial \psi^{(x)}}{\partial p_2^n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \psi^{(x)}}{\partial p_m^n} \end{array} \right\|,$$

wobei in den Elementen der letzten Columnne die verschwindenden Ableitungen $\frac{\partial \psi^{(x)}}{\partial p_a^b}$ nur der Symmetrie halber eingeführt wurden.

Aus (3) folgert man nun die für beliebige λ bestehenden Identitäten:

$$\sum_1^N (\sigma_{i1} \lambda_1 + \dots + \sigma_{im} \lambda_m) L_i^k$$

$$- (\lambda_1 + \Lambda_2^{(x)} \lambda_2 + \dots + \Lambda_m^{(x)} \lambda_m) \left(\lambda_1 \frac{\partial \psi^{(x)}}{\partial p_1^k} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \psi^{(x)}}{\partial p_m^k} \right) = 0,$$

($k = 1, 2 \dots n$).

In der Bezeichnungsweise der Nr. 15 schreibt sich demnach die zu (5) correspondirende Matrix so:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \sum \sigma_{1s} \lambda_s, & \dots, & \sum \sigma_{Ns} \lambda_s, & - (\lambda_1 + \Lambda_2^{(x)} \lambda_2 + \dots + \Lambda_m^{(x)} \lambda_m) \\ \pi_1^1, & & \pi_N^1, & 0 \\ \pi_1^2, & & \pi_N^2, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_1^n, & & \pi_N^n, & 0 \end{array} \right\|,$$

woraus sich ergibt, dass die charakteristische Form des Involutionsystems (4) erhalten wird, indem man aus K den Factor Λ_x weglässt.

36. Die Resultate der vor. Nr. lassen sich leicht verallgemeinern.

Es sei $s < n - v$ und $x_1, x_2, \dots, x_s$ verschiedene Zahlen der Reihe $1, 2, \dots, n - v$. Gestatten dann die Systeme

$$(6) \quad (H_{x_1}'), (H_{x_2}') \dots (H_{x_s}')$$

je eine integrable Combination $d\psi^{(x_h)}$ von der Beschaffenheit, dass die Gleichungen

$$\psi^{(x_1)} = 0, \quad \psi^{(x_2)} = 0 \dots \psi^{(x_s)} = 0,$$

in deren linke Seiten die Variablen $x, z, p_2^{v+1} \cdot p_2^n, p_3^1 \dots p_m^n$ eingehen, sich in der Form:

$$(7) \quad -p_2^{v+1} + \varphi_2^{v+1} = 0 \dots -p_2^{v+s} + \varphi_2^{v+s} = 0$$

aufösen lassen, so stellen die Gleichungen:

$$(8) \quad f_1 = 0, \dots, f_N = 0, \quad \psi^{(x_1)} = 0, \dots, \psi^{(x_s)} = 0$$

oder die damit äquivalenten Relationen (A') und (7) ein Involutions-system dar, dessen charakteristische Form mit dem Ausdruck

$$\pm \frac{K}{\Lambda_{x_1} \Lambda_{x_2} \dots \Lambda_{x_s}}$$

identisch ist.

37. Sind $u^{(x)}, v^{(x)}$ Integrale des Systems (H_x') , so gilt dasselbe von jeder arbiträren Function $\varphi(u^{(x)}, v^{(x)})$. Nehmen wir nun an, dass jedes der s Gleichungssysteme (6) je m unabhängige Integrale $u_1^{(x_h)} u_2^{(x_h)} \dots u_m^{(x_h)}$ besitze, und verstehen wir unter $\psi^{(x_h)}$ eine arbiträre Function dieser Ausdrücke, so bilden die Gleichungen (8) natürlich wieder ein Involutions-system, und es ist klar, dass jede Integral- M_m desselben auch das ursprüngliche System J erfüllt. Aber man kann auch umgekehrt die willkürlichen Functionen $\psi^{(x_h)}$ so bestimmen, dass eine beliebige Integral- M_m von J auch das System (8) befriedigt. Nach Nr. 10 ist nämlich für jedes Involutions-system eine Integral- M_m durch Angabe einer sie enthaltenden Integral- M_{m-1} vollständig bestimmt. Wir denken uns nun eine beliebige Integral- M_{m-1} von J ermittelt, was im Falle $v = 0$ durch ausführbare Operationen, im Falle $v > 0$

durch Integration eines Hülffsystems in $m - 1$ Independenten geschieht. Die Ausdrücke, die sich so für die Grössen x , $z^1 \dots z^n$, p_i^k als Functionen der Variabeln $x_2 \dots x_m$ ergeben, denken wir uns in die Relationen $\psi^{(x_k)} = 0$ substituirt. Man kann dann die arbiträren Functionen auf eine und wesentlich nur eine Art so wählen, dass diese Relationen identisch, d. h. für beliebige Werthe der Variabeln $x_2, \dots, x_m$ erfüllt sind, mit andern Worten: dass die erwähnte Integral- M_{m-1} auch dem Involutionssystem (8) genügt. *Die Herstellung der allgemeinsten Integral- M_m von J ist somit auf die Integration des Involutionssystems (8) zurückgeführt.* Ist die Zahl s insbesondere gleich $n - \nu$, so besteht das letztere System aus $2n$ partiellen Differentialgleichungen in n unbekannten Functionen; indem man wie in Nr. 11 in die aufgelöste Form

$$-p_a^b + \varphi_a^b = 0 \quad (a = 1, 2; \quad b = 1, 2, \dots, n)$$

desselben vermöge der Mayer'schen Transformationsformeln

$x_1 = x_1^0 + y_1$, $x_2 = x_2^0 + y_1 y_2$, $x_3 = x_3^0 + y_3 \dots x_m = x_m^0 + y_m$ neue unabhängige Veränderliche $y_1 y_2 \dots y_m$ einführt, gelingt es, die Integration dieses Systems auf diejenige eines Systems (A'') von n Gleichungen in n abhängigen Veränderlichen $z^1 \dots z^n$ und $m - 1$ Independenten $y_1, y_3 \dots y_m$ zurückzuführen.

Da man die Existenz etwaiger Integrale von (H'_x) stets mit Hülfe von Differentiationen und Eliminationen feststellen, die Integrale selbst durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen ermitteln kann, so ergibt sich folgendes Theorem:

„Besitzt jedes der $n - \nu$ Systeme totaler Differentialgleichungen, durch welche bezw. die $n - \nu$ Systeme charakteristischer Streifen unseres Normalsystems definirt werden, m unabhängige Integrale, so kann die Integration des Normalsystems durch ausführbare Operationen und Integration gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme auf Differentialprobleme in $m - 1$ Independenten zurückgeführt werden, und es lässt sich stets durch Differentiationen und Eliminationen entscheiden, ob bei einem gegebenen Normalsystem dieser Ansatz zum Ziele führt oder nicht.“^{*)}

München, im Januar 1897.

^{*)} Weitere Resultate dieser Theorie habe ich in einer Note: „Résumé einer Integrationstheorie höherer partieller Differentialprobleme“ Leipz. Ber. 1897 skizzirt.