la quale si può facilmente esprimere per mezzo dei coefficienti delle equazioni che legano i livelli colle cariche, cioè per mezzo delle *coordinate geometriche* del sistema di conduttori.

Quando tutti i conduttori, tranne quello le cui coordinate elettriche L, M sono variabili, comunicano costantemente col suolo, l'entropia è sostituita precisamente dal logaritmo di ciò che chiamasi *capacità elettrica* del detto conduttore considerato come parte dell' intero sistema.

STUDI SULLA RIFLESSIONE CRISTALLINA: PER GIUSEPPE BASSO (*).

Lavori di A. Cauchy.

Ne' lavori precedentemente accennati è trattato il solo caso delle vibrazioni rettilinee e trasversali alla linea di propagazione del moto: di più si ammette implicitamente, senza dimostrazione che alla superficie di separazione di due mezzi si compia bruscamente e senza transizione il mutamento di velocità e di direzione nei moti riflesso e rifratti. Ora una teoria completa della riflessione dovrebbe essere tale che tutte le leggi generali della propagazione di moti eterei qualunque scaturissero esclusivamente dai postulati fondamentali che definiscono la costituzione dell' etere.

Le basi di una teoria siffatta pose appunto Agostino Cauchy in una serie di studi analitici (*) fra cui è pur compreso l'esame della riflessione cristallina. Di tali studi sarebbe malagevole fare un riassunto succinto e chiaro; pel mio scopo basterà che ne accenni brevissimamente l'indole ed i caratteri principali.

Si consideri un sistema di punti materiali di pochissimo spostati dalle loro posizioni di equilibrio stabile e sollecitati da forze che tendono continuamente a ricondurveli. Riferendo tali punti

(1) *Continuazione.* V. pag. 249 del volume precedente.

(2) *Comptes rendus etc.*, 1838, tom. 7, pag. 983 e seguenti, fino al tomo 31 del 1850. *Memoires de l'Académie des Sciences*, 1850, tom. 22.

a tre assi ortogonali e per uno qualunque di essi essendo x, y, z le coordinate della sua posizione d'equilibrio, alla fine del tempo qualunque t gli spostamenti α, β, γ del punto, computati parallelamente agli assi, sono le parti reali di tre variabili immaginarie, rispettivamente eguali ai prodotti di tre costanti immaginarie per una stessa esponenziale. L'esponente di quest'ultima, pure immaginario, è una funzione lineare di x, y, z, t . Perciò, indicando con $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$, queste tre variabili immaginarie, che Cauchy chiama gli *spostamenti simbolici*, corrispondenti agli spostamenti effettivi α, β, γ , si ha:

$$\overline{\alpha} = A e^{ux+vy+wz-st},$$

$$\overline{\beta} = B e^{ux+vy+wz-st},$$

$$\overline{\gamma} = C e^{ux+vy+wz-st},$$

dove le costanti A, B, C, u, v, w, s sono in generale immaginarie. L'esponenziale $e^{ux+vy+wz-st}$ si può decomporre in un binomio della forma:

$$e^{u'x+v'y+w'z-s't} + e^{(u''x+v''y+w''z-st'')i},$$

nel quale il primo termine reale è il modulo, ed il secondo termine si riduce ad una esponenziale trigonometrica di cui l'argomento è $u''x + v''y + w''z - s''t$.

In questo stesso binomio le quantità reali $u', v', w', s'; u'', v'', w'', s''$ soddisfanno alle condizioni:

$$u = u' + u''i$$

$$v = v' + v''i$$

$$w = w' + w''i$$

$$s = s' + s''i$$

Secondo l'usato, i è una delle radici quadrate dell'unità negativa.

Ciò posto, si può facilmente dimostrare che la propagazione del moto attraverso il sistema si fa per onde piane, tutte parallele al piano invariabile che, all'origine del tempo, è rappresentato dall'equazione:

$$u''x + v''y + w''z = 0.$$

Sono pure piane e giacenti in piani paralleli le orbite dei singoli punti materiali, ma questi loro piani non sono necessariamente paralleli al piano invariabile delle onde.

Affinchè il moto eccitato in un punto del sistema sia *durevole e persistente*, è necessario che il modulo, a cui è proporzionale lo spostamento effettivo, sia indipendente dal tempo; cioè si deve avere:

$$s' = 0.$$

Se poi si considera il moto in quanto si propaga da punto a punto, vedesi pure che esso va procedendo senza affievolimento, solo quando il modulo sia indipendente dalle coordinate; il che esige che si abbia:

$$u' = 0, \quad v' = 0, \quad w' = 0.$$

Quando queste tre costanti, od alcuna fra esse, non siano nulle, l'ampiezza dello spostamento, e per conseguenza l'intensità dell'onda luminosa ove trattisi di moto eterico, andrà variando insieme alla posizione dell'onda. Anzi, se all'origine del tempo il piano dell'onda passa per l'origine delle coordinate, da tale istante in poi l'ampiezza del moto considerato sull'onda che si va propagando, decrescerà in progressione geometrica, mentre la distanza del piano d'onda dal piano primitivo andrà crescendo in progressione aritmetica.

Da questi ragionamenti trasse il Cauchy la necessità di ammettere la possibile esistenza di due sorta di raggi luminosi, cioè dei raggi *visibili*, costituiti da moti eterici per i quali il modulo anzidetto è costantemente eguale all'unità, e dei raggi *evanescenti*, cioè che si spengono rapidissimamente, anche a distanze piccolissime od insensibili dalla origine dello scuotimento; questi secondi risultano da moti eterici per i quali l'ampiezza di vibrazione dipende da una funzione esponenziale delle coordinate. La convenienza di introdurre la considerazione di tali raggi evanescenti era già stata segnalata da Giorgio Green nel 1837.

Passando ora allo studio della riflessione alla superficie di un mezzo trasparente di costituzione qualunque, supponiamo piana la superficie riflettente; prendiamola come piano delle y, z e fac-

ciamo giungere su di essa, sotto l'angolo d'incidenza I , un raggio determinante come piano d'incidenza il piano delle $x y$.

Siano ancora α, β, γ gli spostamenti effettivi, computati parallelamente ai tre assi, di una particella eterea del raggio incidente alla fine del tempo t , e siano $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$ gli spostamenti simbolici corrispondenti. La esponenziale che caratterizza il moto incidente si può rappresentare con:

$$e^{u\alpha + v\beta - st}.$$

essendo:

$$u = \frac{2\pi \cos I}{l} i, \quad v = \frac{2\pi \sin I}{l} i, \quad s = \frac{2\pi}{T} i.$$

T esprime la durata di vibrazione e l la lunghezza d'onda.

Affine di avere tante equazioni, quante sono necessarie e sufficienti per rendere determinato il problema della riflessione, è necessario ammettere che dal raggio incidente vengano generati due raggi riflessi, di cui uno visibile e l'altro evanescente e tre raggi rifratti, dei quali due siano visibili e possano talvolta ridursi ad un solo ed il terzo sia evanescente.

Le quantità analoghe alle α, β, γ, u del raggio incidente vengano designate con

$$\begin{array}{ll} \alpha, \beta, \gamma, u, & \text{per il raggio riflesso visibile:} \\ \alpha_e, \beta_e, \gamma_e, u_e & \text{per il raggio riflesso evanescente:} \\ \left. \begin{array}{l} \alpha' \beta' \gamma' u' \\ \alpha'' \beta'' \gamma'' u'' \end{array} \right\} & \text{per i due raggi rifratti visibili:} \\ \alpha_e' \beta_e' \gamma_e' u_e' & \text{per il raggio rifratto evanescente.} \end{array}$$

Ogni spostamento simbolico sia designato, come già si è fatto dianzi, colla lettera designante il corrispondente spostamento effettivo, alla quale si sovrapponga un tratto orizzontale.

Sei equazioni fondamentali vengono immediatamente ottenute da Cauchy applicando il principio di continuità agli spostamenti simbolici, cioè scrivendo che: *la somma degli spostamenti simbolici di ciascuna specie, corrispondenti ai diversi raggi che si propagano in ciascun mezzo, conserva lo stesso valore quando*

si passa da una parte all'altra della superficie riflettente per un tratto di lunghezza infinitesima.

Si ha così:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} + \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}' - \bar{\alpha}'' &= \bar{\alpha}'_e - \bar{\alpha}_e \\ \bar{\beta} + \bar{\beta}_1 - \bar{\beta}' - \bar{\beta}'' &= \bar{\beta}'_e - \bar{\beta}_e \\ \bar{\gamma} + \bar{\gamma}_1 - \bar{\gamma}' - \bar{\gamma}'' &= \bar{\gamma}'_e - \bar{\gamma}_e \\ u(\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_1) - u'\bar{\alpha}' - u''\bar{\alpha}'' &= u'_e\bar{\alpha}'_e - u_e\bar{\alpha}_e \\ u(\bar{\beta} - \bar{\beta}_1) - u'\bar{\beta}' - u''\bar{\beta}'' &= u'_e\bar{\beta}'_e - u_e\bar{\beta}_e \\ u(\bar{\gamma} - \bar{\gamma}_1) - u'\bar{\gamma}' - u''\bar{\gamma}'' &= u'_e\bar{\gamma}'_e - u_e\bar{\gamma}_e\end{aligned}$$

La trasversalità delle vibrazioni nel raggio incidente e nel raggio riflesso conduce alle due equazioni seguenti:

$$\begin{aligned}u\bar{\alpha} + v\bar{\beta} &= 0, \\ u\bar{\alpha}_1 - v\bar{\beta}_1 &= 0.\end{aligned}$$

Infine per il raggio riflesso evanescente si ha ancora:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_e}{u_e} &= \frac{\beta_e}{v} \\ \gamma_e &= 0.\end{aligned}$$

Combinando convenientemente le equazioni precedenti, se ne ottengono le seguenti quattro:

$$\begin{aligned}\bar{\beta} + \bar{\beta}_1 - \bar{\beta}' - \bar{\beta}'' &= \lambda v (\bar{\alpha} + \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}' - \bar{\alpha}''), \\ \bar{\gamma} + \bar{\gamma}_1 - \bar{\gamma}' - \bar{\gamma}'' &= v, \\ u(\bar{\beta} - \bar{\beta}_1) - u'\bar{\beta}' - u''\bar{\beta}'' &= \mu v (\bar{\alpha} + \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}' - \bar{\alpha}''), \\ u(\bar{\gamma} - \bar{\gamma}_1) - u'\bar{\gamma}' - u''\bar{\gamma}'' &= v (\bar{\alpha} + \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}' - \bar{\alpha}''),\end{aligned}$$

nelle quali s'intende:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{u_e} - \frac{1}{u'_e}, \\ \mu - 1 &= \frac{u_e}{u_e - u'_e} \left(\frac{u'_e \bar{\beta}'_e}{v \alpha'_e} - 1 \right), \\ v &= \frac{u_e}{u_e - u'_e} \frac{\bar{\gamma}'_e}{\beta'_e}.\end{aligned}$$

Adunque la risoluzione completa delle questioni relative alla riflessione della luce in generale è subordinata alla conoscenza di tre quantità, λ (coefficiente di ellitticità), μ , ν , le quali derivano dalla considerazione dei raggi evanescenti, ma che, generalmente parlando, non si sanno valutare. Questa essenziale difficoltà è superabile, parzialmente od in tutto, in certi casi molto particolari. Così, per un cristallo uniasse, non dotato di potere rotatorio e tagliato perpendicolarmente all'asse ottico, si trova facilmente:

$$\overline{\alpha'} = 0, \quad \overline{\beta'} = 0, \quad \overline{\gamma''} = 0, \quad \overline{\gamma'_s} = 0,$$

e per conseguenza

$$\nu = 0.$$

Poi mezzi isotropi, oltre a queste ultime condizioni, si ha ancora:

$$\mu = 1;$$

ed applicando la teoria di Cauchy al caso di un raggio polarizzato parallelamente o perpendicolarmente al piano d'incidenza, si ricade sulle note formole di Fresnel.

Vedesi che la teoria sulla riflessione di Cauchy, indipendentemente dall'alto pregio analitico che la distingue, non è d'indole tale da piegarsi alle verificazioni sperimentali e non può, per conseguenza, essere guida sicura negli studi di ottica fisica.

Lavori di F. E. Neumann, di J. Mac-Cullagh e di A. Cornu.

Verso la fine dell'anno 1835 F. E. Neumann presentò all'Accademia delle Scienze di Berlino una sua Memoria che venne in seguito riprodotta altrove ⁽¹⁾, sulla ricerca teorica delle leggi, secondo cui la luce è riflessa e rifratta alla superficie separante due mezzi trasparenti. Due anni dopo, James Mac-Cullagh lesse sullo stesso argomento ⁽²⁾ all'Accademia delle Scienze di Dublino un suo lavoro, il quale, quantunque concepito indipendentemente da quello di Neumann, e perciò condotto con pro-

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, di J. Liouville, tomo VII; Ottobre 1842.

(2) *Id.*, tomo VII, Giugno 1842.

cedimento di forma diversa, parte tuttavia dagli stessi principii. Questi giova qui ricordare sommariamente.

Il principio di continuità, o, come lo chiama Mac-Cullagh dell'*equivalenza delle vibrazioni* da una parte e dall'altra della superficie riflettente viene, come già si notò, ammesso da Fresnel soltanto per le velocità vibratorie che si computano parallelamente a questa superficie; esso non si potrebbe estendere alle componenti normali delle velocità, senza che ciò conduca ad equazioni in certi casi incompatibili.

Questa incompatibilità sparisce quando si ammette che in ogni raggio luminoso le vibrazioni rettilinee sono parallele, e non più normali, al piano di polarizzazione. Perciò uno dei principii su cui fondasi la teoria di Neumann e di Mac-Cullagh è appunto questo, che: *il piano di polarizzazione per un raggio polarizzato rettilineamente passa per la direzione del raggio e contiene le linee di vibrazione.*

Inoltre, per giungere a formole generali, le quali, applicate al caso di mezzi isotropi, coincidano con quelle di Fresnel e coi risultati sperimentali, dovettero Neumann e Mac-Cullagh fare quest'altra ipotesi, che: *l'etere sia egualmente denso in tutti i mezzi e diversamente elastico secondo la varia natura di questi.*

Si applichi il principio della continuità completa alle componenti delle velocità vibratorie secondo tre assi, i quali possono essere: la traccia del piano d'incidenza sulla faccia riflettente, la normale a questa faccia e la normale al piano d'incidenza. Esso fornisce immediatamente tre equazioni nelle quali figurano, oltre le velocità vibratorie diretta, riflessa e due rifratte, anche gli angoli che determinano le direzioni delle quattro specie di vibrazione e l'angolo d'incidenza. Per ciò che riguarda gli angoli che cogli assi formano le direzioni delle due vibrazioni rifratte, si possono agevolmente dedurre i loro valori dalle note leggi della doppia rifrazione.

Una quarta equazione si ottiene applicando il principio di conservazione delle forze vive. In essa entrano le espressioni di due masse eteree, corrispondenti ai due raggi rifratti, le quali ricevono contemporaneamente il moto vibratorio inviato dall'unità di massa eterea corrispondente al raggio incidente. L'ipotesi dell'eguaglianza di densità nell'etere di ambi i mezzi permette

di sostituire sempre ai rapporti di tali masse quelli dei relativi volumi, i quali ultimi si possono facilmente calcolare.

Si ha così in definitiva un sistema di quattro equazioni che ci può dare, in valore ed in direzione, la velocità vibratoria del moto riflesso oltre ai valori delle velocità vibratorie rifratte. Però è importante avvertire che i lavori sperimentali di Fizeau, i quali pongono fuori dubbio l'influenza dello stato di riposo o di moto dei mezzi ponderali sui fenomeni ottici che vi si producono, ci obbligano a ripudiare assolutamente l'ipotesi dell'egualianza di densità dell'etere nei diversi mezzi. Invero questa ipotesi non si potrebbe giustificare se non supponendo pure che, nel muoversi dei corpi, l'etere che vi è contenuto non si mova con essi affatto, oppure ne sia integralmente trasportato. Ora le esperienze di Fizeau dimostrano che i mezzi ponderali in moto trascinano seco una parte del loro etere, lasciando immota solo quell'altra parte che occuperebbe un egual volume di spazio vuoto.

Il Prof. A. Cornu trattò pure della riflessione cristallina in lavori dei quali duolmi di non aver potuto prendere cognizione, se non per i riassunti che se ne pubblicarono nei Resoconti dell'Accademia delle Scienze di Parigi. Nel primo di questi (1) l'A. adotta completamente le idee di Mac-Cullagh e riesce a trarre dalle espressioni analitiche trovate dal Mac-Cullagh, alcuni eleganti teoremi che si possono enunciare sotto forma puramente geometrica e dei quali alcuni si possono considerare come un'applicazione delle ricerche di Chasles sui fasci dei piani omografici. In un secondo lavoro (2) il Prof. Cornu ritorna ai postulati di Fresnel, ammettendo con questi una diversa densità dell'etere nei differenti mezzi e la perpendicolarità del piano di polarizzazione alle linee di vibrazione. Ammette pure il principio di continuità per le componenti delle velocità vibratorie parallele alla superficie riflettente; ma alle due equazioni che questo principio gli fornisce, ne aggiunge una terza, la quale dice che *v' ha equivalenza fra le quantità di moto per le componenti delle velocità vibratorie che sono normali alla superficie riflettente.*

Bene si scorge, e lo avverte l'A. stesso, quanto siavi di ar-

(1) *Comptes rendus*, tomo 60, 1865.

(2) *Comptes rendus*, tomo 63, 1866.

bitrario e di ingiustificato nell'aggiunta di questa quarta equazione, quantunque essa renda il problema determinato e permetta di arrivare a risultati che coincidono con quelli di Fresnel quando si discende al caso dei mezzi isotropi.

Terminando questo rapido cenno sui principali lavori teorici intorno alla riflessione cristallina, credo di poter concludere, non essere sperabile che si possa costruire una teoria su questa parte dell'Ottica matematica, se i principii su cui essa si fonda sono incompatibili con quelli ammessi da Fresnel pei mezzi isotropi. Io cercherò nelle pagine seguenti di dimostrare che, dando ai postulati di Fresnel un carattere di maggior generalità, d'altronde giustificato dalle nozioni che si hanno sulla costituzione dei corpi cristallizzati, si può giungere a determinare completamente le condizioni d'intensità e di polarizzazione per la luce riflessa alla superficie dei mezzi anisotropi.

(*Continua*).

INTORNO A DELLE NUOVE FIGURE ELETTRICHE ED ALLO STRISCIARE
DELLE SCINTILLE ELETTRICHE ; PER CARLO ANTOLIK. MEMO-
RIA PRESENTATA ALL'ACCADEMIA UNGHERESE DELLE SCIENZE.

(*Annalen der Physik und Chemie*. Vol. XV, 3, 1882).

Si ottengono delle regolarissime figure di Lichtemberg sopra palloni di vetro riempiti di acqua calda a circa 60° C. Si può elettrizzare la loro superficie a piacere positivamente o negativamente, il che è assolutamente impossibile con dischi di ebanite o stacciate di resina.

Figure prodotte da scariche eterogenee. — Esegui tutte le seguenti esperienze con una bottiglia di Leida avente un'armatura interna di 620 cm. circa. Sopra un alto isolatore, p. es. un alto cilindro di vetro, ponendo un pallone di vetro pulito e ripieno di acqua molto calda, per impedire condensazione di vapor acqueo, e toccandolo colla pallina di una bottiglia di Leida caricata molto debolmente, otterremo, col cospargere le regioni elettrizzate me-