6. Ueber die Proportionalität von Emissions- und Absorptionsvermögen; von W. Voigt.

Wenngleich der Kirchhoff'sche Satz, welcher das Emissionsvermögen eines Körpers mit seinem Absorptionsvermögen in Beziehung setzt, durch den von seinem Entdecker geführten bewundernswürdigen Beweis begründet ist, so ist doch eine anschauliche und zugleich einigermaassen exacte Darstellung des Mechanismus, welcher jene Beziehung hervorruft, meines Wissens bisher noch nicht geliefert. Während ferner der Satz im Gebiete der Optik zu den wichtigsten Schlüssen benutzt worden ist, scheint er doch mit den Differentialgleichungen der Optik noch nicht in Verbindung gebracht zu sein. Ich will im Folgenden einen Beitrag zur Ausfüllung dieser Lücken zu geben versuchen.

1. Es sei eine unendliche planparallele Platte eines homogen strahlenden und absorbirenden Mediums gegeben. Die Strahlung denken wir uns dadurch bewirkt, dass auf die ponderablen Theile der Schicht fortwährend Einwirkungen ausgeübt werden, die z. B. auf chemischen Processen beruhen können. Um *Schwingungen* hervorzubringen, müssen diese Einwirkungen zeitlich veränderlich sein, und wir wollen uns vorstellen, dass ähnlich, wie man das wohl bei der Erregung und Erhaltung des Tönens von Pfeifen stattfindend denkt, das Gesetz dieser Einwirkungen durch eine Summe von Gliedern aller möglichen Perioden dargestellt werden kann.

In Wirklichkeit wird die Erregung innerhalb des homogen leuchtenden Körpers von Ort zu Ort regellos wechseln, und es wird nur ein mittlerer Effect räumlich constant sein. Wir wollen uns der Einfachheit halber vorstellen, dass in sehr dünnen, der Begrenzung der Platte parallelen Schichten die Erregung allenthalben die gleiche sei, während wir über das Gesetz der Veränderlichkeit von einer zur anderen Schicht zunächst nichts weiter festsetzen. Die Platte wird dann nur ebene Wellen aussenden, die ihren Grundflächen parallel liegen.

Ein solcher Fall ist zwar nur ein idealer, aber es scheint ihm nichts anzuhaften, was ihn physikalisch unmöglich machte.

Benutzen wir irgend eine der optischen Theorien, welche mit Hülfsvectoren operiren, die für den Zustand der ponderablen Theile charakteristisch sind, so gelingt es leicht, unter den gemachten Voraussetzungen einen Ausdruck für die Stärke der ausgesandten Schwingungen abzuleiten.

Stellen $X, \mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \dots \mathfrak{X}_n$ parallele Componenten gewisser Vectorgrössen $K, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots \mathfrak{R}_n$ nach der X -Axe dar, von denen $\mathfrak{R}$ dem Fresnel'schen Schwingungsvector entspricht, und werden unter a_h, b_h, ε_h positive Constanten verstanden, so erhalten wir ein der elektrischen Lichttheorie entsprechendes Formelsystem für die Erregung ebener Wellen, die parallel der X -Axe schwingen und parallel der Z -Axe fortschreiten, wenn wir schreiben¹⁾

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2},$$

$$(2) \quad \mathfrak{X} = X + \sum \mathfrak{X}_h,$$

$$(3) \quad \mathfrak{X}_h + a_h \frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t} + b_h \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t^2} - \varepsilon_h X = P_h.$$

Hierin drückt P_h die zur X -Axe parallele Componente einer auf den Vector $\mathfrak{R}_h$ wirkenden Erregung aus; v ist die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum.

Da alle diese Gleichungen homogen linear sind, so können wir das allgemeine Problem der Erregung zerlegen und unter P_h zunächst nur den Antheil der ganzen Erregung mit der Periode τ verstehen. Indem wir mit complexen Ausdrücken rechnen, setzen wir demgemäss

$$(4) \quad P_h = F_h e^{i t / \vartheta}, \quad \vartheta = \tau / 2 \pi,$$

wobei dann F_h eine complexe Function von z bezeichnet, welche die Amplitude und die Phase der Erregungscomponente P_h bestimmt. Die erstere werden wir innerhalb des homogen erregten Körpers als constant zu betrachten haben.

In dem Ansatz (3) besteht zwischen den für die Erregung und den für die Dämpfung der Schwingungen maassgebenden

1) Vgl. z. B. P. Drude, Wied. Ann. 48. p. 542. 1893.

Parametern zunächst keinerlei Zusammenhang. Letztere, nämlich die Coefficienten a_h , gelten in der Theorie der Dispersion und Absorption als unabhängig von der Farbe, d. h. von τ ; es wird zu untersuchen sein, was in dieser Hinsicht der Kirchhoff'sche Satz über die erregende Vectorcomponente P_h verlangt. Die Coefficienten a_h , b_h , ε_h werden Functionen der Temperatur sein; es bietet sich die Frage nach der analogen Veränderung der P_h . Endlich variiren die a_h , b_h , ε_h von Körper zu Körper; es wird zu entscheiden sein, ob Gleiches für die P_h gilt, oder ob diese etwa durch *universelle* Functionen der Temperatur dargestellt werden.

Es mag übrigens hervorgehoben werden, dass wegen der homogen linearen Form der Gleichungen (1) bis (3) die Absorption von der Erregung *direct* nicht abhängig ist, nämlich stets ebenso stattfindet, als wenn die P_h gleich Null wären; der Zusammenhang zwischen beiden beruht nur darauf, dass die a_h , b_h , ε_h und die P_h sämmtlich von derselben Variablen, nämlich der Temperatur, abhängen. —

Den Formeln (3) bis (4) ordnen sich ganz analoge für die parallel der Y -Axe schwingenden Componenten I , $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Y}_2$, . . . $\mathfrak{Y}_n$ zu. Bei isotropen Körpern sind die Richtungen X und Y innerhalb der Wellenebene beliebig, und einer jeden entsprechen Constanten a_h , b_h , ε_h von gleicher Grösse, sowie Erregungen P_h von gleicher Amplitude, wenngleich verschiedener Phase.

Bei Krystallen sind die X - und Y -Axen in die der betrachteten ebenen Welle zugehörigen Polarisationsrichtungen zu legen, und die ihnen entsprechenden Parameter sind verschieden; ob analoges für die Amplituden der ihnen parallelen Erregungen gilt, hat die nähere Untersuchung zu entscheiden.

Für die zur Fortpflanzungsrichtung Z parallelen Componenten Z , β , β_1 , β_2 , . . . β_n nimmt die erste Gleichung die Gestalt $\partial \beta / \partial t = 0$ an, während die zweite und die dritte mit (2) und (3) durchaus conform sind. Dass $\beta = Z + \Sigma \beta_h$ verschwindet, obwohl Erregungen parallel zur Z -Axe nicht fehlen können, ja bei isotropen Körpern den nach den anderen Axen wirkenden an Amplitude gleich sein müssen, verlangt also, dass sich die verschiedenen Theile von β gegenseitig zerstören. —

Zur Integration der Gleichungen (1) bis (3) setzen wir

$$(5) \quad X = U e^{it/\vartheta}, \quad \mathfrak{X} = \mathfrak{U} e^{it/\vartheta}, \quad \mathfrak{X}_h = \mathfrak{U}_h e^{it/\vartheta},$$

worin die $U, \mathfrak{U}, \mathfrak{U}_h$ Functionen von z sind.

Aus (3) folgt dann bei Einführung der Abkürzung

$$(6) \quad \vartheta^2 + i a_h \vartheta - b_h = \Theta_h,$$

$$(7) \quad \mathfrak{U}_h \Theta_h - \varepsilon_h \vartheta^2 U = \vartheta^2 F_h;$$

und aus (2) ergibt sich:

$$(8) \quad \mathfrak{U} = U \left(1 + \vartheta^2 \sum \frac{\varepsilon_h}{\Theta_h} \right) + \vartheta^2 \sum \frac{F_h}{\Theta_h},$$

wobei die Summen immer über die den verschiedenen Vektoren $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_n$ entsprechenden Antheile zu erstrecken sind.

Nun ist bekanntlich¹⁾

$$(9) \quad 1 + \vartheta^2 \sum \frac{\varepsilon_h}{\Theta_h} = \left(\frac{v}{o} \right)^2, \quad \frac{1}{o} = \frac{1 - i\kappa}{\omega},$$

unter o die complexe, unter ω die reelle Fortpflanzungsgeschwindigkeit, unter κ den Absorptionsindex einer ebenen Welle in dem betrachteten Medium verstanden. Benutzen wir dies und setzen noch kurz

$$(10) \quad \sum \frac{F_h}{\Theta_h} = S,$$

so schreibt sich Formel (8)

$$(11) \quad \mathfrak{U} = U \left(\frac{v}{o} \right)^2 + \vartheta^2 S,$$

und die Gleichung (1) nimmt die Gestalt an

$$(12) \quad \frac{U v^2}{o^2 \vartheta^2} + S + v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0.$$

Ihr vollständiges Integral ist bekanntlich

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = e^{+iz/o\vartheta} \left(C + \frac{i o \vartheta}{2 v^2} \int_{(z)} S_{\zeta} e^{-i\zeta/o\vartheta} d\zeta \right) \\ \quad + e^{-iz/o\vartheta} \left(C' - \frac{i o \vartheta}{2 v^2} \int_{(z)} S_{\zeta} e^{+i\zeta/o\vartheta} d\zeta \right), \end{array} \right.$$

wobei S_{ζ} die Function S für das Argument ζ und C, C' je eine (complexe) Constante bezeichnet. Die gesammte in jeder Ebene $z = \text{const.}$ stattfindende Schwingung stellt sich hiernach dar

¹⁾ Vgl. z. B. P. Drude, l. c. p. 543.

als die Superposition zweier gewöhnlicher in positiver, bez. in negativer Richtung fortschreitender Wellen und zweier Wellensysteme, die von einem Systeme unendlich dünner, leuchtender Schichten ausgehen. Jede Schicht von der Dicke $d\zeta$ an der Stelle $z = \zeta$ sendet nach der negativen Richtung eine Schwingung von der complexen Amplitude

$$(14) \quad u_- = \frac{i o \vartheta}{2 v^2} S_\zeta e^{+i(z-\zeta)/o\vartheta} d\zeta,$$

dagegen nach der positiven eine von der folgenden

$$(15) \quad u_+ = -\frac{i o \vartheta}{2 v^2} S_\zeta e^{-i(z-\zeta)/o\vartheta} d\zeta.$$

Dabei besteht nach (10) S , und demgemäss auch u_- , bez. u_+ aus einer Summe von n Gliedern, die der Erregung der n Vectorcomponenten $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \dots \mathfrak{X}_n$ entsprechen. —

Nun wollen wir eine Platte des vorausgesetzten Körpers betrachten, die zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = l$ liegt und beiderseitig an den leeren Raum stösst.

Es sind dann drei Gebiete zu unterscheiden. Für $-\infty < z < 0$ sei der Index ' charakteristisch; dort gilt

$$(16) \quad \frac{\partial^2 X'}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 X'}{\partial x^2}.$$

Für $0 < z < l$ behalten wir die obigen Bezeichnungen und Bedingungen bei.

Für $l < z < +\infty$ sei der Index '' charakteristisch; dort gilt

$$(17) \quad \frac{\partial^2 X''}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 X''}{\partial x^2}.$$

Die Grenzbedingungen lauten

$$(18) \quad \text{für } z = 0: \quad \overline{X'} = \overline{X}, \quad \frac{\partial \overline{X'}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{X}}{\partial z};$$

$$(19) \quad \text{für } z = l: \quad \overline{X} = \overline{X''}, \quad \frac{\partial \overline{X}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{X''}}{\partial z}.$$

Wir wollen indessen aus gewissen Gründen dies Gleichungssystem nicht methodisch lösen, sondern nur bemerken, dass nach ihm eine von *aussen* normal auf die eine Grenze der

Platte fallende Welle von der Amplitude Eins eine reflectirte und eine gebrochene Welle von den complexen Amplituden

$$(20) \quad \varrho_1 = -\frac{v-o}{v+o}, \quad \delta_1 = \frac{2o}{v+o}$$

hervorrufen, dagegen eine von *innen* auf dieselbe Grenze fallende Welle solche von den Amplituden

$$(21) \quad \varrho = +\frac{v-o}{v+o}, \quad \delta = \frac{2v}{v+o}.$$

Es ist also

$$(22) \quad \varrho + \varrho_1 = 0, \quad \delta \delta_1 = 1 + \varrho \varrho_1.$$

Nun betrachten wir die Gesamtstrahlung, die eine Schicht der Platte von der Dicke $d\zeta$ nach der Seite $+z$ in den leeren Raum sendet.

Versteht man unter $\bar{u}_+$ und $\bar{u}_-$ die Werthe von u_+ und u_- für $z=0$, und setzt abgekürzt

$$(23) \quad e^{-i l / o \vartheta} = \varepsilon,$$

so erhält man als Resultat aller Reflexionen und Brechungen an den Grenzflächen die complexe Amplitude der aus der Platte austretenden Welle:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = (\bar{u}_- \varrho + \bar{u}_+) \varepsilon \delta (1 + \varepsilon^2 \varrho^2 + \varepsilon^4 \varrho^4 + \dots) \\ \quad = \frac{(\bar{u}_+ + \varrho \bar{u}_-) \varepsilon \delta}{1 - \varepsilon^2 \varrho^2}. \end{array} \right.$$

Um von der Strahlung der einzelnen Schicht zu derjenigen der ganzen Platte zu gelangen, hat man dies in Bezug auf ζ von 0 bis l zu integrieren, und erhält, indem man setzt:

$$(25) \quad \frac{i o \vartheta}{2 v^2} \int_0^l S_{\zeta} e^{-i \zeta / o \vartheta} d\zeta = S_-, \quad -\frac{i o \vartheta}{2 v^2} \int_0^l S_{\zeta} e^{+i \zeta / o \vartheta} d\zeta = S_+,$$

für die nach der $+z$ -Richtung gestrahlte complexe Amplitude

$$(26) \quad \alpha = \frac{(S_+ + \varrho S_-) \varepsilon \delta}{1 - \varepsilon^2 \varrho^2}$$

Um das Quadrat der diesem α entsprechenden *reellen* Amplitude zu finden, haben wir nur α mit dem ihm conjugirt complexen Ausdruck α' zu multipliciren;

$$(27) \quad \alpha \alpha' = E$$

kann dann zugleich als das Emissionsvermögen der Platte in der Richtung $+z$ angesehen werden.

Führen wir auch die zu den complexen Functionen S_+ , S_- , ε , δ , ϱ conjugirten Ausdrücke S_+^* , S_-^* , ε^* , δ^* , ϱ^* ein, so resultirt

$$(28) \quad E = \frac{\varepsilon \varepsilon^* \delta \delta^* (S_+ + \varrho S_-) (S_+^* + \varrho^* S_-^*)}{(1 - \varepsilon^2 \varrho^2) (1 - \varepsilon^{*2} \varrho^{*2})}.$$

Das Emissionsvermögen in der Richtung $-z$ ist dem vorstehenden immer dann gleich, wenn die Erregung der Platte symmetrisch zu ihrer Mittelfläche stattfindet. —

Der denkbar einfachste Fall ist nun der, dass die Erregung *homogen* ist, und somit S für alle Schichten den gleichen Werth hat. Dann ist

$$(29) \quad S_- = \frac{o^2 \vartheta^2 S}{2 v^2} (1 - \varepsilon), \quad S_+ = - \frac{o^2 \vartheta^2 S}{2 v^2} (\varepsilon^{-1} - 1),$$

und demgemäss wird auch

$$(30) \quad E = \frac{\delta \delta^* o^2 o'^2 \vartheta^4 S S' (1 - \varepsilon) (1 - \varepsilon^*)}{4 v^4 (1 + \varepsilon \varrho) (1 + \varepsilon^* \varrho^*)}.$$

Hiermit wollen wir nun den Ausdruck für das *Absorptionsvermögen* A der Platte vergleichen. Bezeichnen r und d die complexen Schwächungscoefficienten der an der Platte reflectirten und durch die Platte hindurchgegangenen Wellen, und r' d' die ihnen conjugirten Ausdrücke, so ist nach seiner Definition

$$(31) \quad A = 1 - r r' - d d'.$$

Für r und d erhält man aber durch Verfolgung des Vorganges der Reflexion und der Refraction an den beiden Grenzflächen der Platte sogleich in den früheren Bezeichnungen

$$(32) \quad \begin{cases} r = \varrho_1 + \delta \delta_1 \varrho \varepsilon^2 (1 + \varepsilon^2 \varrho^2 + \varepsilon^4 \varrho^4 + \dots), \\ d = \delta \delta_1 \varepsilon (1 + \varepsilon^2 \varrho^2 + \varepsilon^4 \varrho^4 + \dots). \end{cases}$$

Benutzt man dabei die Beziehungen (22), so erhält man leicht

$$(33) \quad r = \varrho_1 \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \delta \delta_1}{1 - \varrho^2 \varepsilon^2} \right) = \frac{\varrho_1 (1 - \varepsilon^2)}{1 - \varrho^2 \varepsilon^2}, \quad d = \frac{\varepsilon (1 - \varrho^2)}{1 - \varrho^2 \varepsilon^2}.$$

Die Combination dieser Werthe mit (31) führt zu der Formel

$$(34) \quad A = 1 - \frac{\varrho_1 \varrho_1^* (1 - \varepsilon^2) (1 - \varepsilon'^2) + \varepsilon \varepsilon^* (1 - \varrho^2) (1 - \varrho'^2)}{(1 - \varrho^2 \varepsilon^2) (1 - \varrho'^2 \varepsilon'^2)}.$$

Wenn der Kirchhoff'sche Satz auf den von uns betrachteten Fall anwendbar sein soll, so muss jedenfalls E/A unabhängig von der Dicke l der absorbirenden und strahlenden Schicht sein, die in ε und ε' auftritt. Dass dem *allgemein* nicht so ist, zeigt eine genauere Betrachtung des Werthes von E/A . Aber auch in den Grenzfällen sehr kleiner oder sehr grosser Dicke fällt l nicht aus dem Ausdruck heraus. Wendet man z. B. die Formeln (30) und (34) auf eine Schicht von so geringer Dicke l an, dass man sich bei ihrer Entwicklung auf das niedrigste Glied beschränken kann, so wird E in Bezug auf l vom *zweiten*, A vom *ersten* Grade.

Setzt man dagegen l so gross voraus, dass ε^2 , ε'^2 und $\varepsilon\varepsilon'$ neben Eins vernachlässigt werden können, so wird A von l ganz frei, während E von ihm abhängig bleibt. Und lässt man endlich schon ε und ε' neben Eins fort, so erhält man zwar den von l freien Ausdruck

$$\frac{E}{A} = \frac{\omega^3 \vartheta^4 S S'}{4 v^3 (1 + \kappa^2)};$$

dieser sollte aber nach dem Kirchhoff'schen Satz eine *universelle* Function der Temperatur allein darstellen, was er nach den Werthen (9) und (10) keineswegs sein kann.

Das durch die Theorie gelieferte Verhältniss E/A lässt sich also jedenfalls in dem betrachteten speciellen Falle vollkommen homogener Erregung der Platte mit dem Kirchhoff'schen Satz nicht in Einklang bringen. Dass Gleiches auch in dem allgemeineren Falle homogener Erregung gilt, wenn zwar die Amplituden der erregenden Vektoren in der ganzen Platte constant sind, aber ihre Phasen von Schicht zu Schicht wechseln, erkennt man am einfachsten, wenn man S in eine Fourier'sche Reihe entwickelt. Es wird dann E von dem Gesetz dieser Veränderlichkeit abhängig, nicht aber A .

Sonach lässt sich behaupten, dass für die Emission durch *regelmässige* homogene Erregungen und für die Absorption *regelmässiger* einfallender Schwingungen der Kirchhoff'sche Satz nicht gültig ist; offenbar sind die hier stattfindenden Schwingungen *geordnete* in dem Sinne, dass dabei der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, auf dem Kirchhoff's Beweis seines Satzes beruht, die Gültigkeit verliert.

2. *Ungeordnete* Bewegungen im strengen Sinne der kinetischen Gastheorie sind natürlich bei fortgepflanzten Lichtschwingungen niemals vorhanden. Immerhin wird ein Analogon zu dergleichen in den *incohärenten* Schwingungen zu sehen sein, die in Wirklichkeit sowohl durch mehrere voneinander unabhängige Lichtquellen immer, als auch durch eine und dieselbe Lichtquelle in sehr schnell aufeinander folgenden Zeitmomenten ausgesendet werden. Wir wollen untersuchen, ob die Einführung von solchen Incohärenzen eine Möglichkeit der Erfüllung des Kirchhoff'schen Satzes bei Lichtschwingungen liefert.

Die Annahme der Incohärenz ist in doppelter Weise zu berücksichtigen. *Einerseits* sind die Phasen der von aussen auf die Platte fallenden Wellen derart häufig und regellos, am einfachsten sprungweise veränderlich einzuführen, dass die an der Vorder- und die an der Hinterfläche der Platte reflectirten Theile einer einfallenden Welle nicht interferiren. *Andererseits* sind die Phasen der Erregungen der kleinsten leuchtenden Theilchen, und zwar von Ort zu Ort regellos, am einfachsten wiederum sprungweise wechselnd anzunehmen. Unserem idealen Problem entspricht dabei die Vereinfachung, dass die Erregungen aller Theilchen einer jeden unendlich dünnen Schicht *unter sich* cohärent stattfinden; dagegen wird die Erregung der verschiedenen Vektoren $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots \mathfrak{R}_n$ im allgemeinen incohärent geschehen.

Die charakteristische Eigenschaft incohärenter Wellen gleicher Periode ist die Abwesenheit merklicher Interferenzen. Während bei cohärenten Schwingungen die complexen Amplituden sich addiren, gilt bei incohärenten Schwingungen das Gleiche für die Quadrate der reellen Amplituden. Bezeichnen wir also mit $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ die complexen Amplituden von n incohärenten Wellen, so ist die resultirende reelle Amplitude A gegeben durch

$$A^2 = \sum \alpha_h \alpha'_h,$$

wobei wieder α'_h die zu α_h conjugirte Function bezeichnet.

Um das *Emmissionsvermögen* der betrachteten Platte unter der Annahme incohärenter Erregungen ihrer Schichten zu berechnen, ist zunächst auf die Formeln (14) und (15) zurückzugreifen. Eine jede Schicht sendet infolge der incohärenten

Erregung der verschiedenen Vektoren $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \dots \mathfrak{K}_n$ für sich allein bereits n incohärente Schwingungen aus, von deren reellen Amplituden nach dem oben Gesagten die Quadrate zu summieren sind. Bezeichnen wir diese Summen bez. mit r_-^2 und r_+^2 , so ist

$$(35) \quad \begin{cases} r_-^2 = \frac{o o' \vartheta^2 \Sigma}{4 v^4} e^{+i \frac{(z-\zeta)}{\vartheta} \left(\frac{1}{o} - \frac{1}{o'} \right)} (d \zeta)^2, \\ r_+^2 = \frac{o o' \vartheta^2 \Sigma}{4 v^4} e^{-i \frac{(z-\zeta)}{\vartheta} \left(\frac{1}{o} - \frac{1}{o'} \right)} (d \zeta)^2, \end{cases}$$

wobei kurz

$$(36) \quad \sum \frac{F_h F'_h}{\Theta_h \Theta'_h} = \Sigma$$

gesetzt ist.

Versteht man wieder unter $\bar{r}_-$ und $\bar{r}_+$ die Werthe von r_- und r_+ für $z = 0$, so ergibt sich für die Emission einer einzelnen Schicht unter Rücksicht auf alle Reflexionen im Innern der Platte

$$(37) \quad \begin{cases} e = (\bar{r}_+^2 + \varrho \varrho' \bar{r}_-^2) \varepsilon \varepsilon' \delta \delta' (1 + (\varepsilon \varepsilon' \varrho \varrho')^2 + (\varepsilon \varepsilon' \varrho \varrho')^4 + \dots) \\ = \frac{(\bar{r}_+^2 + \varrho \varrho' \bar{r}_-^2) \varepsilon \varepsilon' \delta \delta'}{1 - (\varepsilon \varepsilon' \varrho \varrho')^2}. \end{cases}$$

Um hieraus die Emission E der ganzen Platte zu finden, ist e über deren ganze Dicke zu summieren. Da wir $d \zeta$ mit der Dicke Δ der incohärent erregten Schichten identificiren dürfen, so können wir die Summen über $\bar{r}_-^2$ bez. $\bar{r}_+^2$ schreiben

$$(38) \quad \begin{cases} \Sigma_- = \frac{o o' \vartheta^2 \Delta}{4 v^4} \int_0^l \Sigma_{\zeta} e^{-i \frac{\zeta}{\vartheta} \left(\frac{1}{o} - \frac{1}{o'} \right)} d \zeta, \\ \Sigma_+ = \frac{o o' \vartheta^2 \Delta}{4 v^4} \int_0^l \Sigma_{\zeta} e^{+i \frac{\zeta}{\vartheta} \left(\frac{1}{o} - \frac{1}{o'} \right)} d \zeta, \end{cases}$$

und erhalten bei Benutzung der hierdurch eingeführten Bezeichnungen Σ_- und Σ_+ für das Emissionsvermögen der ganzen Platte

$$(39) \quad E = \frac{\varepsilon \varepsilon' \delta \delta' (\Sigma_+ + \varrho \varrho' \Sigma_-)}{1 - (\varepsilon \varepsilon' \varrho \varrho')^2}.$$

In dem allein interessirenden Falle, dass alle Schichten der Platte in gleicher Stärke erregt werden, gilt, wie leicht zu sehen,

$$(40) \quad \Sigma_- = \frac{i o o' \vartheta^3 (1 - \varepsilon \varepsilon') \Delta \Sigma}{4 v^4 \left(\frac{1}{o'} - \frac{1}{o} \right)}, \quad \Sigma_+ = \frac{i o o' \vartheta^3 (1 - \varepsilon \varepsilon') \Delta \Sigma}{4 v^4 \varepsilon \varepsilon' \left(\frac{1}{o'} - \frac{1}{o} \right)};$$

hier wird also

$$(41) \quad E = \frac{i o o' \delta \delta' \vartheta^3 (1 - \varepsilon \varepsilon') \Delta \Sigma}{4 v^4 \left(\frac{1}{o'} - \frac{1}{o} \right) (1 - \varepsilon \varepsilon' \varrho \varrho')},$$

oder indem die Werthe

$$(42) \quad \frac{1}{o} = \frac{1 - i \kappa}{\omega}, \quad \frac{1}{o'} = \frac{1 + i \kappa}{\omega}$$

benutzt werden

$$(43) \quad E = \frac{\omega^3 \vartheta^3 \delta \delta' (1 - \varepsilon \varepsilon') \Delta \Sigma}{8 v^4 \kappa (1 + \kappa^2) (1 - \varepsilon \varepsilon' \varrho \varrho')},$$

wobei auch

$$(44) \quad \varepsilon \varepsilon' = e^{-2 l \kappa / \omega \vartheta}$$

die Schwächung des reellen Amplitudenquadrates, bez. der Intensität einer die Dicke der Platte einfach durchlaufenden Welle darstellt.

In den vorstehenden Resultaten dürfte auf den ersten Blick das Auftreten der Dicke Δ der incohärent erregten Schichten befremdlich erscheinen. Man kann sich aber leicht davon überzeugen, dass dasselbe durchaus in Uebereinstimmung ist mit der der Berechnung zu Grunde gelegten Vorstellung.

Beschränkt man sich nämlich auf den einfachsten Fall so geringer Absorption, dass nicht nur κ^2 , sondern auch $(2 l \kappa / \omega \vartheta)^2$ neben Eins vernachlässigt werden kann, und setzt weiter eine so schwache Reflexion an den Grundflächen der Platte voraus, dass auch $\varrho \varrho'$ neben Eins fortbleiben kann, so ergibt (43)

$$(45) \quad E = \frac{\omega^3 \vartheta^2}{4 v^4} l \Delta \Sigma.$$

Nun ist nach (36)

$$(46) \quad \Sigma = \sum \frac{F_h F_h'}{\Theta_h \Theta_h'} = \sum \frac{R_h^2}{\Theta_h \Theta_h'},$$

worin R_h die reelle Amplitude des Vectors P_h bezeichnet, der die Schwingungscomponente $\mathfrak{X}_h$ erregt. l ist gleich ΔA , falls

A die Zahl der incohärent erregten Schichten von der Dicke Δ in der Platte bezeichnet. Somit ist auch

$$l \Delta \Sigma = A \sum \frac{R_h^2 \Delta^2}{\Theta_h \Theta_h'}.$$

Nun wirkt nach (14) und (15) jede Schicht in Bezug auf jeden Vector $\mathfrak{K}_h$ proportional mit dem Product $R_h \Delta$; da die $\mathfrak{K}_h$ incohärent schwingen, so summiren sich die Quadrate der von ihnen ausgesandten reellen Amplituden, die resultirende Intensität muss also mit $A(R_h \Delta)^2$ proportional sein, wie auch die Formel ergibt. —

Für das *Absorptionsvermögen* der Platte gegenüber incohärenten Schwingungen gilt statt (31)

$$(47) \quad A = 1 - R - D,$$

wobei R und D die Schwächungsfactoren der an der Platte reflectirten, bez. durch sie hindurchgehenden *Intensität* darstellen. Ihre Werthe ergeben sich im Anschluss an (32) zu

$$(48) \quad \begin{cases} R = \varrho_1 \varrho_1' + \delta \delta' \delta_1 \delta_1' \varrho \varrho' \varepsilon^2 \varepsilon'^2 (1 + (\varepsilon \varepsilon' \varrho \varrho')^2 + (\varepsilon \varepsilon' \varrho \varrho')^4 + \dots) \\ D = \delta \delta' \delta_1 \delta_1' \varepsilon \varepsilon' (1 + (\varepsilon \varepsilon' \varrho \varrho')^2 + (\varepsilon \varepsilon' \varrho \varrho')^4 + \dots), \end{cases}$$

d. h. zu

$$(49) \quad R = \varrho_1 \varrho_1' + \frac{\delta \delta' \delta_1 \delta_1' \varrho \varrho' \varepsilon^2 \varepsilon'^2}{1 - (\varepsilon \varepsilon' \varrho \varrho')^2}, \quad D = \frac{\delta \delta' \delta_1 \delta_1' \varepsilon \varepsilon'}{1 - (\varepsilon \varepsilon' \varrho \varrho')^2}.$$

Hieraus folgt unter Benutzung von (22)

$$(50) \quad A = 1 - \varrho \varrho' - \frac{(1 - \varrho^2)(1 - \varrho'^2) \varepsilon \varepsilon'}{1 - \varepsilon \varepsilon' \varrho \varrho'},$$

was man auch in der Form

$$(51) \quad A = \frac{(1 - \varrho \varrho')(1 - \varepsilon \varepsilon') + (\varrho - \varrho')^2 \varepsilon \varepsilon'}{1 - \varepsilon \varepsilon' \varrho \varrho'}$$

schreiben kann.

Bildet man aus den in (43) und (51) bestimmten Werthen das Verhältniss E/A , so erkennt man, dass aus demselben das *Aggregat* $\varepsilon \varepsilon'$ und somit die in demselben enthaltene Dicke l der behandelten Platte im allgemeinen nicht herausfällt.

Eine allgemeine und strenge Gültigkeit besitzt sonach das Kirchhoff'sche Gesetz auch bei der in parallelen Schichten incohärent erregten und incohärente Wellen absorbirenden Platte nicht.

Doch fallen einige specielle Fälle ins Auge, wo E/A streng von l unabhängig ist. Der erste findet statt, wenn $\varrho = \varrho'$,

d. h. nach (21) $o = o'$ ist; er setzt ein verschwindendes κ , also einen vollständig durchsichtigen Körper voraus, und hat für uns daher keine Bedeutung. Der zweite tritt ein, wenn l unendlich gross ist.

Eine *angenäherte* Unabhängigkeit des Verhältnisses E/A von l findet dann statt, wenn in dem Ausdruck für A das zweite Glied des Zählers neben dem ersten, oder

$$(52) \quad \beta = \frac{(q - q')^2 \varepsilon \varepsilon'}{(1 - q q')(1 - \varepsilon \varepsilon')}$$

neben Eins vernachlässigt werden darf.

Zur Beurtheilung der Umstände, unter denen β sehr klein wird, bilden wir seinen Werth bei Einführung der Beziehungen (9), (21) und (44); derselbe gestaltet sich zu

$$(53) \quad \beta = \frac{-4 v \omega \kappa^2}{v^2 (1 + \kappa^2) + 2 v \omega + \omega^2} \cdot \frac{1}{e^{2 \kappa l / \omega \vartheta} - 1},$$

und man erkennt, dass in erster Linie ein grosser Werth des Exponenten $2 \kappa l / \omega \vartheta = 4 \pi n \kappa l / \lambda$, unter λ die Wellenlänge im Vacuum, unter n den Brechungsindex v/ω der Platte verstanden, der Kleinheit von β förderlich ist. Dies darf aber da, wo die obigen Annahmen incohärenter Bewegungen zutreffen sollen, wohl stets als erfüllt angesehen werden. Damit nämlich die an der Vorderfläche und die an der Hinterfläche der Platte reflectirten Wellen nicht interferiren, muss in praxi die Dicke der Schicht viele Tausend Wellenlängen betragen. Wenn κ sehr klein, der Körper also nahezu durchsichtig ist, wird

$$(54) \quad \beta = -\frac{\kappa \lambda}{\pi l} \cdot \frac{v \omega}{(v + \omega)^2};$$

es ist somit auch hier möglich, durch hinreichend grosses l dem Werth von β eine beliebige Kleinheit zu geben.

Wir wollen somit weiter mit dem Ausdruck

$$(55) \quad A = \frac{(1 - q q')(1 - \varepsilon \varepsilon')}{1 - q q' \varepsilon \varepsilon'}$$

rechnen¹⁾ und erhalten mit seiner Hülfe bei Benutzung von (43)

$$(56) \quad \frac{E}{A} = \frac{\omega^3 \vartheta^3 \delta \delta' A \Sigma}{8 v^4 \kappa (1 + \kappa^2)(1 - q q')}$$

1) In den Fällen, wo β nicht neben Eins zu vernachlässigen ist, würde im Folgenden $A/(1 + \beta)$ an Stelle von A treten, wobei $\beta < 0$ ist.

oder bei Heranziehung der Werthe (21) und (9)

$$(57) \quad \frac{E}{A} = -\frac{\omega^2 g^3 \Delta \Sigma}{8 v^3 \kappa}.$$

Nun ist nach (46)

$$\Sigma = \sum \frac{R_h^2}{\Theta_h \Theta'_h},$$

worin R_h die Erregung des Vectors $\mathfrak{X}_h$ misst; dazu folgt aus (9)

$$(58) \quad \frac{2 v^3 \kappa}{\omega^2 g^3} = \sum \frac{\varepsilon_h a_h}{\Theta_h \Theta'_h}.$$

Bei Einführung dieser Werthe ergibt sich aus (57)

$$(59) \quad \frac{E}{A} = \frac{\Delta \sum \frac{R_h^2}{\Theta_h \Theta'_h}}{4 v \sum \frac{a_h \varepsilon_h}{\Theta_h \Theta'_h}}.$$

Soll dieser Ausdruck bei einem und demselben bestimmt temperirten Körper von der Farbe unabhängig sein, so muss offenbar

$$(60) \quad R_h^2 \Delta = 4 v a_h \varepsilon_h k^2$$

sein, wobei k eine dem Körper individuelle Function der Temperatur bezeichnet. Da a_h und ε_h in der elektrischen Lichttheorie von der Periode unabhängig sind, so muss gleiches von $R_h^2 \Delta$ gelten, und da kein Grund vorhanden ist, Δ mit der Farbe variiren zu lassen, so darf man hieraus auch für R_h die Unabhängigkeit von τ folgern.

Ist die Relation (60) erfüllt, so nimmt die Gleichung (59) die Gestalt an

$$(61) \quad \frac{E}{A} = k^2;$$

zur allgemeinen Gültigkeit des Kirchhoff'schen Gesetzes ist dann also nur noch erforderlich, dass k von der Substanz unabhängig ist und somit *eine universelle Function der Temperatur* darstellt.

Nun ist nach (3), (4) und (46) R_h die reelle Amplitude der Vectorcomponente P_h , welche die Schwingungen der Componente $\mathfrak{X}_h$ erregt. Die Gültigkeit des Kirchhoff'schen Gesetzes ist also einerseits zwar vereinbar mit der denkbar einfachsten Annahme, dass R_h von der Periode unabhängig ist,

andererseits verlangt sie aber eine nahe Beziehung von R_h zu den dem Medium individuellen Constanten α_h und ε_h , welche bez. die Dämpfung der Eigenschwingungen von $\mathfrak{X}_h$ und den Einfluss von $\mathfrak{X}_h$ auf die Lichtschwingungen messen, die kaum direct zu begründen sein dürfte.

Es findet also zwischen dem Kirchhoff'schen Gesetz und den Differentialgleichungen der Optik ein ähnliches Verhältniss statt, wie zwischen gewissen allgemeinen Sätzen der Thermodynamik und der kinetischen Theorie der Gase und Flüssigkeiten. Die ersteren sind nicht direct aus der letzteren zu gewinnen; ihre Gültigkeit verlangt vielmehr die Erfüllung specieller Bedingungen, deren Bestehen sich aus der kinetischen Hypothese keineswegs von selbst ergibt. —

Der Ausdruck (43) für das Emissionsvermögen der Platte nimmt bei Einführung der Beziehung (60) und des Brechungsverhältnisses $v/\omega = n$ die folgende Form an

$$(62) \quad E = \frac{4n k^2 (1 - \varepsilon \varepsilon')}{(n^2(1 + \kappa^2) + 1)(1 - \varepsilon \varepsilon') + 2n(1 + \varepsilon \varepsilon')},$$

worin nach dem Vorstehenden k^2 eine universelle Function der Temperatur darstellt.

Bei so schwacher Absorption, dass $2l\kappa/\omega\vartheta = 4\pi l n \kappa/\lambda$ neben Eins vernachlässigt werden kann, giebt dies einfacher

$$(63) \quad E = \frac{4\pi \kappa l n k^2}{\lambda},$$

bei so starker, dass $\varepsilon \varepsilon'$ neben Eins unmerklich ist, dagegen

$$(64) \quad E = \frac{4n k^2}{(n+1)^2 + n^2 \kappa^2};$$

ist noch $n\kappa$ gross neben $(n+1)$, so wird hieraus höchst einfach

$$(65) \quad E = \frac{4n k^2}{(n\kappa)^2}.$$

Im ersten Falle begünstigt, im letzten beeinträchtigt also ein grösseres $n\kappa$ die Emission. —

Die vorstehenden Entwicklungen lassen sich nach dem p. 368 Gesagten sofort auf krystallinische Medien übertragen, wenn man nur die X - und die Y -Axe speciell in die der Wellenebene zugehörigen Polarisationsrichtungen legt und für die

ihnen parallelen Vectorcomponenten $\mathfrak{X}_h$, $\mathfrak{Y}_h$ verschiedene Parameter a_h , b_h , ε_h und a'_h , b'_h , ε'_h einführt.

Die Beziehung (60) resultirt dann für jede diëser Componenten, d. h., es gilt für die X -Componente

$$R_h^2 \Delta = 4 \nu a_h \varepsilon_h k^2,$$

für die Y -Componente

$$R_h'^2 \Delta' = 4 \nu a'_h \varepsilon'_h k^2,$$

wobei k nach dem Kirchhoff'schen Satz in beiden Formeln das gleiche sein muss. In leuchtenden krystallinischen Körpern verlangt jener Satz also, dass die Erregung nach den beiden einer ebenen Welle zugehörigen Polarisationsrichtungen eine verschiedene Stärke besitzt.

3) Ein besonders lebhaftes Interesse haben in neuester Zeit die Strahlungserscheinungen im Magnetfelde, die sogenannten Zeeman-Effecte, in Anspruch genommen. Wir wollen untersuchen, was der Kirchhoff'sche Satz über die bei ihnen stattfindenden Erregungen aussagt. Hierzu erweitern wir unsere Ausgangsformeln in der unlängst benutzten Weise¹⁾ und schreiben für alle drei Vectorcomponenten, unter Voraussetzung einer zur Z -Axe parallelen magnetischen Feldstärke R und für eine *parallel* mit R fortschreitende Welle die Bedingungen wie folgt:

$$(66) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial x^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial x^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial x^2} = 0;$$

$$(67) \quad \mathfrak{X} = X + \sum \mathfrak{X}_h, \quad \mathfrak{Y} = Y + \sum \mathfrak{Y}_h, \quad \mathfrak{Z} = Z + \sum \mathfrak{Z}_h,$$

$$(68) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_h + a_h \frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t} + b_h \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t^2} + c_h R \frac{\partial \mathfrak{Y}_h}{\partial t} - \varepsilon_h X = F_h e^{it/\vartheta}, \\ \mathfrak{Y}_h + a_h \frac{\partial \mathfrak{Y}_h}{\partial t^2} + b_h \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}_h}{\partial x^2} - c_h R \frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial x} - \varepsilon_h Y = G_h e^{it/\vartheta}, \\ \mathfrak{Z}_h + a_h \frac{\partial \mathfrak{Z}_h}{\partial t} + b_h \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_h}{\partial t^2} - \varepsilon_h Z = H_h e^{it/\vartheta}. \end{cases}$$

Hierin stellen F_h , G_h und H_h die complexen Amplituden der auf $\mathfrak{X}_h$, $\mathfrak{Y}_h$ und $\mathfrak{Z}_h$ wirkenden Erregungen dar. Für die Vectorcomponenten Z , $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_1, \dots \mathfrak{Z}_h$ sind die Gleichungen von der Einwirkung des Magnetfeldes frei; es behält für sie also das p. 367 ff. Gesagte Gültigkeit.

1) W. Voigt, Wied. Ann. 67. p 345. 1899.

Setzt man

$$(69) \quad X = U e^{it/\vartheta}, \quad \mathfrak{X} = \mathfrak{U} e^{it/\vartheta}, \quad \mathfrak{X}_h = \mathfrak{U}_h e^{it/\vartheta}, \text{ u. s. f.}$$

und

$$(70) \quad \vartheta^2 + i a_h \vartheta - b_h = \Theta_h, \quad c_h \vartheta^2 R = \Phi_h,$$

so erhält man aus den ersten beiden Formeln (68)

$$(71) \quad \begin{cases} \mathfrak{U}_h \Theta_h + i \mathfrak{B}_h \Phi_h - \varepsilon_h \vartheta^2 U = F_h \vartheta^2, \\ \mathfrak{B}_h \Theta_h - i \mathfrak{U}_h \Phi_h - \varepsilon_h \vartheta^2 V = G_h \vartheta^2; \end{cases}$$

oder auch

$$(72) \quad \begin{cases} \mathfrak{U}_h (\Theta_h^2 - \Phi_h^2) = \varepsilon_h \vartheta^2 (U \Theta_h - i V \Phi_h) + \vartheta^2 (F_h \Theta_h - i G_h \Phi_h), \\ \mathfrak{B}_h (\Theta_h^2 - \Phi_h^2) = \varepsilon_h \vartheta^2 (V \Theta_h + i U \Phi_h) + \vartheta^2 (G_h \Theta_h - i F_h \Phi_h). \end{cases}$$

Die Combination dieser Werthe mit den Definitionen von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ in (67) liefert aber

$$(73) \quad \begin{cases} \mathfrak{U} = U \left(1 + \vartheta^2 \sum \frac{\varepsilon_h \Theta_h}{\Theta_h^2 - \Phi_h^2} \right) - i V \vartheta^2 \sum \frac{\varepsilon_h \Phi_h}{\Theta_h^2 - \Phi_h^2} \\ \quad + \vartheta^2 \sum \frac{F_h \Theta_h - i G_h \Phi_h}{\Theta_h^2 - \Phi_h^2}, \\ \mathfrak{B} = V \left(1 + \vartheta^2 \sum \frac{\varepsilon_h \Theta_h}{\Theta_h^2 - \Phi_h^2} \right) + i U \vartheta^2 \sum \frac{\varepsilon_h \Phi_h}{\Theta_h^2 - \Phi_h^2} \\ \quad + \vartheta^2 \sum \frac{G_h \Theta_h + i F_h \Phi_h}{\Theta_h^2 - \Phi_h^2}, \end{cases}$$

wofür wir kurz schreiben:

$$(74) \quad \begin{cases} \mathfrak{U} = U \alpha - i V \beta + \vartheta^2 S, \\ \mathfrak{B} = V \alpha + i U \beta + \vartheta^2 T. \end{cases}$$

Die ersten beiden Gleichungen (66) werden hiernach zu

$$(75) \quad \begin{cases} \frac{1}{\vartheta^2} (U \alpha - i V \beta) + S + v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \kappa^2} = 0, \\ \frac{1}{\vartheta^2} (V \alpha + i U \beta) + T + v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \kappa^2} = 0. \end{cases}$$

Führt man ein:

$$U + i V = 2\Omega_1, \quad U - i V = 2\Omega_2,$$

also

$$(76) \quad U = \Omega_1 + \Omega_2, \quad i V = \Omega_1 - \Omega_2,$$

wobei Ω_1 eine positiv, Ω_2 eine negativ rotierende circularpolarisierte Welle bestimmt, so erhält man leicht:

$$(77) \quad \begin{cases} \Omega_1 \frac{\alpha - \beta}{\vartheta^2} + \frac{1}{2}(S + iT) + v^2 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial \kappa^2} = 0, \\ \Omega_2 \frac{\alpha + \beta}{\vartheta^2} + \frac{1}{2}(S - iT) + v^2 \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial \kappa^2} = 0. \end{cases}$$

Diese zwei Formeln sind mit (12) gleichgestaltet und liefern die folgenden Integrale:

$$(78) \quad \begin{cases} \Omega_1 = e^{iz/o_1 \vartheta} \left(C_1 + \frac{i o_1 \vartheta}{4 v^2} \int_{(z)} (S + iT)_\zeta e^{-i\zeta/o_1 \vartheta} d\zeta \right) \\ \quad + e^{-iz/o_1 \vartheta} \left(C'_1 - \frac{i o_1 \vartheta}{4 v^2} \int_{(z)} (S + iT)_\zeta e^{+i\zeta/o_1 \vartheta} d\zeta \right), \\ \Omega_2 = e^{iz/o_2 \vartheta} \left(C_2 + \frac{i o_2 \vartheta}{4 v^2} \int_{(z)} (S - iT)_\zeta e^{-i\zeta/o_2 \vartheta} d\zeta \right) \\ \quad + e^{-iz/o_2 \vartheta} \left(C'_2 - \frac{i o_2 \vartheta}{4 v^2} \int_{(z)} (S - iT)_\zeta e^{+i\zeta/o_2 \vartheta} d\zeta \right), \end{cases}$$

in denen o_1, o_2 , die complexen Geschwindigkeiten der beiden Wellen, gegeben sind durch

$$(79) \quad \begin{cases} \left(\frac{n}{o_1} \right)^2 = \alpha - \beta = 1 + \vartheta^2 \sum \frac{\varepsilon_h}{\Theta_h + \Phi_h}, \\ \left(\frac{v}{o_2} \right)^2 = \alpha + \beta = 1 + \vartheta^2 \sum \frac{\varepsilon_h}{\Theta_h - \Phi_h}, \end{cases}$$

und ausserdem gilt

$$(80) \quad S + iT = \sum \frac{F_h + i G_h}{\Theta_h + \Phi_h}, \quad S - iT = \sum \frac{F_h - i G_h}{\Theta_h - \Phi_h}.$$

Die Grenzbedingungen (18) oder (19) für den normalen Uebergang einer Welle aus dem leeren Raum in den Körper, auf den sich die obigen Formeln beziehen, sind hier in gleicher Weise für die X - und die Y -Componenten aufzustellen, und man erkennt leicht, dass man aus ihnen für Ω_1 und Ω_2 folgern kann

$$(81) \quad \overline{\Omega'_1} = \overline{\Omega_1}, \quad \frac{\partial \overline{\Omega'_1}}{\partial \kappa} = \frac{\partial \overline{\Omega_1}}{\partial \kappa}; \quad \overline{\Omega'_2} = \overline{\Omega_2}; \quad \frac{\partial \overline{\Omega'_2}}{\partial \kappa} = \frac{\partial \overline{\Omega_2}}{\partial \kappa},$$

wobei Ω'_1, Ω'_2 sich, wie p. 370, auf den leeren Raum beziehen.

Ω_1 und Ω_2 unterliegen somit ganz denselben Bedingungen, wie früher X bzw. Y , mit dem einzigen Unterschied, dass

$\frac{1}{2}(S + iT)$ und $\frac{1}{2}(S - iT)$ an Stelle des früheren S , oder $\frac{1}{2}(F_h + iG_h)$ und $\frac{1}{2}(F_h - iG_h)$ an Stelle des früheren F_h stehen.

Demgemäss werden auch alle die früheren Resultate mutatis mutandis gültig bleiben. Insbesondere wird für die durch Ω_1 bez. Ω_2 gegebene Welle aus (57) folgen

$$(82) \quad \frac{E_1}{A_1} = \frac{\omega_1^2 \vartheta^2 \Delta \Sigma_1}{8 v^3 \kappa_1}, \quad \frac{E_2}{A_2} = \frac{\omega_2^2 \vartheta^2 \Delta \Sigma_2}{8 v^3 \kappa_2},$$

wobei wegen $\Phi = \Phi'$

$$(83) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_1 = \frac{1}{2} \sum \frac{(F_h F_h' + G_h G_h')}{(\Theta_h + \Phi_h)(\Theta_h' + \Phi_h)}, \\ \frac{2 v^2 \kappa_1}{\omega_1^2 \vartheta^2} = \sum \frac{\varepsilon_h a_h}{(\Theta_h + \Phi_h)(\Theta_h' + \Phi_h)}, \\ \Sigma_2 = \frac{1}{2} \sum \frac{(F_h F_h' + G_h G_h')}{(\Theta_h - \Phi_h)(\Theta_h' - \Phi_h)}, \\ \frac{2 v^2 \kappa_2}{\omega_2^2 \vartheta^2} = \sum \frac{\varepsilon_h a_h}{(\Theta_h - \Phi_h)(\Theta_h' - \Phi_h)} \end{array} \right.$$

ist. Nun muss nach Symmetrie die Erregung in allen Richtungen senkrecht zu den Kraftlinien des Magnetfeldes die gleiche sein; man kann also setzen

$$(84) \quad F_h F_h' = G_h G_h' = R_h^2,$$

wo dann R_h die mittlere reelle Amplitude des erregenden Vectors bezeichnet, und man erkennt, dass sich jetzt der Kirchhoff'sche Satz aus den Formeln (82) ergibt, wenn nur

$$(85) \quad R_h^2 \Delta = 4 v a_h \varepsilon_h k^2$$

ist, wobei k^2 die frühere universelle Function der Temperatur bezeichnet. —

Für eine *normal* zu R , z. B. nach der X -Axe fortschreitende ebene Welle treten an Stelle von (66) die Gleichungen

$$(86) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2};$$

(67) und (68) bleiben ungeändert.

Die Gleichungen für die parallel Z schwingenden Vectorcomponenten sind von der Feldstärke völlig frei und stimmen mit den Formeln (1) bis (3) überein; sie führen also zu den analogen Resultaten, insbesondere auch, wenn man $H_h H_h' = R_h^2$ setzt, zu der früheren Relation $R_h^2 \Delta = 4 v a_h \varepsilon_h k^2$.

Unter den parallel X schwingenden Componenten ist ähnlich, wie p. 381, 3, so jetzt $\mathfrak{X}$, und somit u gleich Null. Aus (74) folgt somit nunmehr

$$(87) \quad \mathfrak{B} = V \left(\alpha - \frac{\beta^2}{\alpha} \right) + \vartheta^2 \left(T - \frac{i\beta}{\alpha} S \right),$$

und mit Hülfe dieses Werthes aus der zweiten Formel (86)

$$(88) \quad \frac{V}{\vartheta^2} \left(\alpha - \frac{\beta^2}{\alpha} \right) + \left(T - \frac{i\beta}{\alpha} S \right) + v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0,$$

eine Beziehung, die wiederum mit (12) gleichgestaltet ist und dieselbe Behandlung gestattet. Für die complexe Geschwindigkeit o dieser normal zu den Kraftlinien des Magnetfeldes schwingenden Welle gilt hiernach die Formel

$$(89) \quad \left(\frac{v}{o} \right)^2 = \alpha - \frac{\beta^2}{\alpha};$$

für das Verhältniss E/A bleibt die Formel (57), d. h.

$$E/A = \frac{\omega^2 \vartheta^3 \Delta \Sigma}{8 v^3 x}$$

gültig, wobei $2v^2 x / \omega^2$ der imaginäre Theil von $\alpha - \beta^2/\alpha$ und

$$(90) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma &= \sum \frac{G_h G_h' \Theta_h \Theta_h' + F_h F_h' \Phi_h^2}{(\Theta_h^2 - \Phi_h^2)(\Theta_h'^2 - \Phi_h'^2)} \\ &+ \frac{\beta \beta'}{\alpha \alpha'} \sum \frac{F_h F_h' \Theta_h \Theta_h' + G_h G_h' \Phi_h^2}{(\Theta_h^2 - \Phi_h^2)(\Theta_h'^2 - \Phi_h'^2)} \end{aligned} \right.$$

ist. Berücksichtigt man die Beziehung (84), so ergibt sich einfacher

$$(91) \quad \Sigma = \left(1 + \frac{\beta \beta'}{\alpha \alpha'} \right) \sum \frac{R_h^2 (\Theta_h \Theta_h' + \Phi_h^2)}{(\Theta_h^2 - \Phi_h^2)(\Theta_h'^2 - \Phi_h'^2)}.$$

Nun ist aber neben Eins β/α , und somit β'/α' , als eine Grösse erster Ordnung in Bezug auf die stets äusserst kleine Wirkung des Magnetfeldes zu betrachten, und es darf der Ansatz (68) als nur bis auf Glieder *erster* Ordnung genau gelten. Somit kann sowohl bei der Bestimmung von $2v^2 x / \omega^2$, als bei der von Σ , das Glied *zweiter* Ordnung, d. h. also β^2/α^2 bez. $\beta \beta' / \alpha \alpha'$ neben Eins ignoriert werden.

Wir gelangen so zu dem Werthpaar

$$(92) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2 v^2 x}{\omega^2 \vartheta^3} &= \sum \frac{\epsilon_h a_h (\Theta_h \Theta_h' + \Phi_h^2)}{(\Theta_h^2 - \Phi_h^2)(\Theta_h'^2 - \Phi_h'^2)}, \\ \Sigma &= \sum \frac{R_h^2 (\Theta_h \Theta_h' + \Phi_h^2)}{(\Theta_h^2 - \Phi_h^2)(\Theta_h'^2 - \Phi_h'^2)}; \end{aligned} \right.$$

und der Kirchhoff'sche Satz führt in der p. 379 und 381 angewandten Weise zu der Beziehung

$$R_h^2 A = 4 v a_h \epsilon_h k^2$$

zurück.

Hiernach ergibt sich, dass die Art und die Stärke der *Erregung* in einem leuchtenden Körper durch die Einwirkung eines Magnetfeldes nicht geändert wird, und dass die geänderte *Emission* nur auf den geänderten Bedingungen beruht, denen die Schwingungsvectoren infolge der ausgeübten magnetischen Kraft unterliegen.

Resultate.

Es ist im Vorstehenden versucht worden, die Gleichungen der Optik durch Einführung von Gliedern, welche *Erregungen* der für die Schwingungen der ponderablen Theile charakteristischen Vektoren ausdrücken, so zu erweitern, dass sie nunmehr auch Vorgänge der *Emission* umfassen, und es ist untersucht worden, welche Eigenschaften jenen Gliedern, die sich als Vectorcomponenten darstellen und kurz als Erregungen bezeichnet werden mögen, beizulegen sind, damit die durch sie veranlassten Vorgänge dem Kirchhoff'schen Gesetz von der Proportionalität zwischen Emissions- und Absorptionsvermögen (E und A) genügen. Dabei ist der Einfachheit halber die leuchtende Substanz in Form einer planparallelen Platte vorausgesetzt, die in parallelen Schichten homogen erregt wird, und die somit in der zu diesen Schichten normalen Richtung ebene Wellen aussendet; analog ist auch nur die Absorption normal auffallender ebener homogener Wellen betrachtet.

Es zeigt sich dann zunächst in dem Falle einer *regelmässigen* Erregung und *regelmässig* schwingender einfallender Wellen keinerlei Möglichkeit, das berechnete Verhältniss E/A mit dem Kirchhoff'schen Gesetz in Einklang zu bringen, was sich daraus erklärt, dass dieses Gesetz in letzter Instanz nur auf Emission und Absorption *ungeordneter* Bewegungen anwendbar ist, und solche in dem vorausgesetzten Fall jedenfalls nicht stattfinden.

Um nun soweit, wie das mit den Grundvorstellungen der Optik vereinbar scheint, *ungeordnete* Bewegungen zu erhalten, ist weiterhin angenommen worden, dass die betrachtete Platte

in eine sehr grosse Anzahl dünner und gleicher Schichten zerfällt, deren Erregungen *incohärent* sind, und dass auch die absorbirten Wellenzüge derart aus sich einander anschliessenden *incohärenten* Theilen bestehen, dass die an der Vorder- und die an der Hinterfläche der Platte reflectirten Wellen nicht miteinander interferiren.

Auch jetzt lässt sich das Resultat der Theorie allgemein und streng mit dem Kirchhoff'schen Gesetz nicht in Einklang bringen, da der aus ihr folgende Werth für E/A zunächst noch von der Dicke der betrachteten Schicht abhängig bleibt. Indessen kann gerade in den Fällen, wo die oben bezüglich der Incohärenz der einfallenden Schwingungen gemachte Annahme erfüllt ist, diese Abhängigkeit als sehr gering in Annäherung vernachlässigt werden.

Geschieht dies, so lässt sich das Verhältniss E/A dem Kirchhoff'schen Gesetz conform gestalten durch Einführung einer gewissen, überaus einfachen Beziehung, welche die Parameter der Erregungen mit gewissen optischen Constanten des erregten Mediums verknüpft.

Die Betrachtung gestattet die Erweiterung auf krystallinische Körper und führt hier zu der Nothwendigkeit von mit der Richtung variablen Erregungen.

Schliesslich sind die erörterten Grundgedanken auf den Fall eines isotropen Körpers angewandt, der sich in einem *Magnetfelde* befindet. Der Kirchhoff'sche Satz ergiebt hier, dass die Erregungen von der Feldstärke unabhängig sein müssen, dass demgemäss also die geänderten Emissionen (die sogenannten Zeemann-Effecte) allein von den durch das Magnetfeld bewirkten Aenderungen der Bedingungen herrühren, denen die Schwingungsvectoren unterliegen.

Göttingen, im December 1898.

(Eingegangen 3. Januar 1899.)