Der Modul des Maximum Maximorum einer Function $\psi(re^{\varphi i})$ in Bezug auf φ und die Anwendung seiner Eigenschaften auf die Reihe von Lagrange.

Von

P. NEKRASSOFF in Moskau.

§ 1.

Der vorliegende Aufsatz enthält einige Resultate meiner in russischer Sprache abgedruckten Arbeit:*) „Die Reihe von Lagrange“.

Setzen wir $z = re^{\varphi i}$. Wenn sich φ von 0 bis 2π ändert, so wird der *Modulus des Maximum Maximorum* der Function $\psi(z)$ eine Function von r sein; nennen wir diese Function $M(r)$. Cauchy, Rouché und andere haben die Eigenschaften der Function $M(r)$ auf die Reihe von Lagrange so wie auf andere Reihen angewandt.***) Jedoch ist Verschiedenes in der Anwendung der Eigenschaften von $M(r)$ auf diese Reihen nicht klar gelegt worden. So folgt, z. B. aus einigen Anmerkungen, welche Serret macht, indem er die Eigenschaften der Function $M(r)$ nach Cauchy und Rouché zusammenfasst, dass unter gewissen Bedingungen das Minimum μ der Function $M(r)$ und der dazu gehörige Werth ϱ der Variablen r sich folgendermassen ausdrücken lassen:

$$(1) \quad \mu = \text{mod. } \psi(\xi), \quad \varrho = \text{mod. } \xi,$$

wo ξ eine Wurzel der Gleichung

$$(2) \quad \psi'(z) = 0$$

ist.***)

*) Математический Сборникъ, XII, Москва, 1885.

**) Cauchy: 1) Mémoire sur divers points d'analyse (Mémoires de l'Académie de France, t. VIII, 1829), 2) Résumé d'un mémoire sur la Mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites. (Exercices d'analyse et de physique mathématique, t. II, 1841).

Eugène Rouché: Mémoire sur la série de Lagrange (Journal de l'Ecole polytechnique, cahier XXXIX, t. XXII, 1862).

***) Serret: Cours d'Algèbre supérieure, t. I, p. 477—480, 4^e édition, 1877.

Es erweist sich, dass das im Allgemeinen nicht der Fall ist. Dieser Umstand wird für gewöhnlich ausser Acht gelassen, spielt aber in der Theorie der Lagrange'schen Reihe, wie sie so elegant in der Rouché'schen Abhandlung dargelegt ist, eine grosse Rolle.

Die nachfolgenden Untersuchungen der Function $M(r)$ und ihres Minimums μ dürften eine wesentliche Ergänzung zu den Cauchy'schen und Rouché'schen Arbeiten liefern.

I. Die Eigenschaften des Modulus des Maximum Maximorum.

§ 2.

Es möge $\psi(z)$ für alle Werthe von z , welche der Ungleichung

$$(3) \quad k < r < k_1$$

genügen, endlich, continuirlich und eindeutig sein; $r = \text{mod. } z$, $k_1 > k > 0$. Den Modulus der Function $\psi(z)$, welcher von r und φ abhängt, wollen wir $R(r, \varphi)$, oder kürzer R nennen.

Solange der Bedingung (3) Genüge geleistet wird, bleibt R endlich und continuirlich und macht bei der Veränderung von φ verschiedene Maxima durch, deren jedes eine Function von r ist. Es mögen $M_1(r)$, $M_2(r)$, ... diese Maxima sein. Jede einzelne von diesen Functionen kann dann folgendermassen ausgedrückt werden:

$$(4) \quad M_n(r) = R(r, \varphi_n),$$

wo φ_n eine Wurzel der Gleichung

$$(5) \quad \frac{dR}{d\varphi} = 0$$

ist.

Das Maximum Maximorum der Function $\psi(z)$ in Bezug auf φ ist $M(r)$; diese Function ist daher in der Reihe $M_1(r)$, $M_2(r)$, ... enthalten, und zwar ist:

$$(6) \quad M(r) \geq M_1(r), \quad M(r) \geq M_2(r), \quad \dots$$

Die Bedingungen (6), durch welche $M(r)$ definirt wird, haben auf die analytische Form dieser Function einen eigenthümlichen Einfluss: Wenn r von k bis k_1 variirt, kann die Function $M(r)$ ihre Gestalt ändern, indem sie für den einen Werth von r durch die eine, für einen andern Werth von r durch eine andere Function aus der Reihe: $M_1(r)$, $M_2(r)$, ... dargestellt wird.

Ehe wir unsere Betrachtungen über die Veränderungen in der Form der Function $M(r)$ anstellen, müssen wir unsere Aufmerksamkeit den Functionen $M_1(r)$, $M_2(r)$, ... zuwenden, welche wir *partielle* Maxima der Function R in Bezug auf φ nennen wollen.

§ 3.

Die Anzahl der partiellen Maxima $M_1(r)$, $M_2(r)$, . . . der Function R in Bezug auf φ bleibt für die verschiedenen Werthe von r nicht constant. Die Veränderung dieser Zahl wird durch Folgendes bedingt:

1) Dadurch, dass bei der Veränderung der Variabeln r von einem Werth zum andern ein partielles Maximum zum Minimum werden kann, und umgekehrt. Es sei z. B.

$$\left[\frac{d^2 R}{d\varphi^2} \right]_{\varphi=\varphi_n} < 0, \quad \text{wenn } r < \varrho,$$

$$\left[\frac{d^2 R}{d\varphi^2} \right]_{\varphi=\varphi_n} > 0, \quad \text{wenn } r > \varrho.$$

Unter solchen Umständen wird $M_n(r)$, solange $r < \varrho$, ein Maximum der Function R sein; wenn hingegen $r > \varrho$, ein Minimum. Es sei bemerkt, dass $\frac{d^2 R}{d\varphi^2} = 0$ ist, wenn $\varphi = \varphi_n$ und $r = \varrho$; die Gleichung (5) hat also für $r = \varrho$ zwei gleiche Wurzeln φ_n .

2) Durch das Verschwinden oder Entstehen eines partiellen Maximums, indem infolge der Veränderung von r eine reelle Wurzel der Gleichung (5) complex wird oder, umgekehrt: eine complexe Wurzel reell. Da alle Coefficienten der Gleichung (5) reell sind, so sind alle complexen Wurzeln dieser Gleichung paarweise conjugirt, und es kann daher eine complexe Wurzel nicht reell, und eine reelle nicht complex werden, ohne zweimal Wurzel von (5) zu sein.

Die Werthe von r , bei denen sich die Anzahl der Maxima von R verändert, wollen wir *besondere* Werthe nennen, *besondere* wollen wir auch diejenigen Werthe von r nennen, welche die Derivirten der Function $M_n(r)$, mit irgend einer Ordnung angefangen, unendlich werden lassen. Aus der Gleichung (4) ersieht man, dass dank der Bedingung (3) die Derivirten der Function $M_n(r)$ nur für solche Werthe von r unendlich werden können, bei welchen die Gleichung (5) mehrere gleiche Wurzeln hat.

Alle diese besonderen Werthe von r und die entsprechenden Werthe von φ müssen gleichzeitig den zwei Bedingungen genügen:

$$(7) \quad \frac{dR}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d^2 R}{d\varphi^2} = 0.$$

Daher können die Gleichungen (7) im Verein mit den bereits erwähnten, die besondern Werthe von r kennzeichnenden Merkmalen zur Bestimmung dieser Werthe dienen.

Es seien $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ alle zwischen den Grenzen k und k_1 enthaltenen besondern Werthe von r , und zwar sei:

$$(8) \quad k < \varrho_1 < \varrho_2 < \dots < k_1.$$

Es ist klar, dass für alle Werthe von r , welche zwischen zwei benachbarten Gliedern dieser Zahlenreihe liegen, die Anzahl der partiellen Maxima von R gleich ist, und sowohl jedes einzelne Maximum als auch alle seine Derivirten nach r endliche und continuirliche Functionen von r sind.

Wenn r_0 keiner von den Zahlen $k, \varrho_1, \varrho_2, \dots, k_1$ gleich ist, so kann jedes partielle Maximum der Function R für die Werthe von r , welche wenig von r_0 unterschieden sind, nach der Taylor'schen Formel in die convergente Reihe:

$$(9) \quad M_n(r) = M_n(r_0) + M'_n(r_0) \frac{r-r_0}{1} + M''_n(r_0) \frac{(r-r_0)^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

entwickelt werden.

§ 4.

Schreiten wir jetzt zur Untersuchung der Veränderungen in der Gestalt der Function $M(r)$. Es variire r zwischen zwei Zahlen ϱ_m und ϱ_{m+1} aus der Zahlenreihe $k, \varrho_1, \varrho_2, \dots, k_1$.

Nehmen wir an, für $\varrho_m < r < \varrho_{m+1}$ gebe es nur zwei partielle Maxima $M_1(r)$ und $M_2(r)$ der Function R . Betrachten wir die Gleichung:

$$(10) \quad M_1(r) - M_2(r) = 0,$$

welche zwischen den Grenzen ϱ_m und ϱ_{m+1} einfache und gleiche Wurzeln haben kann. Unter $r_1, r_2, \dots$ wollen wir die einfachen, so wie diejenigen Wurzeln verstehen, welche eine ungerade Anzahl von Malen der Gleichung genügen; die letztern wollen wir ungerade-vielfache Wurzeln von (10) nennen. Bei jedem von den Werthen $r_1, r_2, \dots$ der Variablen r muss die Function $M(r)$ ihre Gestalt ändern. Da nämlich jedes r_k ungerade-vielfache Wurzel von (10) ist, so kann man die linke Seite von (10) in folgender Weise darstellen:

$$(11) \quad M_1(r) - M_2(r) = F(r) (r - r_1)^{2s+1},$$

wo s eine ganze Zahl und $F(r)$ eine endliche Function ist, welche bei keinem Werthe von r zwischen den Grenzen ϱ_m und r_2 ihr Vorzeichen verändert und für $\varrho = r_1$ nicht gleich 0 wird. Es sei $F(r_1) < 0$. Aus (11) ist leicht ersichtlich, dass

$$(12) \quad \begin{aligned} M_1(r) - M_2(r) &\geq 0, & \text{wenn} & \quad \varrho_m \leq r \leq r_1, \\ M_1(r) - M_2(r) &\leq 0, & \text{wenn} & \quad r_1 \leq r \leq r_2. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$(13) \quad \begin{aligned} M(r) &= M_1(r) & , & \quad \text{wenn} & \quad \varrho_m \leq r \leq r_1, \\ M(r) &= M_2(r) & , & \quad \text{wenn} & \quad r_1 \leq r \leq r_2. \end{aligned}$$

Wenn also r den Werth r_1 überschreitet, ändert sich die Form von $M(r)$; dasselbe geschieht beim Ueberschreiten eines jeden der Werthe $r_1, r_2, \dots$

Jetzt wollen wir annehmen, in den Grenzen $\varrho_m < r < \varrho_{m+1}$ existiren drei verschiedene partielle Maxima $M_1(r)$, $M_2(r)$, $M_3(r)$. Für $r = \varrho_m$ mag $M_1(r)$ den grössten Werth unter diesen drei Functionen haben. Wenn aber für $r = \varrho_m$ die Werthe von zwei oder gar allen drei Functionen gleich sind, so wollen wir annehmen, für den Werth $\varrho_m + \varepsilon$ habe $M_1(r)$ den grössten Werth, wo ε eine unendlich kleine positive Grösse ist. Wir erhalten dann:

$$(14) \quad \begin{aligned} M_1(\varrho_m + \varepsilon) &> M_2(\varrho_m + \varepsilon), \quad M_1(\varrho_m + \varepsilon) > M_3(\varrho_m + \varepsilon), \\ M(\varrho_m + \varepsilon) &= M_1(\varrho_m + \varepsilon). \end{aligned}$$

Betrachten wir jetzt die zwei Gleichungen:

$$(15) \quad \begin{aligned} M_1(r) - M_2(r) &= 0, \\ M_1(r) - M_3(r) &= 0, \end{aligned}$$

von denen jede einzelne zwischen den Grenzen ϱ_m und ϱ_{m+1} einfache und ungerade-vielfache Wurzeln besitzen kann. Es sei r_1 die kleinste von allen diesen Wurzeln. Wenn $\varrho_m \leq r \leq r_1$, so erhalten wir offenbar:

$$(16) \quad M_1(r) - M_2(r) > 0 \quad \text{und} \quad M_1(r) - M_3(r) > 0,$$

sodass

$$(17) \quad M(r) = M_1(r).$$

Sobald aber r den Werth r_1 überschreitet, ändert sich die Gestalt der Function $M(r)$, da für $r > r_1$ wenigstens eine von den Ungleichungen (16) ihre Gültigkeit verliert. $M(r)$ wird daher entweder durch $M_2(r)$ oder durch $M_3(r)$ dargestellt, durch welches von beiden, das hängt davon ab, welcher der beiden Gleichungen (15) die Wurzel r_1 eine ungerade Anzahl von Malen genügt. Es sei

$$(18) \quad M(r_1 + \varepsilon) = M_3(r_1 + \varepsilon),$$

wo ε eine unendlich kleine positive Zahl ist. Wenn zwischen den Grenzen r_1 und ϱ_{m+1} eine neue Veränderung in der Form von $M(r)$ möglich ist, so entspricht dieselbe der kleinsten einfachen oder ungerade-vielfachen Wurzel der Gleichungen:

$$(19) \quad \begin{aligned} M_3(r) - M_1(r) &= 0, \\ M_3(r) - M_2(r) &= 0. \end{aligned}$$

Indem wir diesen Plan weiter verfolgen, können wir alle Veränderungen in der Gestalt von $M(r)$ für die Werthe von r zwischen zwei beliebigen ϱ_m und ϱ_{m+1} finden. Es sei noch bemerkt, dass derartige Formveränderungen auch zuweilen stattfinden können, wenn r

einige von den Werthen $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ überschreitet. Da nun die Gestalt von $M(r)$ für alle Werthe, welche $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ unendlich nahe liegen, ermittelt ist, können auch diese Formveränderungen keine Schwierigkeiten bereiten.

§ 5.

Wenn r einen von den Werthen $r_1, r_2, \dots$ überschreitet, hört die Function $M(r)$ nicht auf continuirlich zu sein, wohl aber ihre Derivirten, von irgend einer Ordnung an, sodass die zwei Reihen:

$$(20) \quad \begin{aligned} &M'(r_1 - \varepsilon), M''(r_1 - \varepsilon), \dots \\ &M'(r_1 + \varepsilon), M''(r_1 + \varepsilon), \dots \end{aligned}$$

wenn ε gleich Null wird, nicht identisch werden.

Anmerkung: Es können Störungen in der Continuität von $M'(r)$, $M''(r)$ u. s. w. auch durch andere Umstände hervorgerufen werden. Es ist möglich, dass die Derivirten von $M(r)$ für $r = \varrho'$ von irgend einer Ordnung ab unendlich werden; ohne dass $M(r)$ bei diesem Werthe von r seine Form ändert. Wenn dieser Fall eintritt, so muss ϱ' einem von den oben genannten besonderen Werthen $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ des Modulus r gleich sein. Dann lässt sich $M(r)$ durch folgende convergente Reihe ausdrücken:

$$(21) \quad M(r) = M(\varrho') + A(r - \varrho')^{\frac{1}{m}} + B(r - \varrho')^{\frac{2}{m}} + \dots,$$

wo m eine ganze ungerade Zahl ist. Die von einander verschiedenen unter den unendlich grossen Gliedern der Reihen:

$$(22) \quad \begin{aligned} &M'(\varrho' - \varepsilon), M''(\varrho' - \varepsilon), \dots \\ &M'(\varrho' + \varepsilon), M''(\varrho' + \varepsilon), \dots \end{aligned}$$

werden sich durch ihr Vorzeichen unterscheiden.

Die in dieser Anmerkung geschilderten Störungen in der Continuität der Derivirten von $M(r)$ spielen eine ebenso grosse Rolle, wie die Continuitätsstörungen, welche von Veränderungen in der Form von $M(r)$ begleitet sind.

Offenbar ist die Anzahl aller Continuitätsstörungen der Derivirten von $M(r)$ endlich, sobald $\psi(z)$ eine rationale algebraische Function ist.

§ 6.

Wenn ε unendlich klein ist und es bestehen die beiden Ungleichungen:

$$(23) \quad M(\varrho - \varepsilon) > M(\varrho) \quad \text{und} \quad M(\varrho + \varepsilon) > M(\varrho)$$

oder die beiden folgenden:

$$(24) \quad M(\varrho - \varepsilon) < M(\varrho) \quad \text{und} \quad M(\varrho + \varepsilon) < M(\varrho),$$

so nennen wir $\mu = M(\rho)$ im ersten Falle ein Minimum, im zweiten — ein Maximum der Function $M(r)$, und zwar ein *besonderes* oder ein *gewöhnliches*, je nachdem dem Werth ρ der Variablen r eine Continuitätsstörung der Derivirten von $M(r)$ entspricht oder nicht.

Theorem: Es sei $\psi(z)$ in den Grenzen

$$k < \text{mod. } z < k_1$$

endlich, continuirlich und eindeutig. Dann kann $M(r)$, der Modulus des Maximum Maximorum der Function $\psi(z)$, in den Grenzen $k < r < k_1$ kein Maximum haben.

Beweis: Nehmen wir das Gegentheil an, dass also für $r = \rho$ die Function $M(r)$ ein Maximum $M(\rho)$ hat. Es sei ω eine Wurzel der Gleichung

$$\frac{dR(\rho, \varphi)}{d\varphi} = 0,$$

welche dem Maximum Maximorum der Function $R(\rho, \varphi)$ in Bezug auf φ entspricht. Daraus folgt:

$$(25) \quad M(\rho) = R(\rho, \omega) = \text{mod. } \psi(z_0),$$

wo

$$(26) \quad z_0 = \rho e^{\omega i}.$$

In der Zahlenreihe

$$\psi'(z_0), \psi''(z_0), \dots$$

sei $\psi^{(n)}(z_0)$ die erste Function, welche nicht gleich Null ist; $n \geq 1$. Wenn h unendlich klein ist, erhalten wir:

$$\psi(z_0 + h) = \psi(z_0) + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} \psi^{(n)}(z_0)(1 + \lambda),$$

wo λ unendlich klein ist und gleichzeitig mit h verschwindet. Wenn wir daher unter P und Ω Modulus und Argument der Function

$$\frac{\psi^{(n)}(z_0)}{1 \cdot 2 \dots n \psi(z_0)}$$

verstehen und

$$h = \delta e^{-\frac{\Omega}{n} i}$$

setzen, wo δ der unendlich kleine Modulus von h ist, so erhalten wir:

$$\varphi \left(z_0 + \delta e^{-\frac{\Omega}{n} i} \right) = \psi(z_0) [1 + \delta^n P(1 + \lambda)],$$

woraus folgt:

$$\text{mod. } \psi \left(z_0 + \delta e^{-\frac{\Omega}{n} i} \right) = M(\rho) [1 + \delta^n P(1 + \delta')],$$

wo δ eine unendlich kleine reelle Zahl ist, welche sich gleichzeitig mit h der Null nähert. Die letzte Gleichung zeigt: wenn δ positiv ist, so gilt:

$$\text{mod. } \psi \left(z_0 + \delta e^{-\frac{\Omega}{n} i} \right) > M(\rho),$$

oder, wenn wir unter $\varrho + \varepsilon$ und ω' Modulus und Argument von $z_0 + \delta e^{-\frac{\Omega i}{n}}$ verstehen:

$$R(\varrho + \varepsilon, \omega') > M(\varrho).$$

Da nun $M(\varrho + \varepsilon)$ das Maximum Maximorum der Function $R(\varrho + \varepsilon, \varphi)$ ist, so folgt:

$$(27) \quad M(\varrho + \varepsilon) > M(\varrho),$$

was unserer Voraussetzung widerspricht. Also kann $M(r)$ in den Grenzen k und k_1 keine Maxima haben.

Aus dem bewiesenen Theorem folgt unmittelbar:

I) Wenn $\psi(z)$ den genannten Anforderungen genügt, so hat $M(r)$ zwischen den Grenzen k und k_1 höchstens ein Minimum.

II) Wenn $\psi(z)$ den genannten Anforderungen genügt, und es ist: $M(k) = \infty$, $M(k_1) = \infty$, so erleidet $M(r)$ zwischen den Grenzen k und k_1 ein Minimum.

Es sei $\mu = M(\varrho)$ ein Minimum der Function $M(r)$, wo $k < \varrho < k_1$. Ist dieses Minimum ein gewöhnliches, so erhalten wir:

$$(28) \quad M'(\varrho) = 0.$$

Ist aber das Minimum μ der Function $M(r)$ ein besonderes, so kann die Derivirte $M'(\varrho)$ zwei verschiedene Werthe haben, welche als Grenzwerte von $M'(\varrho - \varepsilon)$ und $M'(\varrho + \varepsilon)$ bestimmt sind. Diese beiden Grenzwerte können von Null verschieden sein und müssen entgegengesetzte Vorzeichen haben.

§ 7.

Wir wollen im Folgenden mit μ und ϱ immer das Minimum der Function $M(r)$ und den dazu gehörigen Werth der Variablen r bezeichnen.

Hat die Gleichung

$$(29) \quad \psi'(z) = 0$$

eine Wurzel ξ , welche die Bedingungen:

$$(30) \quad \mu = \text{mod. } \psi(\xi), \quad \varrho = \text{mod. } \xi$$

erfüllt, so wollen wir dieses Minimum $\mu = M(\varrho)$ ein *kritisches* Minimum von $M(r)$ nennen. Wenn die Gleichung (29) hingegen keine Wurzeln besitzt, welche die Bedingung (30) erfüllen, so nennen wir μ ein *nicht kritisches* Minimum der Function $M(r)$.

Bei der Anwendung der Eigenschaften von $M(r)$ auf die Reihe von Lagrange ist der Umstand, ob das Minimum μ der Function $M(r)$ ein kritisches oder ein nicht kritisches ist, von der grössten Wichtigkeit.

Setzen wir:

$$z = r e^{\varphi i}, \quad \psi(z) = R e^{\Phi i},$$

so erhalten wir, indem wir die letzte Gleichung nach φ und r differenziren:

$$(31) \quad \begin{aligned} \psi'(z) \frac{z}{r} &= e^{\Phi i} \left(\frac{dR}{dr} + i R \frac{d\Phi}{dr} \right), \\ \psi'(z) z i &= e^{\Phi i} \left(\frac{dR}{d\varphi} + i R \frac{d\Phi}{d\varphi} \right), \end{aligned}$$

woraus sich ergibt:

$$(32) \quad \frac{dR}{d\varphi} = -r R \frac{d\Phi}{dr}, \quad r \frac{dR}{dr} = R \frac{d\Phi}{d\varphi}.$$

Aus (31), (32) und (28) lässt sich leicht ersehen, dass ein gewöhnliches Minimum der Function $M(r)$ stets kritisch ist. In der That, es sei $\varphi = \omega$ eine solche Wurzel der Gleichung

$$(33) \quad \frac{dR(\varrho, \varphi)}{d\varphi} = 0,$$

welche dem Maximum Maximorum der Function $R(\varrho, \varphi)$ in Bezug auf φ entspricht; wir erhalten dann:

$$(34) \quad \mu = M(\varrho) = R(\varrho, \omega) = \text{mod. } \psi(\xi), \quad \xi = \varrho e^{\omega i}.$$

Aus (33), (34) und (28) überzeugen wir uns leicht, dass die Werthe $r = \varrho$, $\varphi = \omega$ gleichzeitig den Gleichungen

$$(35) \quad \frac{dR}{d\varphi} = 0, \quad \frac{dR}{dr} = 0$$

genügen müssen. Aus (35), (32), (31) ergibt sich, dass:

$$(36) \quad \psi'(\xi) = 0.$$

(34) und (36) beweisen, dass ein gewöhnliches Minimum μ der Function $M(r)$ kritisch ist.

Durch ganz ähnliche Betrachtungen könnten wir uns überzeugen, dass auch ein besonderes Minimum kritisch ist, wenn nur

$$[\lim M'(\varrho - \varepsilon)]_{\varepsilon=0} \quad \text{oder} \quad [\lim M'(\varrho + \varepsilon)]_{\varepsilon=0}$$

den Werth Null hat.

In einigen seltenen Fällen kann das Minimum μ der Function $M(r)$ auch dann kritisch sein, wenn beide Grenzwerte

$$M'(\varrho - 0) \quad \text{und} \quad M'(\varrho + 0)$$

von Null verschieden sind und entgegengesetzte Vorzeichen haben. Dieses ist nur in einem Falle möglich: wenn nämlich die Gleichung (5) eine reelle Wurzel φ besitzt, welcher ein Werth von R entspricht, der von $M(r)$ verschieden ist, solange r nicht gleich ϱ ist, wohl aber $M(r)$ gleich wird, sobald $r = \varrho$, wobei die Wurzel φ für $r = \varrho$ der Gleichung

$$\psi'(r e^{\varphi i}) = 0$$

genügen muss.

Wenn alle diese Ausnahmefälle nicht eintreten und die Grenzwerte

$$M'(\varrho - 0) \quad \text{und} \quad M'(\varrho + 0)$$

von Null verschieden sind, so ist das Minimum $\mu = M(\varphi)$ der Function $M(r)$ *kein kritisches*.

Da die Function $M'(r)$ öfters Unterbrechung ihrer Continuität erleidet, so ist das Minimum μ der Function $M(r)$ häufig ein besonderes, ohne ein kritisches zu sein.

Es ist evident, dass jedes nicht kritische Minimum der Function $M(r)$ ein besonderes ist.

§ 8.

Wir nehmen einige Beispiele durch, in denen wir das Minimum μ der Function $M(r)$ bestimmen; und zwar wird dieses Minimum jedesmal *nicht kritisch* sein.

Beispiel I. Es sei

$$\psi(z) = \frac{1 + 18z - 3z^2 + 2z^3}{z}.$$

Der Modulus des Maximum Maximorum der gegebenen Function wird für $r = 0$ und für $r = \infty$ unendlich; folglich muss er, wenn wir r sich von 0 bis ∞ ändern lassen, ein Minimum durchmachen. Für unser Beispiel erhalten wir:

$$\begin{aligned} R = \text{mod. } \psi(re^{i\varphi}) &= [r^{-2} + 330 - 63r^2 + 4r^4 \\ &\quad + 12\left(\frac{3}{r} - 10r - r^3\right)\cos\varphi - 12(1 - 12r^2)\cos^2\varphi + 16r\cos^3\varphi]^{\frac{1}{2}}, \\ R \frac{dR}{d\varphi} &= -6\sin\varphi \left[\frac{3}{r} - 10r - r^3 - 2(1 - 12r^2)\cos\varphi + 4r\cos^2\varphi\right], \\ R \frac{d^2R}{d\varphi^2} + \left(\frac{dR}{d\varphi}\right)^2 &= -6\cos\varphi \left[\frac{3}{r} - 10r - r^3 - 2(1 - 12r^2)\cos\varphi + 4r\cos^2\varphi\right] \\ &\quad + 12\sin^2\varphi [12r^2 - 1 + 4r\cos\varphi]. \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$(37) \quad \frac{dR}{d\varphi} = 0$$

besitzt folgende Wurzeln:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0, \quad \varphi_2 = \pi, \\ \varphi_3 &= \arccos\left(\frac{1}{4r} - 3r - \frac{1}{4r}\sqrt{148r^4 + 16r^2 - 11}\right), \\ \varphi_4 &= \arccos\left(\frac{1}{4r} - 3r + \frac{1}{4r}\sqrt{148r^4 + 16r^2 - 11}\right). \end{aligned}$$

Die Bedingung

$$(38) \quad \frac{d^2R}{d\varphi^2} < 0,$$

durch welche ein partielles Maximum charakterisirt wird, ergiebt für $\varphi = \varphi_1 = 0$

$$(39) \quad r^4 - 24r^3 + 6r^2 + 2r - 3 < 0.$$

Die Gleichung $r^4 - 24r^3 + 6r^2 + 2r - 3 = 0$ besitzt nur eine positive Wurzel

$$(40) \quad \varrho_3 = 23, 73 \dots;$$

daher ist die Function

$$(41) \quad M_1(r) = \text{mod. } \psi(r)$$

für alle $0 < r < \varrho_3$ partielles Maximum von R in Bezug auf φ , für $\varrho_3 < r < \infty$ aber ein Minimum von R in Bezug auf φ .

Setzen wir $\varphi = \varphi_2 = \pi$, so ergibt (38)

$$(42) \quad r^4 + 24r^3 + 6r^2 - 2r - 3 > 0.$$

Die Gleichung

$$r^4 + 24r^3 + 6r^2 - 2r - 3 = 0$$

hat nur eine positive Wurzel

$$(43) \quad \varrho_2 = 0,47368 \dots;$$

daraus folgt, dass

$$(44) \quad M_2(r) = \text{mod. } \psi(-r)$$

für $\varrho_2 < r < \infty$ ein partielles Maximum von R in Bezug auf φ ist, für $0 < r < \varrho_2$ ein Minimum.

Die Wurzel φ_3 der Gleichung (37) ist nur dann reell, wenn

$$148r^4 + 16r^2 - 11 \geq 0, \\ -1 \leq \cos \varphi_3 \leq 1.$$

Die erste von diesen zwei Bedingungen wird nur dann erfüllt, wenn

$$r \geq \varrho_1,$$

wo

$$\varrho_1 = 0,47315 \dots$$

die positive Wurzel der Gleichung

$$148r^4 + 16r^2 - 11 = 0$$

ist.

Die Bedingung

$$\cos \varphi_3 \leq +1$$

ist identisch mit der Bedingung

$$r^4 + 24r^3 + 6r^2 - 2r - 3 \leq 0$$

und wird nur dann erfüllt, wenn

$$r \leq \varrho_2.$$

Ist $\varrho_1 \leq r \leq \varrho_2$, so ist auch die Bedingung:

$$\cos \varphi_3 \geq -1$$

erfüllt, und die Wurzel φ_3 ist reell. Ausserdem zeigt die Bedingung (38), welche für $\varphi = \varphi_3$ die Form

$$\cos \varphi_3 < \frac{1}{4r} - 3r$$

annimmt, dass zwischen den Grenzen ϱ_1 und ϱ_2 die Function

$$(45) \quad M_3(r) = \text{mod. } \psi(re^{\varphi i})$$

ein partielles Maximum von R in Bezug auf φ ist.

Die Bedingung (38), welche für $\varphi = \varphi_4$ die Form

$$\cos \varphi_4 < \frac{1}{4r} - 3$$

annimmt, kann nicht erfüllt werden.

So sehen wir, dass R folgende partielle Maxima hat:

- 1) für $0 < r < \varrho_1$ — ein Maximum $M_1(r)$,
- 2) für $\varrho_1 < r < \varrho_2$ — zwei Maxima $M_1(r)$ und $M_3(r)$,
- 3) für $\varrho_2 < r < \varrho_3$ — zwei Maxima $M_1(r)$ und $M_2(r)$,
- 4) für $\varrho_3 < r < \infty$ — ein Maximum $M_2(r)$.

In dem Intervall $\varrho_2 < r < \varrho_3$ stellt die grössere von den zwei Functionen $M_1(r)$ und $M_2(r)$ das Maximum Maximorum $M(r)$ dar; die Gleichung:

$$M_1(r) - M_2(r) = 0,$$

oder

$$1 - 3r^2 = 0$$

lässt in den Grenzen ϱ_2 und ϱ_3 eine einfache Wurzel zu:

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577 \dots$$

Daher tritt bei $r = \varrho$ eine Formveränderung von $M(r)$ ein:

$$\text{für } \varrho_2 \leq r \leq \varrho \quad \text{ist} \quad M(r) = M_1(r),$$

$$\text{für } \varrho \leq r \leq \varrho_3 \quad \text{ist} \quad M(r) = M_2(r).$$

Die Grenzwerte

$$M'(\varrho - 0) \quad \text{und} \quad M'(\varrho + 0)$$

nehmen folgende Zahlenwerthe an:

$$M'(\varrho - 0) = -6 + \frac{4}{\sqrt{3}},$$

$$M'(\varrho + 0) = +6 + \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Diese beiden Grenzwerte sind also von Null verschieden und haben entgegengesetzte Vorzeichen. Folglich ist

$$(46) \quad \mu = M(\varrho) = 20$$

ein besonderes und zwar ein nicht kritisches Minimum der Function $M(r)$. Dem § 7 zufolge kann $M(r)$ keine anderen Minima haben.

Beispiel II. Es sei

$$\psi(z) = \frac{1}{z(z+4)(z-7)^2}.$$

Der Modul des Maximum Maximorum wird für $r = 0$, $r = 4$, $r = 7$ unendlich, muss also in den Intervallen $0 < r < 4$ und $4 < r < 7$ je ein Minimum haben. Wir wollen diese Minima bestimmen.

Im gegebenen Falle hat die Gleichung

$$\frac{dR}{d\varphi} = 0$$

folgende Wurzeln:

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi, \varphi_3 = \arccos\left(-\frac{5r^2 + 14}{84r}\right).$$

Unter der Voraussetzung $\varphi = \varphi_1 = 0$ ist die Bedingung

$$(47) \quad \frac{d^2 R}{d\varphi^2} < 0$$

für jeden positiven Werth von r erfüllt. Daher stellt

$$M_1(r) = \frac{1}{r(r+4)(r-7)^2}$$

für jeden Werth von r ein partielles Maximum von R in Bezug auf φ dar.

Setzen wir jetzt $\varphi = \varphi_2 = \pi$. Die Bedingung (47) nimmt dann folgende Form an:

$$5r^2 - 84r + 14 < 0$$

und wird erfüllt, wenn

$$\varrho_1 < r < \varrho_2,$$

wo

$$\varrho_1 = \frac{42 - \sqrt{1694}}{5} = 0,1683 \dots,$$

$$\varrho_2 = \frac{42 + \sqrt{1694}}{5} = 16,6316 \dots$$

Wenn also $\varrho_1 < r < \varrho_2$, so ist

$$M_2(r) = \text{mod. } \psi(-r)$$

ein partielles Maximum von R in Bezug auf φ .

Setzen wir endlich $\varphi = \varphi_3$. Aus (47) erhalten wir dann:

$$\sin^2 \varphi_3 < 0,$$

folglich entspricht der Wurzel φ_3 kein partielles Maximum von R .

Wenn wir $M(r)$ in den Grenzen $0 < r < 4$ verfolgen, sehen wir, dass R zwei partielle Maxima für $\varrho_1 < r < 4$ zulässt:

$$M_1(r) = \frac{1}{r(4+r)(7-r)^2},$$

$$M_2(r) = \frac{1}{r(4-r)(7+r)^2}.$$

Die Gleichung

$$M_1(r) - M_2(r) = 0$$

hat zwischen ϱ_1 und 4 eine ungerade-vielfache Wurzel:

$$\varrho = \sqrt[7]{7} = 2, 64 \dots$$

Daher ist:

$$M(r) = M_1(r), \quad \text{wenn } 0 < r \leq \varrho,$$

$$M(r) = M_2(r), \quad \text{wenn } \varrho \leq r < 4.$$

Die Derivirte $M'(r)$ hat für $r = \varrho$ zwei Werthe:

$$M'(\varrho - 0) = 14[M(\varrho)]^2 (1 - \sqrt[7]{7}),$$

$$M'(\varrho + 0) = 14[M(\varrho)]^2 (1 + \sqrt[7]{7}),$$

die von Null verschieden sind und entgegengesetzte Vorzeichen haben. Folglich ist:

$$(48) \quad \mu = M(\varrho) = \frac{1}{126\sqrt[7]{7}}$$

ein besonderes, und zwar ein nicht kritisches Minimum von $M(r)$.

Zwischen den Grenzen $4 < r < 7$ hat R zwei partielle Maxima:

$$M_1(r) = \frac{1}{r(r+4)(7-r)^2},$$

$$M_2(r) = \frac{1}{r(r-4)(7+r)^2},$$

und die Gleichung

$$M_1(r) - M_2(r) = 0$$

hat zwischen den Grenzen 4 und 7 eine ungerade-vielfache Wurzel:

$$\varrho' = \sqrt[7]{19,6} = 1,4 \cdot \sqrt[7]{10} = 4,83 \dots$$

Daher ist:

$$M(r) = M_2(r), \quad \text{wenn } 4 < r \leq \varrho',$$

$$M(r) = M_1(r), \quad \text{wenn } \varrho' \leq r < 7.$$

Die Derivirte $M'(r)$ hat für $r = \varrho'$ zwei verschiedene Werthe:

$$M'(\varrho' - 0) = + [1,4 M(\varrho')]^2 (200 - 56 \sqrt[7]{10}),$$

$$M'(\varrho' + 0) = - [1,4 M(\varrho')]^2 (200 + 56 \sqrt[7]{10}).$$

Wieder sind diese zwei Grenzwerte von Null verschieden und ihre Vorzeichen entgegengesetzt, und

$$(49) \quad \mu = M(\varrho') = \frac{1}{246,96}$$

ist zwischen den Grenzen 4 und 7 ein besonderes und nicht kritisches Minimum von $M(r)$.

II. Anwendung der Eigenschaften des Modulus des Maximum Maximorum auf die Reihe von Lagrange.

§ 9.

Es sei $f(u+z)$ endlich, continuirlich und eindeutig für alle Werthe von z , welche die Bedingung

$$\text{mod. } z < k$$

erfüllen. Unter $M(r)$ wollen wir den Modulus des Maximum Maximorum von

$$\psi(z) = \frac{f(u+z)}{z}$$

verstehen, und zwar setzen wir voraus, dass $M(0) = \infty$ und $M(k) = \infty$. Das Minimum von $M(r)$ zwischen den Grenzen $0 < r < k$ nennen wir μ , und den entsprechenden Werth von r nennen wir ρ , so dass $\mu = M(\rho)$.

Auf Grund der Eigenschaften von $M(r)$ und der arithmetischen Mittel von der Form

$$\frac{F(z_1) + F(z_2) + \cdots + F(z_n)}{n},$$

wo

$$z_m = r e^{\frac{2m\pi i}{n}},$$

lassen sich folgende Sätze beweisen:

I. *Lehrsatz*: Wenn

$$(50) \quad \text{mod. } t < \frac{1}{M(r)},$$

wo $0 < r < k$, so besitzt die Gleichung

$$(51) \quad z - tf(u+z) = 0$$

nur eine Wurzel z_1 , deren Modulus kleiner ist als r .

II. *Lehrsatz*: Wenn die Bedingungen des Lehrsatzes I erfüllt sind und die Function $F(u+z)$ endlich, continuirlich und eindeutig ist für alle Werthe von z , welche der Bedingung

$$\text{mod. } z < r$$

genügen, so lässt sich $F(u+z_1)$, wo z_1 die Wurzel von (51) ist, nach der Formel von Lagrange in eine convergente Reihe entwickeln:

$$(52) \quad F(u+z_1) = F(u) + \frac{t}{1} F'(u) \{f(u)\} + \frac{t^2}{1 \cdot 2} \frac{d[F'(u) \{f(u)\}^2]}{du} + \dots$$

Diese Sätze sind in dem Mémoire von Rouché sowie in dem „Cours d'Algèbre supérieure“ von Serret bewiesen.

Wir wollen die Anwendung der Eigenschaften von $M(r)$ auf die Reihe von Lagrange nur in den Theilen besprechen, welche nicht genügend erläutert sind.

Das Gebiet derjenigen Werthe von t , welche die Bedingung (50) erfüllen, wird in der Fläche der Variablen durch alle innern Punkte des Kreises dargestellt, welcher um das Coordinatencentrum mit dem Radius

$$\frac{1}{M(r)}$$

beschrieben ist. Der genannte Radius wächst mit abnehmendem $M(r)$ und erreicht sein Maximum:

$$(53) \quad a = \frac{1}{\mu},$$

wenn $r = \rho$. Diesen Radius wollen wir: *Radius des Anwendbarkeitskreises der Eigenschaften von $M(r)$ auf die Reihe von Lagrange* nennen. Dieser Radius ist nicht immer gleich dem Convergenzradius b der Reihe von Lagrange, was zuweilen ausser Acht gelassen worden ist. Im Folgenden wollen wir untersuchen, wenn diese beiden Radien einander gleich sind; und zwar setzen wir voraus, dass die Reihe von Lagrange auf die ganze Function $F(u+z_1)$ angewandt ist; z_1 ist die Wurzel von (51).

§ 10.

Die Reihe von Lagrange

$$f(u) + \frac{t^2}{1.2} \frac{d[\{f(u)\}^2]}{du} + \dots + \frac{t^n}{1.2\dots n} \frac{d^{n-1}[\{f(u)\}^n]}{du^{n-1}} + \dots$$

wollen wir kürzer durch $s(t)$ bezeichnen.

Zunächst zwei Hülfsätze:

I. *Lemma*: Wenn

$$\text{mod. } t < \frac{1}{\mu},$$

so besitzt die Gleichung (51) nur eine Wurzel z_1 , deren Modulus kleiner ist als ρ , und diese lässt sich nach der Formel von Lagrange in eine convergente Reihe entwickeln:

$$(54) \quad z_1 = s(t).$$

Zu diesem Lemma gelangen wir, wenn wir in den Lehrsätzen I und II $r = \rho$ und $F(u+z) = u+z$ setzen.

II. *Lemma*: Es sei ξ eine Wurzel von

$$(55) \quad \psi'(z) = 0,$$

wo

$$\psi(z) = z^{-1}f(u+z);$$

ferner sei

$$(56) \quad t_0 = \frac{1}{\psi(\xi)} = \frac{1}{f'(u+\xi)}.$$

Ist die Reihe $s(t)$ convergent für alle Werthe von t , welche die Bedingung

$$(57) \quad \text{mod.} \left(\frac{t}{t_0} \right) < 1$$

erfüllen, und nähert sich $s(t)$ dem Werthe ξ , wenn t sich t_0 nähert, so ist

$$b = \text{mod.} (t_0)$$

der Convergenzradius der Reihe von Lagrange, so dass $s(t)$ convergent ist, so lange $\text{mod.} t < b$, und divergent wird, sobald $\text{mod.} t > b$.

Dieses Lemma folgt unmittelbar aus den Convergenzgesetzen derjenigen Reihen, in welche die Functionen nach der Taylor'schen und der Maclaurin'schen Formel entwickelt werden.

III. *Lehrsatz*: Ist das Minimum μ der Function $M(r)$ kritisch, so sind der Convergenzradius b der Reihe $s(t)$ und der Anwendbarkeitsradius a der Eigenschaften von $M(r)$ auf die Reihe $s(t)$ einander gleich.

Beweis: Es sei ξ diejenige Wurzel der Gleichung

$$\psi'(z) = 0,$$

welche dem kritischen Minimum μ der Function $M(r)$ entspricht, so dass

$$\mu = M(\varrho) = \text{mod.} \psi(\xi), \quad \xi = \varrho e^{w i}$$

und der Anwendbarkeitsradius der Eigenschaften von $M(r)$ auf $s(t)$ gleich:

$$(58) \quad a = \frac{1}{\mu} = \text{mod.} t_0$$

ist, wo

$$(59) \quad t_0 = \frac{1}{\psi(\xi)} = \frac{1}{f'(u+\xi)}.$$

Es sei

$$(60) \quad \text{mod.} \left(\frac{t}{t_0} \right) < 1.$$

Dann sind die Bedingungen des Lemma I erfüllt, und wir erhalten:

$$(61) \quad z_1 = s(t), \quad \text{mod.} z_1 < \varrho,$$

z_1 ist Wurzel der Gleichung (51), welcher man folgende Form geben kann:

$$(62) \quad 1 - t\psi(z) = 0.$$

Wenn $t = t_0$, so wird ξ dieser Gleichung $n \geq 2$ mal genügen. Wenn daher t dem Werthe t_0 unendlich nahe liegt, so muss (51) oder (62) n Wurzeln besitzen, welche sich unendlich wenig von ξ unterscheiden. Diese Wurzeln lassen sich folgendermassen darstellen:

$$(63) \quad z_m = \xi + (t_0 - t)^{\frac{1}{n}} e^{\frac{2m\pi i}{n}} \left\{ \frac{1 \cdot 2 \dots n}{t_0^n \psi^{(n)}(\xi)} \right\}^{\frac{1}{n}} (1 + \varepsilon),$$

wo m eine ganze Zahl ist und ε eine unendlich kleine Grösse, welche gleichzeitig mit $t_0 - t$ verschwindet. Setzen wir:

$$(64) \quad t_0 - t = p e^{q i}.$$

Ferner sei:

$$\frac{1}{\xi} \left(\frac{1 \cdot 2 \dots n}{t_0^2 \psi^{(n)}(\xi)} \right)^{\frac{1}{n}} = P e^{\Omega i},$$

dann ergibt sich:

$$(65) \quad \zeta_m = \xi \left\{ 1 + p^{\frac{1}{n}} P e^{\left(\frac{2m\pi + q}{n} + \Omega \right) i} (1 + \varepsilon) \right\}.$$

Suchen wir solche Werthe für m und q , dass die Bedingungen:

$$(66) \quad \text{mod.} \left(\frac{t}{t_0} \right) < 1, \quad \text{mod.} \zeta_m < \varrho$$

erfüllt werden. Aus (64) und (65) ist leicht ersichtlich, dass wenn p sehr klein ist, diese Bedingungen mit den folgenden identisch sind:

$$(66') \quad \cos(q - \tau) > 0, \quad \cos\left(\frac{2m\pi + q}{n} + \Omega\right) < 0,$$

wo τ das Argument von t_0 ist. Diesen Anforderungen können wir genügen, wenn wir q und m aus den Gleichungen

$$(67) \quad q - \tau = -\frac{\pi}{2} + \Theta\pi, \quad \frac{2m\pi + q}{n} + \Omega = \frac{\pi}{2} + \Theta_1\pi$$

bestimmen, wo Θ und Θ_1 ächte positive Brüche sind:

$$(68) \quad 0 < \Theta < 1, \quad 0 < \Theta_1 < 1.$$

Setzen wir:

$$\delta = \frac{n\Omega + \tau}{2\pi} - \frac{n+1}{4} - N,$$

wobei N eine ganze Zahl bedeutet und $0 \leq \delta < 1$, so ergeben die Gleichungen (67):

$$q = \tau - \frac{\pi}{2} + \Theta\pi, \quad m = -N - \delta + \frac{n\Theta_1 - \Theta}{2}.$$

Für Θ wählen wir einen solchen Werth, dass

$$\frac{\Theta}{2} + \delta < 1,$$

was immer möglich, da $0 \leq \delta < 1$. Darauf bestimmen wir Θ_1 aus:

$$-\delta + \frac{n\Theta_1 - \Theta}{2} = 0,$$

und erhalten

$$\Theta_1 = \frac{2}{n} \left(\frac{\Theta}{2} + \delta \right),$$

wo wirklich $0 < \Theta_1 < 1$, da $n \geq 2$. Wenn Θ und Θ_1 derartige Werthe haben, finden wir:

$$q = \tau - \frac{\pi}{2} + \Theta\pi, \quad m = -N$$

und diese Grössen q und m müssen die Bedingungen (66) erfüllen.

Wenn wir nun q und m solche Werthe beilegen, tritt das Lemma I in Kraft, und es wird $z_1 = z_m$, oder

$$(69) \quad s(t) = \xi + (t_0 - t_1)^{\frac{1}{n}} e^{\frac{2m\pi i}{n}} \left\{ \frac{1 \cdot 2 \dots n}{t_0^2 \psi^{(n)}(\xi)} \right\}^{\frac{1}{n}} (1 + \varepsilon).$$

(64) und (69) beweisen, dass wenn p sich unbegrenzt der Null nähert, t seinen Grenzwert t_0 , $s(t)$ aber den Werth ξ erreicht; d. h. es sind alle Bedingungen des Lemmas II erfüllt. Daher wird dann der Convergenzradius von $s(t)$ gleich $b = \text{mod. } t_0$. Wenn wir (58) hinzuziehen, sehen wir, dass der Convergenzradius der Reihe von Lagrange und der Anwendbarkeitsradius der Eigenschaften von $M(r)$ auf die Reihe von Lagrange in diesem Falle einander gleich sind.

III. *Lemma.* Wenn der Convergenzradius b und der Anwendbarkeitsradius a einander gleich sind, so ist das Minimum μ der Function $M(r)$ kritisch.

Beweis: Der Convergenzradius b der Reihe von Lagrange lässt sich folgendermassen ausdrücken:

$$(70) \quad b = \text{mod. } t_0, \quad t_0 = \frac{1}{\psi(\xi)} = \frac{\xi}{f(u + \xi)},$$

wo t_0 und ξ durch folgende Merkmale charakterisirt sind: wenn t , welches der Ungleichung

$$(71) \quad \text{mod. } t < b$$

genügt, sich unbegrenzt dem Werthe t_0 nähert, so werden die Derivirten von $s(t)$, von irgend einer Ordnung ab, unendlich und es ist:

$$(72) \quad \text{Lim. } \{s(t)\}_{t=t_0} = \xi.$$

Ferner bemerken wir: wenn $a = b$ und (71) erfüllt ist, so tritt das Lemma I in Kraft und es wird:

$$\text{mod. } s(t) < \varrho < k.$$

Diese Ungleichung, welche für jedes t , das dem t_0 beliebig nahe liegt, Gültigkeit hat, zeigt mit (72), dass $\text{mod. } \xi$ nicht grösser ist als ϱ . Folglich ist ξ endlich und kann mit keinem besondern Punkte der Function $f(u + z)$ zusammenfallen. Ziehen wir dieses Resultat und das vorher über t_0 und ξ Gesagte in Betracht, so kommen wir zu dem Schluss, dass ξ vielfache Wurzel von

$$z - t_0 f(u + z) = 0$$

sein muss und folglich der Gleichung

$$(70') \quad \psi'(z) = 0$$

genügt.

Nun ist es nicht schwer zu beweisen, dass $\text{mod. } \xi$ auch nicht kleiner sein kann als ϱ . Wäre: $\text{mod. } \xi < \varrho$, $\text{mod. } t < b$, $\text{lim. } t = t_0$,

so kämen wir zu dem Resultat, dass (51) nicht weniger als zwei Wurzeln hätte, welche ξ unendlich nahe lägen, und deren Modulus $< \varrho$ wäre. Dieses Resultat würde dem Lemma I widersprechen, welches in Kraft tritt, sobald (71) erfüllt ist.

Also ist:

$$(73) \quad \text{mod. } \xi = \varrho.$$

Aus (70), (70'), (73) und aus der Bedingung $a = b = \frac{1}{\mu}$ ersehen wir, dass

$$(74) \quad \mu = \text{mod. } \psi(\xi), \quad \varrho = \text{mod. } \xi, \quad \psi'(\xi) = 0.$$

Folglich ist das Minimum μ der Function $M(r)$ kritisch.

IV. *Lehrsatz.* Ist das Minimum μ der Function $M(r)$ nicht kritisch, so ist der Anwendbarkeitsradius a der Eigenschaften von $M(r)$ auf die Reihe von Lagrange kleiner als der Convergenzradius b der Reihe von Lagrange.

Beweis: Offenbar kann b nicht kleiner sein als a , denn dann würde aus $b < \text{mod. } t < a$ auf Grund des Lemmas I folgen, dass die Reihe $s(t)$ convergirt, was nicht möglich ist; a kann auch nicht b gleich sein, denn dann wäre das Minimum μ kritisch, folglich ist $a < b$.

Die Lehrsätze III und IV enthalten die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen, unter denen das Gebiet der Anwendbarkeit der Eigenschaften von $M(r)$ auf $s(t)$ und das Gebiet der Convergenz der Reihe von Lagrange entweder identisch sind oder nicht.

Beispiel: Es sei $u = 0$, und

$$f(z) = 1 + 18z - 3z^2 + 2z^3,$$

folglich

$$\psi(z) = \frac{1 + 18z - 3z^2 + 2z^3}{z};$$

die Function $M(r)$ hat das nicht kritische Minimum 20, welches wir in § 8 gefunden haben. Der Anwendbarkeitsradius der Eigenschaften von $M(r)$ auf die Reihe von Lagrange ist daher:

$$a = \frac{1}{\mu} = 0,05,$$

während der Convergenzradius der Reihe $s(t)$ gleich ist

$$b = \text{mod. } \frac{16}{279 \pm i 15\sqrt{15}} = 0,5614346 \dots$$

§ 11.

Die nachfolgenden Theoreme erleichtern oft die Beantwortung der Frage, ob der Convergenzradius b der Reihe von Lagrange und der Anwendbarkeitsradius a der Eigenschaften von $M(r)$ auf die genannte Reihe zusammenfallen. Wir werden sehen, dass sie dies öfters nicht thun.

Indem wir die bisherigen Bezeichnungen beibehalten, wollen wir die Wurzel ξ , welche die Bedingungen des Lemmas II erfüllt, eine *kritische Wurzel* der Gleichung (55) nennen, und den Werth t_0 , welcher aus (56) bestimmt wird, einen *kritischen Werth* der Variabeln t . Wenn eine kritische Wurzel der Gleichung (55) existirt, so ist $b \equiv \text{mod. } t_0$.

Ferner führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$(75) \quad \begin{aligned} \frac{-\xi^2 f''(u+\xi)}{2f(u+\xi)} &= A + Bi, \\ \frac{-i\xi^3 f'''(u+\xi)}{6f(u+\xi)} &= A_1 + B_1 i, \end{aligned}$$

wo A, B, A_1, B_1 , reelle Grössen sind; $i = \sqrt{-1}$.

IV. *Lemma.* Wenn $a = b$ und ξ eine kritische Wurzel von (55) ist, so entspricht diese Wurzel einem kritischen Minimum μ der Function $M(r)$.

Dieses Lemma wird beinahe ebenso bewiesen, wie das Lemma III.

V. *Lehrsatz.* Wenn die Gleichung (55) eine kritische Wurzel ξ besitzt, für welche entweder $A > 0$, oder $A = 0, A_1 \geq 0$, so ist $a < b$.

Beweis: Nehmen wir an, dass $a = b$. Auf Grund des Lemmas IV muss die Wurzel ξ einem kritischen Minimum μ der Function $M(r)$ entsprechen, d. h. es ist:

$$\mu \equiv \text{mod. } \psi(\xi), \quad \xi = \varrho e^{\omega i}.$$

Wenn φ dem ω unendlich nahe liegt, so können wir den Modul von $\psi(\varrho e^{\varphi i})$ nach Potenzen von $(\varphi - \omega)$ entwickeln:

$$\begin{aligned} R(\varrho, \varphi) &\equiv \text{mod. } \psi(\varrho e^{\varphi i}) \\ &= \mu \{1 + A(\varphi - \omega)^2 + A_1(\varphi - \omega)^3 + \dots\}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung beweist, dass unter den gemachten Voraussetzungen μ kein Maximum der Function $R(\varrho, \varphi)$ in Bezug auf φ ist. Das aber ist unmöglich, da μ das Maximum Maximorum der Function $R(\varrho, \varphi)$ in Bezug auf φ ist. Daher kann man nicht annehmen, dass $a = b$; da nun ausserdem a nicht grösser sein kann als b , so erhalten wir $a < b$.

Der Lehrsatz V enthält nur die ausreichenden Bedingungen, unter denen die Ungleichung $a < b$ erfüllt ist. Nothwendig sind diese Bedingungen nicht. Denn damit $a = b$ sei, ist nothwendig nicht nur, dass die Wurzel ξ den Bedingungen des Lehrsatzes V widerspreche, sondern auch dass keines der partiellen Maxima der Function $R(\varrho, \varphi)$ in Bezug auf φ grösser sei als mod. $\psi(\xi)$.

Betrachten wir nun die Voraussetzung, dass ξ den Bedingungen des Lehrsatzes V entspricht, und die entgegengesetzte Voraussetzung, dass

es dies nicht thut, als gleich wahrscheinlich, so ist es klar, dass die Ungleichung $a < b$ wahrscheinlicher ist als die Gleichung $a = b$.

VI. *Lehrsatz*: Wenn die Gleichung (55) eine kritische Wurzel ξ besitzt, welche der Bedingung

$$(76) \quad \text{mod. } \xi \geq k$$

entspricht, wo k eine positive Zahl ist, welche $M(r)$ unendlich werden lässt, so ist $a < b$.

Beweis: Wenn $a = b$ wäre, so ergäbe sich aus dem Lemma IV: $\text{mod. } \xi = \varrho < k$, was (76) widerspricht.

VII. *Lehrsatz*: Wenn die Gleichung (55) zwei kritische Wurzeln ξ und ξ'' besitzt, und es ist

$$\text{mod. } \xi \leq \text{mod. } \xi'',$$

so ist $a < b$.

Beweis: Wenn $a = b$ ist, so können wir auf jede der beiden kritischen Wurzeln ξ und ξ'' der Gleichung (55) das Lemma IV anwenden und finden dann:

$$\text{mod. } \xi = \text{mod. } \xi'' = \varrho,$$

was unsrer Voraussetzung widerspricht.

Moskau, $\frac{8. \text{ November}}{27. \text{ October}}$ 1887.