Über den Fundamentalsatz der Theorie der Differentialgleichungen.

Von Oscar v. Lichtenfels.

Es sei die Gleichung

$$f(u, v, w) = 0$$

gegeben, durch welche die Größe w als eine analytische Function der beiden Veränderlichen u und v definiert wird. Es sei $u = u_0$, $v = v_0$ eine im Endlichen gelegene Stelle im Gebiete dieser Veränderlichen, von der Beschaffenheit, dass ein Zweig der Function w in einer gewissen Umgebung dieser Stelle sich regulär verhält, also durch ein Element

$$w - c_0 = \mathfrak{P}_0(u - u_0, v - v_0)$$

gegeben ist, worin $\mathfrak{P}_0(u - u_0, v - v_0)$ eine nach positiven und ganzen Potenzen von $u - u_0$, $v - v_0$ fortschreitende Reihe bezeichnet, die für $u = u_0$, $v = v_0$ verschwindet. Dann gibt es immer eine, und nur eine Function v der Veränderlichen u , welche sich in einer gewissen Umgebung der Stelle $u = u_0$ regulär verhält, der Differentialgleichung

$$\frac{dv}{du} = c_0 + \mathfrak{P}_0(u - u_0, v - v_0)$$

genügt und für $u = u_0$ den Wert $v = v_0$ annimmt.

Für diesen Satz, welcher die Grundlage der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen bildet, ist der erste Beweis von Cauchy gegeben worden; später haben Briot und Bouquet denselben vereinfacht und ihre Methode auf den Fall ausgedehnt, dass statt einer Gleichung ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung gegeben ist. (S. Théorie d. fonct. ellipt. 1875, pag. 325—335.) Im folgenden wird ein neuer Beweis dieses Satzes angegeben. Derselbe beruht

auf einem Verfahren, das einige Ähnlichkeit mit demjenigen besitzt, welches von Weierstraß für die Entwicklung der Wurzel einer algebraischen Gleichung angewendet worden ist. (Siehe Biermann, Theorie d. anal. Funct., pag. 201 ff.) Es wird als bekannt vorausgesetzt, dass man der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu} = \mathfrak{P}'(x),$$

worin $\mathfrak{P}'(x)$ in der Umgebung der Stelle $x=0$ convergiert, durch die Function

$$y = \text{const.} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{\nu}}{\nu+1} x^{\nu+1} = \text{const.} + \mathfrak{P}(x)$$

Genüge leistet, und dass $\mathfrak{P}(x)$ dann denselben Convergencebereich besitzt, wie $\mathfrak{P}'(x)$.

Wenn $u - u_0 = x$, $v - v_0 = y$ gesetzt wird, so geht die gegebene Differentialgleichung in die folgende über:

$$\frac{dy}{dx} = c_0 + \mathfrak{P}_0(x, y) = \mathfrak{P}(x, y),$$

und es ist zu zeigen, dass es eine in der Umgebung der Stelle $x=0$ convergierende Potenzreihe $y = \mathfrak{P}(x)$ gibt, welche für $x=0$ verschwindet und der Differentialgleichung genügt. Es wird angenommen, dass $\mathfrak{P}(x, y)$ für alle Wertsysteme von x und y , deren absolute Beträge den Bedingungen

$$|x| = \xi < \varrho, \quad |y| = \eta < \varrho'$$

genügen, convergent sei. Setzt man dann:

$$\mathfrak{P}(x, y) = c_0 + c_{10} x + c_{01} y + \dots + c_{n0} x^n + c_{n-1,1} x^{n-1} y + \dots + c_{0n} y^n + \dots,$$

$$|c_{\mu\nu}| = \gamma_{\mu\nu},$$

so ist

$$\gamma_0 + \gamma_{10} \varrho + \gamma_{01} \varrho' + \dots + \gamma_{n0} \varrho^n + \gamma_{n-1,1} \varrho^{n-1} \varrho' + \dots + \gamma_{0n} \varrho'^n + \dots = g$$

endlich und von solcher Größe, dass die Summe der Reihe aus den absoluten Beträgen der Glieder von $\mathfrak{P}(x, y)$ für alle Stellen des Convergencebereiches nicht größer als g ist. Es wird ferner angenommen, dass c_0 von Null verschieden sei — was nöthigenfalls durch eine lineare Substitution herbeigeführt werden kann —

kleiner als g . Daraus folgt in derselben Weise, dass die Reihen $\mathfrak{P}_3(x)$, $\mathfrak{P}_3(x) \dots$, $\mathfrak{P}_n'(x)$, $\mathfrak{P}_n(x)$, $\dots$ in demselben Bereiche convergieren, und dass für alle Werte des Index n die aus den absoluten Beträgen von $\mathfrak{P}_n'(x)$ und $\mathfrak{P}_n(x)$ gebildeten Reihen $\overline{\mathfrak{P}}_n'(\xi)$ und $\overline{\mathfrak{P}}_n(\xi)$ die Ungleichungen

$$\overline{\mathfrak{P}}_n'(\xi) < g \quad \overline{\mathfrak{P}}_n(\xi) < \xi \overline{\mathfrak{P}}_n'(\xi) < \varrho'$$

befriedigen. Es sei ϱ'' eine positive GröÙe, die kleiner ist, als der Radius der zuletzt bestimmten Umgebung, so dass die Convergenz der Reihen auch stattfindet, wenn $\xi = \varrho''$ angenommen wird.

Wenn nun die Ausdrücke

$$y_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}^{(n)} \cdot x^{\nu}, \quad y_{n+1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}^{(n+1)} \cdot x^{\nu}$$

in die Gleichung

$$\frac{dy_{n+1}}{dx} = \mathfrak{P}(x, y_n)$$

eingesetzt werden, so ergibt die Vergleichung der Coefficienten auf den beiden Seiten des Resultates die Beziehungen

$$\begin{aligned} a_1^{(n+1)} &= c_0, \quad 2a_2^{(n+1)} = c_{10} + c_{01} \cdot a_1^{(n)}, \dots (\nu+1) \cdot a_{\nu+1}^{(n+1)} = \\ &= G_{\nu+1}(c_1, a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots a_{\nu}^{(n)}), \dots \end{aligned}$$

worin $G_{\nu+1}$ eine ganze, ganzzahlige Function der Coefficienten c und der in der Klammer angeführten Coefficienten von $\mathfrak{P}_n(x)$ bedeutet. Hieraus folgt: wenn von irgend einem n angefangen: $a_1^{(n+1)} = a_1^{(n)}, \dots a_{\nu}^{(n+1)} = a_{\nu}^{(n)}$ ist, so ist auch $a_1^{(n+2)} = a_1^{(n+1)}$, $a_2^{(n+2)} = a_2^{(n+1)}, \dots a_{\nu}^{(n+2)} = a_{\nu}^{(n+1)}$ und $a_{\nu+1}^{(n+2)} = a_{\nu+1}^{(n+1)}$. Nun ist $a_1^{(1)} = a_1^{(2)} = \dots = a_1^{(n)} = \dots = c_0$, also ist auch $a_2^{(2)} = a_2^{(3)} = \dots$, $a_3^{(3)} = a_3^{(4)} = \dots$, und für jedes n : $a_n^{(n)} = a_n^{(n+1)} = a_n^{(n+2)} = \dots$. Es stimmen demnach die Reihen $\mathfrak{P}_n(x)$ und $\mathfrak{P}_{n+1}(x)$, und also auch $\mathfrak{P}_n'(x)$ und $\mathfrak{P}_{n+1}'(x)$ je in den ersten n Gliedern überein und man kann setzen

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_n'(x) &= u'_1 + u'_2 + \dots + u'_n + R'_n, \\ y_n &= \mathfrak{P}_n(x) = u_1 + u_2 + \dots + u_n + R_n; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{n+1}'(x) &= u'_1 + u'_2 + \dots + u'_n + u'_{n+1} + R'_{n+1}, \\ y_{n+1} &= \mathfrak{P}_{n+1}(x) = u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} + R_{n+1}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, wenn unter k eine positive ganze Zahl verstanden wird:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(x, y_{n+k}) - \mathfrak{P}(x, y_n) &= \mathfrak{P}'_{n+k+1}(x) - \mathfrak{P}'_{n+1}(x) = \\ &= u'_{n+1} + \dots + u'_{n+k} + R'_{n+k} - R'_n\end{aligned}$$

$$y_{n+k} - y_n = \mathfrak{P}_{n+k}(x) - \mathfrak{P}_n(x) = u_{n+1} + \dots + u_{n+k} + R_{n+k} - R_n.$$

Nun weiß man, dass für den in Rede stehenden Bereich der Veränderlichen x , in welchem $\xi < \varrho''$ ist, alle auftretenden Reihen $\mathfrak{P}'_n(\xi)$ sicherlich nicht größer als g , alle $\mathfrak{P}_n(\xi) < \varrho'$ sind, also gelten die Ungleichungen

$$|n \cdot a^{(n)}_\nu| < g \cdot \varrho''^{-\nu+1}, \quad |a^{(n)}_\nu| < \varrho' \cdot \varrho''^{-\nu}$$

und somit diese:

$$|u^{(n)}_\nu| < g \cdot \left(\frac{\xi}{\varrho''}\right)^{\nu-1}, \quad |u^{(n)}_\nu| < \varrho' \cdot \left(\frac{\xi}{\varrho''}\right)^\nu$$

für jedes n . Dann ist, wenn $\xi < \varrho''$ angenommen wird

$$|u'_{n+1} + \dots + u'_{n+k} + R'_{n+k}| < g \left(\frac{\xi}{\varrho''}\right)^n \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi}{\varrho''}}; \quad |R'_n| < g \cdot \left(\frac{\xi}{\varrho''}\right)^n \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi}{\varrho''}}.$$

$$\left. \begin{aligned} |u_{n+1} + \dots + u_{n+k} + R_{n+k}| &< \varrho' \left(\frac{\xi}{\varrho''}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi}{\varrho''}}; \\ |R_n| &< \varrho' \left(\frac{\xi}{\varrho''}\right)^n \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi}{\varrho''}}, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

und daher:

$$|\mathfrak{P}(x, y_{n+k}) - \mathfrak{P}(x, y_n)| = |\mathfrak{P}'_{n+k+1}(x) - \mathfrak{P}'_{n+1}(x)| < 2g \cdot \left(\frac{\xi}{\varrho''}\right)^n \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi}{\varrho''}}$$

$$|y_{n+k} - y_n| = |\mathfrak{P}_{n+k}(x) - \mathfrak{P}_n(x)| < 2\varrho' \cdot \left(\frac{\xi}{\varrho''}\right)^n \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi}{\varrho''}}.$$

Man kann also, wenn δ eine beliebig klein angenommene positive GröÙe ist, n stets so groß wählen, dass für jeden Wert von k und alle $\xi < \varrho''$, wo $\varrho'' < \varrho'$:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{P}'_{n+k+1}(x) - \mathfrak{P}'_{n+1}(x)| &= |\mathfrak{P}(x, y_{n+k}) - \mathfrak{P}(x, y_n)| < \delta, \\ |\mathfrak{P}_{n+k}(x) - \mathfrak{P}_n(x)| &< \delta \end{aligned}$$

wird. Daraus geht erstlich hervor, dass die Reihen $\mathfrak{P}'_n(x)$ sich mit wachsendem n einem Grenzbilde nähern:

$$\lim \mathfrak{P}'_n(x) = \mathfrak{P}'(x),$$

welches mit $\mathfrak{P}'_n(x)$ in den ersten n Gliedern übereinstimmt. Da nun alle bisherigen Schlüsse gültig bleiben, wenn in den $\mathfrak{P}'_n(x)$ alle Glieder durch ihre absoluten Beträge ersetzt werden, so kann n auch so groß gewählt werden, dass für alle $\xi < \varrho''$

$$|\overline{\mathfrak{P}'}(\xi) - \overline{\mathfrak{P}'_n}(\xi)| < \delta$$

wird. Infolge dessen gilt auch die Ungleichung

$$|\mathfrak{P}'(x)| \leq \overline{\mathfrak{P}'}(\xi) < g$$

in demselben Bereiche.

Bildet man nun die Reihe $\mathfrak{P}(x)$, deren Ableitung $\mathfrak{P}'(x)$ ist, so convergiert sie in demselben Bereiche und es ist

$$|\mathfrak{P}(x)| \leq \overline{\mathfrak{P}}(\xi) < \xi \cdot \overline{\mathfrak{P}'}(\xi) < \xi \cdot g < \varrho' \quad (b)$$

Andererseits zeigen die Ungleichungen (a), dass die Reihen $\mathfrak{P}_n(x)$ sich mit wachsendem n einem Grenzbilde

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{P}_n(x) = \mathfrak{P}_\infty(x) = y$$

annähern, welches mit $\mathfrak{P}_n(x)$ in den ersten n Gliedern übereinstimmt, und da ebendasselbe gilt, wenn in $\mathfrak{P}_n(x)$ alle Glieder durch ihre absoluten Beträge ersetzt werden, so ist auch

$$|\mathfrak{P}_\infty(x)| < \overline{\mathfrak{P}_\infty}(\xi) < \varrho' \quad (c)$$

in der betrachteten Umgebung der Stelle $x = 0$. — Es stimmen aber $\mathfrak{P}(x)$ und $\mathfrak{P}_\infty(x)$ beide mit $\mathfrak{P}_n(x)$ in den ersten n Gliedern überein, folglich hat man wegen der Ungleichungen (a), (b) und (c)

$$|\mathfrak{P}(x) - \mathfrak{P}_n(x)| \leq \varrho' \left(\frac{\xi}{\varrho''} \right)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{\xi}{\varrho''}},$$

$$|\mathfrak{P}_\infty(x) - \mathfrak{P}_n(x)| \leq \varrho' \left(\frac{\xi}{\varrho''} \right)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{\xi}{\varrho''}},$$

und daher

$$|\mathfrak{P}(x) - \mathfrak{P}_\infty(x)| \leq 2\varrho' \left(\frac{\xi}{\varrho''} \right)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{\xi}{\varrho''}}.$$

Da nun die Größe auf der rechten Seite beliebig klein gemacht werden kann, so ist

$$\mathfrak{P}_\infty(x) = \mathfrak{P}(x),$$

also:
$$\mathfrak{P}'(x) = \lim \mathfrak{P}'_n(x) = \frac{d}{dx} \{ \lim \mathfrak{P}_n(x) \}.$$

Zufolge der Ungleichungen (b) und (c) ist $\mathfrak{P}(x, y) = \mathfrak{P}(x, \mathfrak{P}(x))$ eine in der ursprünglichen Umgebung der Stelle $x = 0, y = 0$ convergente Potenzreihe, welche in eine Potenzreihe von x verwandelt, mit $\mathfrak{P}(x, y_n) = \mathfrak{P}(x, \mathfrak{P}_n(x))$ in den ersten n Gliedern übereinstimmt. Da eben jenen Ungleichungen zufolge auch $|\mathfrak{P}(x, y)| < g$ ist, so gilt die Ungleichung

$$|\mathfrak{P}(x, y) - \mathfrak{P}(x, y_n)| < 2g \cdot \left(\frac{\xi}{\varrho''}\right)^n \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi}{\varrho''}} < \delta$$

für ein richtig gewähltes n , und alle größeren Werte dieses Index.

Nimmt man aber n so groß, dass dieselbe Ungleichung auch schon gilt, wenn n durch $n-1$ ersetzt wird, so folgt aus der Identität

$$\mathfrak{P}'(x) - \mathfrak{P}(x, y) = \mathfrak{P}'(x) - \mathfrak{P}'_n(x) - \{\mathfrak{P}(x, y) - \mathfrak{P}(x, y_{n-1})\},$$

dass

$$|\mathfrak{P}'(x) - \mathfrak{P}(x, y)| < |\mathfrak{P}'(x) - \mathfrak{P}'_n(x)| + |\mathfrak{P}(x, y) - \mathfrak{P}(x, y_{n-1})| < 2\delta$$

wird, also, da δ beliebig klein angenommen werden kann, dass die Gleichung

$$\mathfrak{P}'(x) - \mathfrak{P}(x, y) = \frac{d\mathfrak{P}(x)}{dx} - \mathfrak{P}(x, \mathfrak{P}(x)) \doteq 0$$

für alle Stellen in der oben bestimmten Umgebung der Stelle $x = 0$ identisch erfüllt ist.

Nachdem die Existenz eines Functionenelementes $y = \mathfrak{P}(x)$, welches der Differentialgleichung genügt, bewiesen ist, kann die Bestimmung desselben dadurch geschehen, dass in die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \mathfrak{P}(x, y)$$

für y die Reihe $y = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu$ eingesetzt wird. Da dann die Vergleichung der Coefficienten der gleich hohen Potenzen von x auf den beiden Seiten des Resultates jedes a_ν als ganze Function

von $a_1 a_2 \dots a_{\nu-1}$ liefert, alle a_ν also eindeutig durch $a_1 = c_0$ ausgedrückt werden, so gibt es auch nur ein Functionenelement, welches den gestellten Bedingungen genügt.

Es ist unmittelbar einzusehen, dass das hier vorgetragene Beweisverfahren auch auf den Fall angewendet werden kann, dass ein System von Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{dy_k}{dx} = \mathfrak{P}_k(x, y_1, y_2, \dots y_n), \quad k = 1, 2, \dots n$$

gegeben ist, worin die Potenzreihen $\mathfrak{P}_k$ einen gemeinschaftlichen Convergenzbereich in der Umgebung der Stelle $x = 0, y_1 = 0, \dots y_n = 0$ besitzen, und an dieser Stelle nicht verschwinden. Zufolge der bekannten Reduction von Differentialgleichungssystemen höherer auf solche erster Ordnung ist hiermit der Beweis der Existenz der Integrale solcher Systeme gleichzeitig geführt.