VI. *Ueber tönende Systeme;*
*von Emil Warburg.*¹⁾

Die Zungenpfeifen waren in ihren mannigfachen Formen schon lange in der Musik angewandt worden, als Wilh. Weber²⁾ dieselben einer experimentellen und theoretischen Untersuchung unterzog. Die Zungenpfeife besteht im Wesentlichen aus einer elastischen Platte und einer Luftsäule. Weber zeigte, daß die Platte der Zungenpfeife isolirt in einem anderen Tacte schwingt, als in Verbindung mit der Luftsäule und daß die tonverändernde Wirkung der Luftsäule abhängt von ihrer Länge. Er stellte ferner eine Formel auf, nach welcher man aus dem Ton der isolirt schwingenden Platte und der Länge der Luftsäule den Ton der Zungenpfeife berechnen kann. Diese Formel hat Weber durch sorgfältige Versuche verificirt.

Aber die Zungenpfeife zeigt noch eine andere Eigenthümlichkeit, welche außer dem Bereich der Weber'schen Untersuchung liegt und von Willis³⁾ hervorgehoben ist. Nämlich wenn die Länge der Luftsäule sich denjenigen Längen nähert, für welche ihre tonverändernde Wirkung auf die Platte sehr groß ist, so spricht die Pfeife schlechter und schlechter an, bis sie schließlich nicht mehr zum Tönen gebracht werden kann.

Hopkins⁴⁾ erwähnt bei seiner Untersuchung der Luftschwingungen in Röhren einer ganz ähnlichen Erscheinung. Bringt man nämlich über einer Klangscheibe eine begränzte Luftsäule an, so gelingt es bei gewissen Längen der Luftsäule nicht, die Klangscheibe zum Tönen zu bringen. Hopkins erklärt dies so, daß in diesem Falle der Widerstand der Luftschwingungen gegen die Schwingungen der Platte zu groß werde. Es ist indeß aus der Hopkins'schen Ent-

1) Die Versuche wurden in dem Laboratorium des Hrn. G. Magnus angestellt.

2) Pogg. Ann. Bd. XVII.

3) Dove's Repert. Bd. III, S. 88.

4) Pogg. Ann. Bd. XLIV. Dove's Repert. Bd. III, S. 73.

wicklung, in welcher übrigens die erwähnte Erscheinung nur beiläufig behandelt wird, nicht klar ersichtlich, wie dieser Widerstand entsteht; was um so mißlicher ist, als der Hopkins'sche Versuch in Verbindung mit den Versuchen an der Zungenpfeife nur ein specieller Fall sehr allgemeiner Erscheinungen ist, auf die man sehr häufig bei akustischen Versuchen geführt wird. So erwähnt noch neuerdings Stephan ¹⁾, »dafs es schwer geht, einem (aus zwei heterogenen Stücken) zusammengesetzten Stabe einen (Longitudinal-) Ton zu entlocken, dessen Knoten nahe an der Fugstelle der Stäbe liegt.« Stephan sagt weiter: »es hängt diefs zusammen mit den Verdichtungen und Verdünnungen im schwingenden Stabe. Diese sind in der Nähe der Knoten am stärksten, in der Nähe der Schwingungsbäuche am geringsten«; eine Erklärung, die dem Verfasser nicht verständlich ist.

Es ist der Zweck dieser Arbeit, zunächst eine Anzahl von Beispielen zu beschreiben, an denen man ähnliche Erscheinungen, wie die erwähnten, beobachtet, und darauf im Anschlufs an einen einfachen Fall einige theoretische Erörterungen zu geben.

1. Man verbinde mit einem transversaltönenden Stabe, *AB*, am besten mit einem Schwingungscentrum desselben, einen zweiten Stab *CD*, etwa durch einen hölzernen Steg *s*, so, dafs die breiten Oberflächen der Stäbe parallel liegen; die

Fig. 1.

Verbindung der Theile geschieht durch Siegelack. Man wird dann finden, dafs der Ton des Systems von dem Ton des isolirt schwingenden Stabes *AB* abweicht. Ist der Stab *CD* sehr kurz, so ist die durch denselben bewirkte Tonänderung nur schwach; verlängert man ihn, so wird der Ton des Systems tiefer und tiefer und es gelingt endlich kaum, ihn hervorzubringen. Ist der Stab *CD* ein dünner Streifen,

1) Sitzungsber. der Wiener Akademie Bd. LV, II. Abth. 30. April 1868.

so kann man jetzt zwei rasch verklingende Töne von dem System erhalten, bei welchen beiden der Stab AB sich in die gleiche Zahl schwingender Abtheilungen theilt (wie durch aufgestreuten Sand sichtbar gemacht wird); der eine dieser Töne ist tiefer, der andere höher, als der Ton des isolirt schwingenden Stabes AB ; bei dem höheren hat sich auf CD dicht an C ein Knoten gebildet. Streicht man jetzt den Stab CD an (indem man C festhält), so erhält man einen Ton, der nahe mit dem Ton des Systems übereinstimmt. Je weiter man den Stab CD verlängert, desto leichter gelingt es, den erhöhten Ton hervorzubringen, während der tiefere sich bald gänzlich der Wahrnehmung entzieht. Aber beim Verlängern des Stabes CD wird der erhöhte Ton tiefer und tiefer und schliesslich an einer Stelle gleich dem Ton des isolirt schwingenden Stabes AB . Der Ton des Systems ist hier von derselben, verhältnissmässig langen Dauer, wie der Ton des isolirt schwingenden Stabes AB , so dass die Wirkung des Stabes CD auf AB anscheinend nahe Null geworden ist. Verlängert man CD jetzt noch weiter, so wiederholen sich die beschriebenen Erscheinungen periodisch. Wählt man zu diesen Versuchen einen Ton von so grosser Schwingungsdauer, dass man die Schwingungen sehen kann, so bemerkt man, dass bei solchen Längen des Stabes CD , bei welchen derselbe die grösste Wirkung auf den Stab AB ausübt, die Intensität der Schwingungen im Stabe CD verglichen mit der Intensität der Schwingungen im Stabe AB am grössten ist. Wir wollen Kürze halber das Verhältniss der Amplituden in den Schwingungscentren der Stäbe CD , und AB die relative Intensität der Bewegung im Stabe CD nennen. Nun haben wir gesehen, dass die Wirkung des Stabes CD auf den Stab AB eine doppelte ist: erstens verändert er den Ton von AB nach seiner Schwingungszahl; zweitens verändert er den Ton von AB nach seiner Dauer, und zwar macht er ihn kürzer, wobei er zugleich die Hervorbringung desselben erschwert. Nennen wir noch die erste Wirkung die *tonverändernde*, die zweite Wirkung die *dämpfende* Wirkung, so können wir die beschriebenen Ver-

suche kurz dahin zusammenfassen, daß der Stab CD auf den Stab AB eine tonverändernde und eine dämpfende Wirkung ausübt, und daß beide Wirkungen im Maximum sind bei solchen Längen von CD , bei welchen die relative Intensität der Bewegung in diesem Stabe am größten ist.

Es sey noch erwähnt, daß man, ohne in den Erscheinungen etwas zu ändern, die beiden Stäbe in einem Stück herstellen kann, das dann die Form eines $A \overset{D}{\underset{C}{|}} B$ hat.

2. Die Stelle des Stabes CD kann eine Spirale aus Metall vertreten, welche man senkrecht auf einem Schwingungscentrum des Stabes AB befestigt. Eine solche Spirale geräth dabei in Schwingungen, welche sehr große Aehnlichkeit mit den longitudinalen Schwingungen der Luft in Röhren haben (wie man an tiefen Tönen bei hängender Spirale deutlich beobachtet). Während die tonverändernde Wirkung bei den angewandten Dimensionen nur schwach war, zeigte sich die dämpfende Wirkung passender Längen sehr auffällig; wenn bei diesen Längen durch Anschlagen oder Anstreichen des Stabes AB kaum die Spur von einem Ton wahrgenommen ward, sprach derselbe sofort mit der größten Leichtigkeit an, wenn ein Stückchen Wachs auf die Spirale geklebt wurde, was einer Längenänderung entspricht.

3. Kittet man senkrecht auf den Stiel einer Stimmgabel ein Glasstäbchen, so entzieht sich die tonverändernde Wirkung auch hier der Wahrnehmung. Um so deutlicher ist die dämpfende Wirkung, wenn man dem Stäbchen eine solche Länge giebt, daß es

angestrichen, nahe den Ton der Stimmgabel giebt. Man kann in diesem Falle mit Hilfe einer Sekundenuhr beobachten, wie die Zinken bei merklich gleichen Anfangselongationen weit rascher in die Ruhelage kommen, als wenn das Stäbchen entfernt oder verstimmt wird. Eine merkliche Tonänderung durch das Stäbchen kann man erhalten, wenn man die eine Zinke der Gabel durch ein Gewicht beschwert, wodurch der Knoten an der beschwerten Zinke heraufrückt, und die Intensität der Bewegung an der Ansatzstelle des Stiles größer wird.

Die Tonänderung bei passender Länge des Stäbchens wird wahrgenommen durch die Stöße, welche das System mit einer zweiten Gabel giebt, die mit der isolirt schwingenden ersten Gabel unisono ist. Die dämpfende Wirkung kann in diesem Falle so stark gemacht werden, daß so gut wie gar kein Ton von dem System erhalten wird.

Fig. 3.

4. Befestigt man senkrecht auf dem freien Ende eines longitudinal tönenden Glasstabes ein Stäbchen, so geräth dasselbe in Transversalschwingungen. Wenn man nun die Länge dieses Stäbchens ändert, so erhält man ganz analoge Wirkungen, wie sie bei dem ersten Versuch beschrieben sind, und zwar tritt hier sowohl die tonverändernde, wie die dämpfende Wirkung deutlich in die Erscheinung; die erstere um so deutlicher, je größer das elastische Moment des Stäbchens gemacht wird.

5. Am leichtesten und vollständigsten kann man die in Rede stehenden Erscheinungen zeigen, wenn man zwei Luftsäulen combinirt. Ein Stück der Seitenwand eines weiten gläsernen Pfeifenrohrs *AB* in der Mitte der ganzen Länge wird entfernt und an die offene Stelle ein enges Rohr *CD* angelöthet, in welchem ein Stempel verschieb-

Fig. 4.

bar ist. Man bringt den Grundton der offenen Pfeife hervor und entfernt den Stempel allmählich von der Mündung des seitlichen Ansatzrohres. Man erhält in diesem Falle genau die in dem ersten Versuch beschriebenen Erscheinungen. Der Ton der Pfeife, im Anfang voll und stark, sinkt allmählich und wird schwach und kurz. Allmählich gelangt der Stempel an eine Stelle, an welcher man durch passendes Anblasen mit Leichtigkeit zwei rasch verklingende Töne entweder zugleich oder getrennt erhalten kann, deren einer höher, deren anderer tiefer ist, als der Ton der isolirt schwingenden Pfeife AB ; nur ist das Intervall der Längen CD , innerhalb dessen man zwei Töne erhalten kann, hier viel breiter, als in den bisher beschriebenen Versuchen. Bei beiden Tönen ist in der grossen Pfeife AB kein Knoten vorhanden; aber bei dem erhöhten hat sich deren einer in dem seitlichen Ansatzrohr CD gebildet. Diefs konnte nach der Kundt'schen Methode der Sichtbarmachung der Luftwellen mit Kieselsäure leicht ermittelt werden; an der Bewegung des Pulvers war ferner deutlich sichtbar, dafs das Maximum der dämpfenden und tonverändernden Wirkung auf die Pfeife AB zugleich eintrat mit dem Maximum der relativen Intensität der Bewegung in CD ; für solche Längen CD nämlich, bei welchen man den vollen, starken Pfeifenton erhielt, ward das Pulver in der Pfeife AB lebhaft bewegt, während die Bewegung in CD schwächer war; in demselben Maafse, als bei weiterem Ausziehen des Stempels die Töne kürzer und schwächer wurden, ward die Bewegung des Pulvers in CD stärker, am stärksten, wenn das System an die äufsere Luft ein Minimum von Schall abgab.

Im Uebrigen gehen bei weiterem Ausziehen des Stempels die Erscheinungen in derselben Weise fort, wie diefs beim ersten Versuch beschrieben ist. Man kann die Pfeife, anstatt durch Blasen, auch nach Art der chemischen Harmonika durch ein kleines Flämmchen zum Tönen bringen, das unten in der Pfeife angebracht wird; nur bleibt in Fällen, wo man beim Anblasen durch einen Luftstrom zwei schwache Töne erhält, der Ton des Systems gänzlich aus; nähert sich

der verschiebbare Stempel der Stelle, wo dieß eintritt, so wird der Ton matt und rauh, was wahrscheinlich der Co-existenz jener beiden Töne zuzuschreiben ist, die in dem anderen Versuch getrennt erhalten wurden.

In den Erscheinungen ändert sich nichts, wenn man die beiden Luftsäulen durch eine feine Membran trennt.

5. Es wäre leicht, die Beispiele zu häufen; es sey indefs schliesslich nur noch eines Versuches Erwähnung gethan, der sich am leichtesten theoretisch behandeln läßt. Bringt man nämlich an eine Stimmgabelzinke einen Faden, dessen eines Ende befestigt ist, so an, daß seine Richtung senkrecht auf der Schwingungsrichtung der Zinke steht, so erhält man, wenn man die Länge oder die Spannung des Fadens stetig ändert, dieselben Erscheinungen, die wir in dem ersten Versuch erhielten, als wir die Länge des Stabes *CD* änderten. Die Tonveränderung, sowie die Dämpfung ist hier aber nur dann deutlich wahrnehmbar, wenn das Maximum der Wirkung auf die Gabel eintritt; auch hier zeigt sich deutlich, daß das Maximum der Wirkung des Fadens auf die Stimmgabel zugleich mit dem Maximum der relativen Intensität der Bewegung im Faden eintritt.

Allgemein werden wir das Resultat der beschriebenen Versuche folgendermaßen ausdrücken können: wenn man mit einem Körper *A*, der so begrenzt ist, daß er für sich zum Tönen gebracht werden kann, einen andern Körper *B* verbindet, so übt der Körper *B*, indem er mit in Schwingung geräth, eine tonverändernde und eine dämpfende Wirkung auf den Körper *A* aus, und zwar sind beide Wirkungen jedesmal für solche Dimensionen des Körpers *B* im Maximum, für welche die relative Intensität der Bewegung in dem Körper *B* im Maximum ist.

Man versteht unter Resonanz das Mitschwingen eines Körpers *B* mit einem Körper *A* in der gegebenen Periode des letzteren. Wenn aber der Körper *A* nur vermöge seiner eigenen Elasticität tönt, und nicht äußere Kräfte seine Schwingungsdauer unabänderlich bestimmen, so muß nach dem vorigen von dem Körper *B* sowohl eine dämpfende,

wie eine *tonverändernde* Wirkung auf den Körper *A*, ausgehen. Streng genommen müßte man daher in diesem Falle sagen, daß der Körper *A* und der resonirende Körper *B* zusammen ein System bilden, dessen Töne nach ihrer Dauer und nach ihrer Höhe sowohl von dem Körper *A* wie von dem Körper *B* abhängen.

Was nun die Theorie des eben zusammengefaßten experimentellen Resultates anlangt, so ist zunächst klar, daß eine *Dämpfung* der Schwingungen des Körpers *A* — d. h. eine Verkürzung der Dauer des Tones — nicht eintreten kann, wenn das System nur elastischen Kräften unterworfen ist, welche Kräfte nur Functionen der Entfernung der Punkte von einander oder von fixen Centren sind. In der That kann ein System von Punkten, auf welche nur solche Kräfte wirken, einmal in Bewegung gesetzt, niemals zur Ruhe kommen, d. h. der Ton, einmal entstanden, niemals erlöschen. Wir werden also berücksichtigen, daß die Schwingungen des Systems — entweder des ganzen oder einiger Theile — geschehen unter dem Einflusse eines Widerstandes; ein solcher ist gegeben durch den Luftwiderstand, die Reibung usw. Helmholtz ¹⁾ hat zuerst darauf hingewiesen, daß, wenn ein solchen Kräften unterworfenen Körper (Luftsäule) durch Resonanz tönt, die Schwingungen der einzelnen (Luft-) Theilchen unter einander eine Phasendifferenz erhalten. Etwas Aehnliches tritt in den oben beschriebenen Versuchen ein, und ist hierdurch die Dämpfung gegeben, welche von dem oben *B* genannten Körper auf den Körper *A* ausgeübt wird. Diefs soll an einem Beispiel und zwar an dem Versuch 5 näher durchgeführt werden; es soll nämlich gezeigt werden, daß, wenn ein gespannter Faden, auf dessen Elemente dämpfende Kräfte wirken, an eine Masse *M* (Stimmgabel) geknüpft ist, welche durch äußere (etwa elektrische) Kräfte in unabänderlicher periodischer Bewegung gehalten wird, der Faden auf die Masse eine Kraft ausübt, die sich zusammensetzt aus zwei Theilen, einen Theil

1) Lehre von den Tonempfindungen Beilage VII. Crelle's Journal Bd. LVII, S. 1 ff.

proportional der Elongation der Masse, einen Theil proportional der Geschwindigkeit, und dafs beide Theile am gröfsten sind für solche Verhältnisse des Fadens, für welche das Maximum der Resonanz desselben eintritt. Daraus ist dann weiter zu schliessen, dafs, wenn jene Kräfte an der Bewegung der Masse etwas ändern könnten (was der Fall ist, wenn die Masse (Stimmgabel) nur vermöge ihrer eigenen Elasticität schwingt), der eine Theil die Schwingungsdauer der Masse ändern, der andere Theil die Schwingungen derselben dämpfen würde.

Die Differentialgleichung der Bewegung eines Fadens, auf welchen die erwähnten Kräfte wirken, ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2\varepsilon \cdot \frac{\partial y}{\partial t},$$

wo $\varepsilon = \frac{2\mu}{b^2}$, $a^2 = \frac{P}{\mu}$, b^2 eine Constante, μ die Masse der Längeneinheit, P die Spannung bedeutet.

Die Länge des Fadens sey l ; für $x = 0$ sey $y = 0$; für $x = l$: $y = L \sin \beta t$.

Sehen wir ab von dem veränderlichen Anfangszustand der Bewegung und betrachten nur den stationären Endzustand, welcher durch die gegebene Bewegung des Endes $x = l$ hervorgebracht wird, so erhalten wir für die Bewegung des Fadens die Gleichung

$$y = \frac{L}{e^{\frac{2\delta l}{\gamma}} + e^{-\frac{2\delta l}{\gamma}} - 2\cos 2\gamma l} \left\{ \begin{array}{l} -(e^{\delta l} + e^{-\delta l}) \cdot \sin \gamma l \\ \cdot (e^{\delta x} - e^{-\delta x}) \cdot \cos \gamma x \cos \beta t \\ + (e^{\delta l} - e^{-\delta l}) \cdot \cos \gamma l \\ \cdot (e^{\delta x} + e^{-\delta x}) \cdot \sin \gamma x \cos \beta t \\ + (e^{\delta l} - e^{-\delta l}) \cdot \sin \gamma l \\ \cdot (e^{\delta x} + e^{-\delta x}) \cdot \sin \gamma x \sin \beta t \\ + (e^{\delta l} - e^{-\delta l}) \cdot \cos \gamma l \\ \cdot (e^{\delta x} - e^{-\delta x}) \cdot \cos \gamma x \sin \beta t \end{array} \right\} \quad (1)$$

wo $\delta = \frac{V - \beta^2 + \sqrt{V^2 + 4\varepsilon^2\beta^2}}{a\sqrt{2}}$ oder angenähert $\delta = \frac{\varepsilon}{a} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\beta^2}\right)$
 $\gamma = \frac{\sqrt{\beta^2 + V^2 + 4\varepsilon^2\beta^2}}{a\sqrt{2}}$ „ $\gamma = \frac{\beta}{a} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{\beta^2}\right)$.

Man kann dieser Gleichung folgende Formen geben:

$$y = \frac{L}{\sqrt{e^{2\delta l + e^{-2\delta l - 2\cos 2\gamma l}}}} \cdot \left. \begin{aligned} &e^{\delta x} \cdot \cos(\gamma x + \beta t + \beta t_1) \\ &- e^{-\delta x} \cdot \cos(\gamma x - \beta t - \beta t_1) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wo $\beta t_1 = \arccot \left(\cot = \frac{e^{\delta l + e^{-\delta l}}}{e^{\delta l - e^{-\delta l}}} \cdot \operatorname{tg} \gamma l \right)$

und $y = M \cdot \sin(\beta t + \beta \tau)$, wo

$$\left. \begin{aligned} M &= L \cdot \sqrt{\frac{e^{2\delta x + e^{-2\delta x - 2\cos 2\gamma x}}}{e^{2\delta l + e^{-2\delta l - 2\cos 2\gamma l}}}} \\ - \operatorname{tg} \beta \tau &= \frac{1 - \frac{e^{\delta x + e^{-\delta x}}}{e^{\delta x - e^{-\delta x}}} \cdot \frac{e^{\delta l - e^{-\delta l}}}{e^{\delta l + e^{-\delta l}}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \gamma x}{\operatorname{tg} \gamma l}}{\operatorname{tg} \gamma x + \frac{e^{\delta x + e^{-\delta x}}}{e^{\delta x - e^{-\delta x}}} \cdot \frac{e^{\delta l - e^{-\delta l}}}{e^{\delta l + e^{-\delta l}}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma l}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Die zweite Form zeigt, daß man sich die Bewegung des Fadens hervorgebracht denken kann durch die Interferenz zweier Wellen, deren eine nach der positiven, deren andere nach der negativen Seite der x fortschreitet und welche beide im Fortschreiten an Intensität abnehmen. Durch diese Interferenz können aber die fortschreitenden Wellen nicht vollständig in stehende Wellen übergeführt werden, weil die sich kreuzenden Wellenzüge von ungleicher Intensität sind. Hierdurch entsteht eine Phasendifferenz zwischen den einzelnen Theilen des Fadens, wie die dritte Form deutlich zeigt. Aus dieser Form geht ferner hervor, daß ein Maximum der Resonanz des Fadens nahe eintritt für eine solche Länge (resp. Spannung), daß

$$\gamma l = k\pi$$

ein Minimum nahe für

$$\gamma l = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Die Kraft, welche auf die Masse M in $x = l$ wirkt, können wir setzen

$$-P \cdot \frac{\partial y}{\partial x}(x=l)$$

Entwickelt man diesen Ausdruck, so erhält man

$$\begin{aligned} -P \cdot \frac{\partial y}{\partial x}(x=l) &= -L \cdot P \cdot \frac{\delta(e^{2\delta l} - e^{-2\delta l}) + \gamma \cdot \sin 2\gamma l}{e^{2\delta l} + e^{-2\delta l} - 2\cos 2\gamma l} \cdot \sin \beta t \\ &\quad - L \cdot P \cdot \frac{-\delta \cdot \sin 2\gamma l + \gamma \cdot (e^{2\delta l} - e^{-2\delta l})}{e^{2\delta l} + e^{-2\delta l} - 2\cos 2\gamma l} \cdot \cos \beta t \end{aligned}$$

angenähert:

$$\begin{aligned} -P \cdot \frac{\partial y}{\partial x}(x=l) &= -L \cdot P \cdot \frac{4\delta^2 l + \gamma \cdot \sin 2\gamma l}{2(1 - \cos 2\gamma l) + 4\delta^2 l^2} \cdot \sin \beta t \\ &\quad - L \cdot P \cdot \delta \cdot \frac{4\gamma l - \sin 2\gamma l}{2(1 - \cos 2\gamma l) + 4\delta^2 l^2} \cdot \cos \beta t. \end{aligned}$$

Nun hat man für die Elongationen der Masse M in $x=l$
 $y = L \cdot \sin \beta t$

für die Geschwindigkeit $\frac{\partial y}{\partial t} = L \cdot \beta \cdot \cos \beta t$.

Daraus ist ersichtlich, daß die Kraft, welche auf die Masse in $x=l$ wirkt, sich aus zwei Theilen zusammensetzt:

1. Einen Theil proportional den Elongationen der Masse M . In diesem Theil ist das erste Glied des Zählers nur klein gegen das zweite, das zweite Glied aber, $\gamma \cdot \sin 2\gamma l$, ändert mit wachsendem l periodisch sein Zeichen. Da nun der Nenner immer positiv ist, so ändert der ganze Bruch mit wachsendem l periodisch sein Zeichen.

2. Einen Theil proportional der Geschwindigkeit der Masse M . Dieser Theil ist immer negativ, d. h. der Geschwindigkeit der Masse M entgegengerichtet; er wird Null, wenn δ Null wird; was eintritt, wenn der Widerstand gegen die Schwingungen des Fadens (die Gröfse b^2) Null gesetzt wird.

Beide Theile erreichen nahe ein Maximum für

$$\gamma l = k\pi,$$

d. h. für solche Verhältnisse des Fadens, für welche das Maximum der Resonanz desselben eintritt; und nahe ein Minimum für

$$\gamma l = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2},$$

d. h. wenn der Faden sich im Minimum der Resonanz befindet. Die Maximal- und Minimalwerthe verhalten sich zu einander wie

$$\frac{e^{\delta l} + e^{-\delta l}}{e^{\delta l} - e^{-\delta l}} : \frac{e^{\delta l} - e^{-\delta l}}{e^{\delta l} + e^{-\delta l}}.$$

Würde nun die Masse (Stimmgabel) nicht durch eine äußere Kraft in unabänderlicher Bewegung gehalten, sondern geschähen ihre Schwingungen unter dem Einflusse ihrer eigenen Elasticität, so müßte der erste Theil (proportional der Elongation) die Tonhöhe der Stimmgabel ändern, der zweite Theil (proportional und entgegengesetzt der Geschwindigkeit) die Schwingungen derselben dämpfen; und zwar müßten beide Wirkungen um so stärker seyn, je stärker die Resonanz des Fadens ist; ein Resultat, welches mit dem Versuch 5 vollkommen übereinstimmt.

Es ist klar, daß der zweite Theil der erwähnten Kraft, welcher der Geschwindigkeit der Masse M entgegengesetzt proportional ist und folglich die Schwingungen derselben dämpfen muß, seinen Ursprung jener Phasendifferenz verdankt, welche in der Form 3 klar hervortritt. Es war daher wünschenswerth, sich auch experimentell von jener Phasendifferenz zu überzeugen, insbesondere davon, daß die Phasendifferenz eines Punktes des Fadens gegen die Masse M sich ändert, wenn man durch Aenderung der Spannung die Stärke der Resonanz des Fadens ändert. Der Verfasser gelangte dahin mit Hülfe einer Methode, deren Princip kürzlich von Mach ¹⁾ angegeben und schon im März 1868 von Prof. Dr. Kundt der physikalischen Gesellschaft zu Berlin mitgetheilt wurde.

Fig. 5.

1) Pogg. Ann., Bd. 134, S. 311, Juniheft.

An die Zinken einer durch Elektromagnete bewegte Stimmgabel wurden kleine Messingstäbchen s und s' angeschraubt und von den beiden Endpunkten a und b des einen Stäbchens Fäden F und F' getrennt von einander in parallelen Ebenen fortgeführt; die Fäden kreuzten sich scheinbar in einem Punkte P und liefen von dort wieder auseinander und über zwei feste Rollen, so daß die Spannung derselben beliebig durch Gewichte geändert werden konnte. Bei P waren beide Fäden mit Wachs geglättet und mit Kreide gleichförmig geweißt; hinter P war ein schwarzer Schirm aufgestellt. Den beiden gleich langen Fäden ward zuerst gleiche Spannung gegeben. Wurde dann die Stimmgabel in Bewegung gesetzt, so hob sich von dem schwarzen Schirm ein viereckiges weißes Feld ab, welches von einer scharfen schwarzen Linie durchschnitten war; ein Beweis daß die beiden Fäden im scheinbaren Durchschnittspunkte P , mit gleicher Phase schwangen. Änderte man jetzt die Spannung des einen Fadens F , so änderte sich die Stärke der Resonanz desselben und man erhielt anstatt der geraden Linie eine Ellipse, wodurch bewiesen wurde, daß jetzt der Faden F gegen den Faden F' im Punkte P eine Phasendifferenz erhalten hatte; daß sich folglich auch die Phase des Punktes P des Fadens F gegen die Stimmgabelzinke geändert hatte.

Wenn man die Schwingungsbewegungen eines Systems ermittelte, welches sich von dem hier behandelten dadurch unterscheidet, daß die Masse M nicht durch eine äußere Kraft in einer gegebenen periodischen Bewegung erhalten wird, sondern eigenen elastischen und dämpfenden Kräften unterworfen ist, so würde man genau die Bedingungen des Versuches 5 in die Rechnung einführen. Man findet in diesem Falle, daß das System unendlich vieler Töne fähig ist, die sich aber in dem logarithmischen Dekrement der Schwingungsamplituden unterscheiden. Man findet nun, wenn man den Versuch 5 anstellt, daß im Allgemeinen nur ein Ton von dem System erhalten wird, daß aber in dem Falle, wo der Faden so abgestimmt ist, daß er sich nahe im Maximum der Resonanz befindet, zwei Töne von dem

System erhalten werden können, deren einer etwas höher, deren anderer etwas tiefer ist, als der Ton der isolirt schwingenden Gabel. Diese Erscheinung, welche auch die übrigen oben beschriebenen Systeme zeigen, wird man sich nach dem Vorhergehenden so zu denken haben, dafs im Allgemeinen nur ein Ton des Systems ein hinreichend kleines logarithmisches Dekrement der Amplituden besitzt, um zur Wahrnehmung zu gelangen, während in dem erwähnten speciellen Falle zwei Töne des Systems von hinlänglicher Dauer sind, um merklich in die Erscheinung zu treten.

Berlin d. 10. Dec. 1868.

VII. *Zur Geschichte des Ozon;* *von R. Clausius.*

Im neusten Hefte des *Repertoriums für Experimentalphysik* von Ph. Carl (Bd. IV, S. 251) befindet sich ein Aufsatz mit dem Titel, »Geschichte des Ozons«, welcher aus der Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie entnommen ist, und welcher ursprünglich aus dem englischen Journale: *The Intellectual Observer* stammt. Ein Punkt dieses Aufsatzes nöthigt mich zu einer kurzen Bemerkung.

Es wird dort die Erklärung des Ozon in folgender Weise besprochen. Nachdem von den Versuchen von Andrews und Tait die Rede gewesen ist, nach welchen Sauerstoff, der Ozon enthält, dasselbe Volumen einnimmt, als ob das Ozon nicht vorhanden wäre, und dabei gesagt ist, dafs dieses Resultat seine Entdecker in Erstaunen und Verlegenheit gesetzt habe, heifst es weiter: »Bald indefs ergofs sich neues Licht über dasselbe. Die Experimente waren zu schlagend und dabei zu sorgfältig vorgenommen worden, um lange unfruchtbar zu bleiben, und gerade die Absurdität, welche sie in sich zu schliessen scheinen, brach-