Ein Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend.

Von J. Plemelj in Czernowitz.

Jede analytische Funktion ist innerhalb eines Bereiches, in dem sie allenthalben regulär ist, wenn sie sich an der Begrenzung stetigen Randwerten anschließt, bekanntlich durch diese Randwerte vollkommen bestimmt; die Werte in den Innenpunkten liefert die Cauchysche Integraldarstellung. Es ist jedoch nicht jede längs der Randkurve gegebene stetige Funktion der Wert einer regulär-analytischen Innenfunktion. Für funktionentheoretische Untersuchungen erscheint es sehr folgenswer, eine einfache Bedingung kennen zu lernen, welche die Randwerte regulär-analytischer Funktionen vollständig charakterisiert. Eine solche Bedingung gibt, wie ich hier ausführen will, die Betrachtung der Cauchyschen Integralformel selbst. Sie gibt den Schlüssel zu einem neuen Beweis für die Existenz von Funktionen mit der Verzweigung einer gegebenen n -blättrigen Riemannschen Fläche und ermöglicht noch allgemeinere Riemannsche Probleme zu lösen, welche den auf Sätzen der Potentialtheorie beruhenden Methoden bisher unzugänglich sich erwiesen.

Um zu der gesuchten Bedingung zu kommen, betrachten wir das über den Rand C eines zusammenhängenden Bereiches erstreckte Integral

$$(1) \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

wobei $f(\zeta)$ eine in allen Randpunkten ζ stetige Randfunktion ist, ohne vorauszusetzen, daß $f(\zeta)$ eine Funktion der komplexen Veränderlichen ζ ist. Das Integral $\Phi(z)$ ist eine sowohl im Innen- als im Außengebiet der Randkurve überall regulär-analytische Funktion von z , welche für $z = \infty$ verschwindet.

Was sind nun die Außen- und Innenwerte von $\Phi(z)$ in einem Punkte z der Randkurve?

Zu ihrer Bestimmung nehmen wir in der Distanz $|\varepsilon|$ vom Kurvenpunkte z die beiden Punkte $z + \varepsilon i$ und $z - \varepsilon i$ und untersuchen die Werte $\Phi(z + \varepsilon i)$ und $\Phi(z - \varepsilon i)$ bei unbegrenzter Ver-

kleinerung des ε . Der Punkt $z + \varepsilon i$ sei ein Innenpunkt, $z - \varepsilon i$ ein Außenpunkt. Wenn diese beiden in der durch den Punkt z gehenden Normale liegen, deren Existenz wir voraussetzen, so wird im Quotienten $\varepsilon : (\zeta - z)$ der imaginäre Bestandteil mit $|\zeta - z|$ gegen Null konvergieren, der Quotient also einen realen unendlichen Grenzwert besitzen. Man bekommt

$$(2a) \quad \Phi(z + \varepsilon i) - \Phi(z - \varepsilon i) = \frac{1}{\pi i} \int \frac{f(\zeta) \cdot \varepsilon d\zeta}{(\zeta - z)^2 + \varepsilon^2}$$

$$(2b) \quad \Phi(z + \varepsilon i) + \Phi(z - \varepsilon i) = \frac{1}{\pi i} \int \frac{f(\zeta)(\zeta - z) d\zeta}{(\zeta - z)^2 + \varepsilon^2}$$

und hat nun den Grenzübergang $\lim \varepsilon = 0$ auszuführen, wobei $\Phi(z + \varepsilon i)$ und $\Phi(z - \varepsilon i)$ bezüglich in die Randwerte $\Phi(z^+)$ und $\Phi(z^-)$ übergehen, wenn diese existieren.

Im Integral (2a) ist zu setzen $f(\zeta) = f(z) + [f(\zeta) - f(z)]$. Von den beiden Integralen

$$(3) \quad \frac{f(z)}{\pi i} \int \frac{\varepsilon d\zeta}{(\zeta - z)^2 + \varepsilon^2}, \quad \frac{1}{\pi i} \int \frac{[f(\zeta) - f(z)] \cdot \varepsilon d\zeta}{(\zeta - z)^2 + \varepsilon^2}$$

ergibt sich das erste ohne weiteres gleich $f(z)$.

Um das zweite der Integrale (3) abzuschätzen, schneide man aus der Randkurve am Punkte z ein kleines Kurvenstück $\widehat{z_1 z z_2}$ so heraus, daß $|z - z_1| = |z_2 - z|$, also die beiden Randpunkte z_1 und z_2 vom Punkte z die gleiche Entfernung haben. Man kann dann beim Grenzübergang das herausgeschnittene Kurvenstück $\widehat{z_1 z z_2}$ beliebig klein machen und überdies ε noch in einer höheren Ordnung als $\widehat{z_1 z z_2}$ abnehmen lassen. Das zweite Integral (3) gibt bei der Erstreckung über die übrig gebliebene Randkurve jedenfalls den Grenzwert Null. Erstreckt man es noch über das herausgeschnittene Kurvenstück $\widehat{z_1 z z_2}$, so wird es wegen der Stetigkeit von $f(z)$ bei Verkleinerung von $\widehat{z_1 z z_2}$ ebenfalls dem Grenzwerte Null sich nähern, weil das Integral

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{|\varepsilon| |d\zeta|}{|(\zeta - z)^2 + \varepsilon^2|}$$

endlich bleibt. Wir bekommen also

$$(4) \quad \lim_{\varepsilon=0} [\Phi(z + \varepsilon i) - \Phi(z - \varepsilon i)] = f(z)$$

eine Gleichung, welche selbst dann richtig bleibt, wenn die Grenzwerte $\Phi(z^+)$ und $\Phi(z^-)$ für sich nicht existieren.

Die Gleichung (4) zeigt uns, daß die Grenzwerte $\Phi(z^+)$ und $\Phi(z^-)$ nur gleichzeitig existieren können. In diesem Falle hat

dann auch das Integral (2b) einen Grenzwert für $\lim \varepsilon = 0$, welchen wir zur Abkürzung mit

$$(5) \quad \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\pi i} \int \frac{f(\zeta)(\zeta - z) d\zeta}{(\zeta - z)^2 + \varepsilon^2} = \frac{1}{\pi i} \int \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

bezeichnen wollen, was nur eine Definition des Integrals $\int \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$ ist, welches im gewöhnlichen Sinne keine Bedeutung hat, denn ζ und z sind Randpunkte. Wir werden in der Folge sehen, daß der Grenzwert (5) jedenfalls dann existiert, wenn $f(\zeta)$ so stetig ist, daß in zwei benachbarten Kurvenpunkten ζ_1 und ζ_2 der Funktionsunterschied $f(\zeta_1) - f(\zeta_2)$ den Kleinheitsgrad von $|\zeta_1 - \zeta_2|^\mu$ hat, wo $|\mu| > 0$. In diesem Falle ist sogar dieser Grenzwert in gleicher Weise, wie $f(\zeta)$, stetig.

Nach (2), (4), (5) können wir nunmehr schreiben:

$$(6) \quad \begin{aligned} 2\Phi(z^-) &= -f(z) + \frac{1}{\pi i} \int \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \\ 2\Phi(z^+) &= +f(z) + \frac{1}{\pi i} \int \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \end{aligned}$$

An der Hand dieses Resultates können wir leicht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aufstellen, daß $f^+(\zeta)$ die Randwerte einer regulär-analytischen Innenfunktion $f^+(z)$ bilden. Man beachte, daß wenn z irgend ein Außenpunkt ist, dann $\frac{f^+(\zeta)}{\zeta - z}$ für alle Innenpunkte ζ regulär ist, so daß sich nach dem Satze von Cauchy das Integral (1) im Außengebiet Null ergeben muß, wenn man darin als $f(\zeta)$ die Randwerte $f^+(\zeta)$ einführt. Die Außenrandwerte $\Phi(z^-)$ ergeben sich gleich Null und die Gleichung $\Phi(z^-) = 0$ in (6) gibt uns die notwendige und hinreichende Bedingung, wie man leicht erkennt. Die Gleichungen (6) ergeben dann noch $\Phi(z^+) = f^+(z)$, wie es ja sein muß.

Analog wird man die Bedingung für die Außenrandwerte $f^-(\zeta)$ einer regulär-analytischen Außenfunktion $f^-(z)$ aufstellen. Bedeutet z einen Innenpunkt, so ist $\frac{f^-(\zeta)}{\zeta - z}$ eine in allen Außenpunkten ζ regulär-analytische Funktion und der Cauchysche Integralsatz wird wieder zur Anwendung kommen können, wenn das Außengebiet durch einen sehr großen Kreis begrenzt wird, und dann nur das innerhalb des Kreises befindliche Stück des Außengebietes in Betracht gezogen wird. Der Kreis zählt zur Begrenzung und im Grenzfalle bekommt das Integral (1) erstreckt über diesen Kreis den konstanten Wert c , welchen die Funktion $f^-(z)$ im

Unendlichen annimmt. Der innere Randwert $\Phi(z^+)$ von (1) wird Null, was nach (6) einerseits die Gleichung

$$0 = f^-(z) + \frac{1}{\pi i} \int \frac{f^-(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - 2c$$

gibt, wobei das Integral jetzt nicht mehr über den großen Kreis, sondern nur über die ursprüngliche Berandung zu erstrecken ist, — der auf den unendlich großen Kreis sich beziehende Bestandteil ergab den Wert $-2c$ —, anderseits folgt $\Phi(z^-) = -f^-(z)$ als Bestätigung, daß $f^-(z)$ Außenrandwert ist.

Wir haben also den Satz:

Das Verschwinden des Ausdrucks

$$(7, F^-) \quad -f^+(z) + \frac{1}{\pi i} \int \frac{f^+(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

beziehungsweise

$$(7, F^+) \quad +f^-(z) + \frac{1}{\pi i} \int \frac{f^-(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - 2c$$

ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $f^+(z)$ der Randwert einer regulär-analytischen Innenfunktion ist beziehungsweise $f^-(z)$ der Randwert einer regulär-analytischen Außenfunktion mit dem Werte c im Unendlichen. Ergeben sich aus gegebenen Funktionen $f^+(z)$ und $f^-(z)$ die Ausdrücke F^- und F^+ nicht Null, so ist F^- der Randwert einer regulär-analytischen, im Unendlichen verschwindenden Außenfunktion, F^+ der Randwert einer Innenfunktion. Die Bedeutung des über die Begrenzung erstreckten Integrals in diesen Ausdrücken ist durch (5) gegeben.

Existenz des Grenzwertes (5). Wird von der Funktion $f(z)$ eine solche Stetigkeit vorausgesetzt, daß

$$(8) \quad |f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| < |\zeta_1 - \zeta_2|^{\mu}. \text{ konst.}$$

ist, so läßt sich die Existenz des Grenzwertes (5) nachweisen und selbst eine Stetigkeit, wie sie durch (8) von $f(\zeta)$ vorausgesetzt wurde, zeigen.

Man erstrecke das Integral (2b) zunächst über das kleine Kurvenstück $\widehat{z_1 z z_2}$ und setze $f(\zeta) = f(z) + [f(\zeta) - f(z)]$. Das Integral

$$\frac{1}{\pi i} f(z) \int_{z_1}^{z_2} \frac{(\zeta - z) d\zeta}{(\zeta - z)^2 + \varepsilon^2} = \frac{f(z)}{2\pi i} \lg \frac{(z_2 - z)^2 + \varepsilon^2}{(z - z_1)^2 + \varepsilon^2}$$

konvergiert, weil beim Grenzübergang $\frac{\varepsilon}{z_2 - z}$, $\frac{\varepsilon}{z - z_1}$ unendlich

klein gemacht werden, gegen den Grenzwert $\frac{f(z)}{\pi i} \lg \frac{z_2 - z}{z - z_1}$ d. h. gegen Null, denn zufolge der Bestimmungsweise der Punkte z_1 und z_2 nähert sich der Quotient $\frac{z_2 - z}{z - z_1}$ bei Abnahme von $|z_2 - z_1|$ gegen den Wert 1.

Das Integral

$$\frac{1}{\pi i} \int_{z_1}^{z_2} \frac{[f(\zeta) - f(z)](\zeta - z) d\zeta}{(\zeta - z)^2 + \varepsilon^2}$$

ergibt sich wegen der vorausgesetzten Stetigkeit (8) höchstens von der Größenordnung $|z_2 - z_1|^\mu$, also mit $|z_2 - z_1|$ gleichzeitig Null.

Das Integral (2b) erstreckt über den übrig gebliebenen Rand $[C - z_1 z_2]$ hat den Grenzwert von

$$(9) \quad \frac{1}{\pi i} \int \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

bei der gleichen Erstreckung, denn die Differenz

$$\frac{1}{\pi i} \int \frac{f(\zeta)(\zeta - z) d\zeta}{(\zeta - z)^2 + \varepsilon^2} - \frac{1}{\pi i} \int \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{\pi i} \int \frac{f(\zeta) \cdot \varepsilon^2 d\zeta}{(\zeta - z)[(\zeta - z)^2 + \varepsilon^2]}$$

hat höchstens die Größenordnung $\left| \frac{\varepsilon}{z_2 - z_1} \right|^2$ und verschwindet bei unausgesetzter Abnahme des ε , wie klein auch $|z_2 - z_1|$ ist.

Der Grenzwert (9) existiert nun, wovon man sich durch Einsetzen von $f(\zeta) = f(z) + [f(\zeta) - f(z)]$ überzeugt. Das Integral $\frac{1}{\pi i} \int \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{\pi i} \lg \frac{z_2 - z}{z_1 - z}$ konvergiert gegen 1, weil die Punkte z_1 und z_2 in gleicher Distanz $|z_2 - z| = |z - z_1|$ von z angenommen wurden. Das Integral $\int \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$ ist wegen der Voraussetzung (8) über die Stetigkeit endlich.

Das Integral (5) konvergiert also unter der Voraussetzung (8) über die Stetigkeit von $f(z)$ gegen den sogenannten Cauchy'schen Hauptwert.

Stetigkeit des Cauchy'schen Hauptwertes

$$I(z) = \frac{1}{\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Es ergibt sich unter Berücksichtigung, daß der Cauchy'sche Hauptwert von $\frac{1}{\pi i} \int \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ den Wert 1 hat, nach leichter Umformung

$$I(\zeta_1) - I(\zeta_2) = \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\pi i} \int \frac{f(\zeta) - f(\zeta_1)}{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)} d\zeta.$$

Man erstrecke nun das Integral über die Randkurve mit Ausschluß eines kleinen Kurvenstückes $z_1 z_2$ innerhalb dessen $\zeta_1 \zeta_2$ derart liegen, daß jeder der Punkte ζ_1, ζ_2 , von beiden Punkten z_1 und z_2 in einer Distanz liegt, welche die Größenordnung von $|\zeta_1 - \zeta_2|$ hat. Die Distanz $|z_2 - z_1|$ hat dann die gleiche Ordnung. Bei dieser Integration bleibt $\frac{\zeta - \zeta_2}{\zeta - \zeta_1}$ endlich und das Integral hat wegen (8) höchstens die Größenordnung $|\zeta_1 - \zeta_2|^{\mu}$.

Nun ist das Integral noch über das Kurvenstück $z_1 z_2$ auszu-dehnen. Hier schreibe man es:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \frac{f(\zeta) - f(\zeta_1)}{\zeta - \zeta_1} - \frac{f(\zeta) - f(\zeta_2)}{\zeta - \zeta_2} \right\} d\zeta + \frac{[f(\zeta_2) - f(\zeta_1)]}{\pi i} \int_{z_1}^{z_2} \frac{d\zeta}{\zeta - z_2}$$

In dieser Gleichung hat zufolge (8) jedes Integral für sich höchstens die Größenordnung $|z_2 - z_1|^{\mu}$, denn das Integral

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_2} = \lg \frac{z_2 - \zeta_2}{z_1 - \zeta_2}$$

bleibt als Cauchyscher Hauptwert wegen der Bestimmung von z_1 und z_2 endlich. Damit ist gezeigt, daß die Differenz $I(\zeta_1) - I(\zeta_2)$ nur die Größenordnung $|\zeta_1 - \zeta_2|^{\mu}$ erreichen kann.

Die abgeleiteten Sätze gelten, wie ja der Vorgang zeigt, in allen Randpunkten mit einer Normale, wenn die vorausgesetzten Bedingungen über die integrierten Funktionen erfüllt sind. Es ist jedoch durchaus nicht nötig, daß die integrierte Randfunktion überall etwa die Forderung der Endlichkeit erfüllt. Wenn z. B. die Funktion $f(z)$ in (1) in einem Punkte z_0 , wie $|z - z_0|^{\mu-1}$, wo $|\mu| > 0$, wächst, so wird der Cauchysche Hauptwert ebenfalls bei der Annäherung an den Randpunkt z_0 in der gleichen Größenordnung wachsen. Auf diese Betrachtungen gehen wir nicht näher ein.

Um ein einfaches Beispiel der Anwendung zu geben, betrachten wir die von Hilbert (Göttinger Nachrichten, 1905, S. 307 ff.) behandelte Aufgabe, eine Außenfunktion $\varphi^-(z)$ und eine Innenfunktion $\varphi^+(z)$ der Gleichung $\varphi^-(z) = \alpha(z) \varphi^+(z)$ gemäß bei gegebenem stetigen $\alpha(z)$ zu bestimmen. Durch Logarithmierung

$$\lg \varphi^-(z) - \lg \varphi^+(z) = \lg \alpha(z)$$

und Anwendung der Gleichung (4) ergibt sich die Lösung sofort durch das Integral (1), d. h. durch

$$\lg \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\lg \alpha(\zeta) \cdot d\zeta}{\zeta - z},$$

wobei der Einfachheit halber die Stetigkeit von $\lg \alpha(\zeta)$ vorausgesetzt werde.