Ueber Singularitäten ebener algebraischer Curven und eine neue Curvenspecies.

Von

A. BRILL in München.

Die Plücker'schen Formeln für ebene algebraische Curven haben eine Bedeutung zunächst nur für solche mit „elementaren“ d. h. den vier dualistisch sich paarweise entsprechenden Singularitäten: Rückkehrpunkt, Doppelpunkt, Wendetangente und Doppeltangente. Es ist das Verdienst von Cayley, ihre Giltigkeit auf Curven mit höheren Singularitäten ausgedehnt zu haben, indem er zeigte, wie ein durch Reihenentwickelungen definirter singulärer Punkt in jene Relationen einzuführen ist, damit sie ihre Bedeutung für die Curve nicht verlieren. Er leitete aus den Reihen vier „Aequivalenzzahlen“ ab, die angeben, wie viele Rückkehrpunkte, Wendepunkte, Doppelpunkte und Doppeltangenten an Stelle jener Singularität in die genannten Formeln aufzunehmen sind, und wies weiter nach, dass diese Zahlen ihre Geltung auch für denjenigen Ausdruck behalten, den Clebsch das „Geschlecht“ der Curve genannt hat. Durch neuere Arbeiten von Nöther, Zeuthen, Halphén und H. J. S. Smith*) sind auf verschiedenen Wegen die Angaben von Cayley bestätigt und erweitert und namentlich in den Beweisen vervollkommenet worden.

Indess wird in allen diesen Untersuchungen eine fundamentale Frage offen gelassen, die sich gleichwohl aus der Cayley'schen Anschauungsweise heraus unmittelbar aufwirft, die Frage nämlich, ob man aus einer Curve mit höherer Singularität durch „Deformation“ wirklich eine solche mit den äquivalenten elementaren herstellen kann, für welche die Plücker'schen und Geschlechtsformeln dieselben sind, oder ob die Cayley'schen Aequivalenzzahlen nur eine Art symbolischer

*) Man findet diese Abhandlungen beziehungsweise an folgenden Orten: Mathematische Annalen IX, ibd. X, Mém. prés. à l'Inst. XXVI und Proceed. Lond. math. soc. VI. — Auch die Arbeiten von Stolz in den Math. Ann. VIII und XV stehn hiermit in Zusammenhang.

Bedeutung für die genannten Relationen besitzen. Wenn es sich zeigen würde, dass diesen Zahlen die weitergehende, in der Deformirbarkeit der Curve begründete Geltung zukommt, so wäre damit zugleich ein Standpunkt gewonnen, von dem aus sich alle Beziehungen übersehen liessen, in denen überhaupt eine Singularität durch ihre Aequivalenzzahlen ersetzt werden kann. Gegen diese Fragestellung erhebt sich nur das Bedenken, dass jene als „Deformation“ bezeichnete Operation, analytisch aufgefasst, in einer Variation der Coefficienten der eine Singularität definirenden Gleichungen besteht, deren Mannigfaltigkeit schwer übersehbar zu sein scheint. Man begegnet nun dieser Schwierigkeit dadurch, dass man eine Singularität in ihrem Vorkommen auf einer speciellen Gattung von Curven untersucht, die sich auf folgende Weise darbieten.

Wenn vermöge der auf ein Cartesisches Coordinatensystem bezogenen Gleichung einer ebenen algebraischen Curve, die durch den Ursprung desselben geht, die Ordinate nach aufsteigenden Potenzen der Abscisse entwickelt wird, und man findet, dass mehrere nach ganzen oder gebrochenen Potenzen fortschreitende Entwicklungen existiren, so nennt man jenen Punkt einen *singulären Punkt* der Curve, eine „Singularität“, wie man dieses und das dualistische Gebilde der „singulären Tangente“ zusammenfassend zu bezeichnen pflegt. Wird eine solche (etwa nach Potenzen von $x^{\frac{1}{p}}$ fortschreitende) Entwicklung an einem geeigneten Gliede abgebrochen, so hat man die Gleichung einer Curve, deren Coordinaten durch Einführung eines Parameters, dessen p^{te} Potenz man gleich x setzt, in rationale Functionen von diesem verwandelt werden. Eine Anzahl von Eigenschaften der so erhaltenen „rationalen“ Curve hängt nur von den ersten Gliedern der Entwicklung ab, aus der sie entstanden ist. Sofern man sich auf diese Eigenschaften beschränkt, kann, wie man durch einfache functionentheoretische Schlüsse zeigt (§ 2.), der der Entwicklung zugehörige Curvenzweig in der Nähe der Singularität durch jene rationale Curve ersetzt werden.

Diese Bemerkung lege ich den nachfolgenden Untersuchungen*) über Singularitäten zu Grunde. Sie handeln von dem Verhalten derselben gegenüber den Plücker'schen Gleichungen, vorzugsweise aber von solchen „Deformationen“, die sich mit einer Singularität, den Cayley'schen Aequivalenzzahlen entsprechend und ohne Aenderung

*) Imaginäre Coefficienten und Elemente sind nur dann ausgeschlossen, wenn dies ausdrücklich bemerkt wird. Der Kürze wegen wurde indess die *Bezeichnungsweise*, welche an ein reelles Vorkommen anschliesst, überall da beibehalten, wo ihre Bedeutung auch für ein imaginäres unzweifelhaft war.

des Geschlechts, vornehmen lassen. Es zeigt sich nämlich (§§ 3. 4.), dass man in der Parameterdarstellung jener rationalen Curve die Coefficienten immer so variiren kann, dass aus ihr eine andere (die allgemeinste, welche diesen Bedingungen genügt) von gleicher Ordnung, Classe und gleichem Geschlecht entsteht, auf welcher an Stelle der betrachteten Singularität die äquivalenten elementaren Singularitäten auftreten. Und zwar findet man, dass für jeden einzelnen Zweig Realität und Anordnung der Wendepunkte und Rückkehrpunkte noch beliebig sind, während die Doppelpunkte und Doppeltangenten, die von der Selbstdurchsetzung des Zweigs herrühren, in ihrer gegenseitigen Lage u. s. w. durch jene bedingt sind. Da eine Uebertragung dieser Variationen auf jede beliebige Curve mit der betrachteten Singularität sich als möglich erweist, so lässt sich also, was bisher nur in einzelnen Beispielen durchgeführt war, jede höhere Singularität auf verschiedene (und zwar alle möglichen) Arten in „penultimate“ (von der gegebenen nur wenig verschiedene) Formen überführen, auf welchen die äquivalenten elementaren Singularitäten getrennt auftreten.

Jene Curve, deren Gleichung durch eine mit einem endlichen Gliede abbrechende Potenzentwicklung gegeben ist, ist eine rationale mit ganz specieller und namentlich der schätzenswerthen Eigenschaft, dass sich ihre Cartesischen Punkt- und Linienkoordinaten*) durch ganze Functionen eines Parameters darstellen lassen. Nimmt man diese Eigenschaft zum Ausgangspunkt, so gelangt man zur Definition einer merkwürdigen Gattung von rationalen Curven — ich nenne sie aus dem angegebenen Grunde „rational-ganze“ Curven — die durch ihre im Endlichen gelegenen Rückkehrpunkte und Wendepunkte eindeutig bestimmt sind, indem ihre Coordinaten durch die Gleichungen für die Parameter derselben bis auf Constante, die der Festlegung der Curve gegen das Coordinatensystem entsprechen, gegeben sind (§ 1.). Die Auszeichnung des unendlich Weiten, wo, projectivisch zu reden, die rational-ganze Curve nur einen und zwar einen singulären Punkt besitzt, ist nicht so charakteristisch, als der Umstand, dass *Classe und Ordnung für sie gleich* sind, d. h. dass die Gesamtzahl der Doppelpunkte (unter Einrechnung der den auftretenden Singularitäten äquivalenten) und der Doppeltangenten, oder auch die der Wendepunkte und Rückkehrpunkte je dieselbe ist. Durch diese Eigenschaft ist allen Untersuchungen, die an diese Curven anknüpfen, ein hoher Grad von Symmetrie gesichert. So z. B. ergeben sich (§§ 8., 9., 10.) die be-

*) Unter Letzteren sind die Coefficienten u, v in der Gleichung der Geraden:

$$y = ux - v$$

verstanden.

kannten Relationen zwischen der Zahl der in eine Singularität entfallenden Doppelpunkte und Doppeltangenten gelegentlich der Bestimmung ihrer Parameter als eine unmittelbare Folge des erwähnten dualistischen Verhaltens.

Aus den Gleichungen für die Rückkehr- und Wendepunkte erhält man für die Parameterpaare der den Doppelpunkten zugehörigen Schnittelemente und die Berührungspunkte der Doppeltangenten Gleichungen, welche im Allgemeinen explicite nicht darstellbar sind, indess bezüglich ihrer Discriminante ein merkwürdiges Verhalten zeigen, das, wie ich glaube, für die Theorie der algebraischen Curven überhaupt, wo die Verhältnisse wesentlich dieselben sind, noch Bedeutung hat — dass nämlich wegen der ganz verschiedenartigen begleitenden Umstände, unter denen zwei Schnittelemente von Doppelpunkten (bezw. Berührungspunkten von Doppeltangenten) zusammenfallen können, die Discriminante der Doppelpunkts- wie der Doppeltangentengleichung sich in rationale Factoren spaltet, die theilweise beiden gemeinsam sind, theilweise in den Discriminanten der Wende- und Rückkehrpunktsgleichungen auftreten. In dem vorliegenden Falle können dieselben alle, fünf an der Zahl, ihrer Bedeutung und ihrer Vielfachheit nach angegeben werden (§§ 5. 6.).

Ueberträgt man die Resultate der auf die Discriminanten gerichteten Untersuchung insbesondere auf eine reelle Curve mit beliebiger höherer Singularität und die verschiedenen penultimaten Curvenformen, in welche diese sich überführen lässt, so ergibt sich (§ 7.), dass, wie mannigfaltig die Anordnung und Realität der aus der höheren herausgerückten elementaren Singularitäten auch sein mag, doch immer eine gewisse Grösse, die sich aus der Anzahl der auftretenden *reellen* Wende- und Rückkehrpunkte, *isolirten* Doppelpunkte und Doppeltangenten zusammensetzt, für jede Auflösungsart denselben Werth besitzt. Diese Zahl, die ich den „Realitätsindex“ der betreffenden Singularität nenne, spielt gegenüber der Relation von Herrn Klein (d. Ann. Bd. X. p. 199) dieselbe Rolle, wie die Aequivalenzzahlen gegenüber den Plücker'schen Formeln, indem sie angiebt, in welcher Weise eine Singularität in dieselbe eingeht. Die Untersuchungen dieses Abschnittes lassen zugleich die algebraische Bedeutung jener Relation in der Zerfällbarkeit der Discriminante der Doppelpunkts- und Doppeltangentengleichung gelegen erkennen.

Der Schluss der Abhandlung bezieht sich auf die „adjungirten Curven“ zu einer rationalen, deren Verhalten in der Nähe einer beliebigen Singularität sich vermöge der dort angegebenen Methode allgemein bestimmen lässt. Näheres darüber ist in der Einleitung zu § 11. enthalten.

Die Darstellung knüpft naturgemäss an die „rational-ganzen“ Curven an, aus denen sich die Sätze über höhere Singularitäten zum Theil als Corollare ergeben. Wir beginnen deshalb mit einer kurzen Darlegung der Haupteigenschaften dieser Curven.

§ 1.

Die rational-ganze Curve.

Die Cartesischen Punktkoordinaten x, y einer Curve seien durch ganze Functionen eines Parameters λ darstellbar, der umgekehrt auch ihnen eindeutig entsprechen möge:

$$x = f(\lambda);$$

$$y = \varphi(\lambda).$$

Fügt man die Forderung zu, dass das Gleiche auch mit denjenigen Ausdrücken der Fall sei, durch die sich die Liniencoordinaten u, v , d. h. die Coefficienten in der Gleichung der Tangente:

$$Y = uX - v$$

darstellen, so ergibt dies eine Bedingungsgleichung zwischen den ganzen Functionen f und φ , die man folgendermassen findet.

Setzt man hier wie in der Folge zur Abkürzung:

$$x' = \frac{dx}{d\lambda}; \quad y' = \frac{dy}{d\lambda},$$

und bezeichnet mit X, Y die laufenden Coordinaten der Tangente, so ist deren Gleichung:

$$\frac{Y - y}{X - x} = \frac{y'}{x'}$$

oder

$$Y = \frac{y'}{x'} X - \frac{xy' - yx'}{x'}.$$

Durch Vergleichung findet man:

$$u = \frac{y'}{x'}; \quad v = ux - y.$$

Sollen nun u, v ebenfalls ganze Functionen sein, so muss:

$$u = \frac{y'}{x'} = \frac{\varphi'(\lambda)}{f'(\lambda)}$$

eine ganze Function sein. Hieraus folgt sogleich, dass auch der Quotient der Differentialquotienten der Functionen u und v von λ :

$$\frac{v'}{u'} = \frac{1}{u'} \{xu' + ux' - y'\} = x$$

eine ganze Function ist, wodurch eine vollkommene Symmetrie zwischen den Punkt- und den eben eingeführten Liniencoordinaten begründet wird.

Die Ausdrücke x' und u' bestimmen, additive Constante abgerechnet, die Parameterdarstellung und damit den ganzen Charakter der durch obige Bedingung definirten „*rational-ganzen*“ Curve. In der That, geht man von den ganzen Functionen von λ :

$$\begin{aligned}x'(\lambda) &= \varrho(\lambda) = \varrho, \\u'(\lambda) &= \varpi(\lambda) = \varpi\end{aligned}$$

aus, so wird:

$$x = \int \varrho d\lambda; \quad u = \int \varpi d\lambda.$$

Nimmt man in diesen Integralen die untere Grenze gleich Null an, was wir in der Folge thun wollen, so involviret dies eine solche Lage des Coordinatensystems, dass der Punkt $\lambda = 0$ sich auf der Y -Axe befindet mit einer der X -Axe parallelen Tangente. Setzt man auch in dem Integral für y die untere Grenze Null, so wird der Punkt $\lambda = 0$ der Ursprung, die Tangente an die Curve die X -Axe. Man hat so endlich für die Punkt- und Liniencoordinaten einer *rational-ganzen Curve* die Gleichungen:

$$\begin{aligned}x &= \int_0^\lambda \varrho d\lambda; & u &= \int_0^\lambda \varpi d\lambda; \\y &= \int_0^\lambda u \varrho d\lambda; & v &= \int_0^\lambda x \varpi d\lambda = ux - y.\end{aligned}$$

Die geometrische Bedeutung der zu Grunde gelegten Functionen ϱ und ϖ von λ ergibt sich, indem man die Frage nach den Singularitäten dieser Curven stellt.

Wir suchen zunächst die Gleichungen für die Parameter der (im Endlichen gelegenen) Doppelpunkte. Sei λ, λ_1 das den Schnittelementen eines Doppelpunktes zukommende Parameterpaar, so muss λ , in die Ausdrücke für x und y eingesetzt, dieselben Werthe ergeben, wie λ_1 ; d. h. man hat (wenn man die Buchstaben x und y als Functionszeichen benutzt):

$$x(\lambda) = x(\lambda_1); \quad y(\lambda) = y(\lambda_1).$$

Scheidet man durch Division mit $\lambda - \lambda_1$ die selbstverständliche Lösung $\lambda = \lambda_1$ aus, so ergeben sich für die Parameterpaare der Doppelpunkte die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\xi(\lambda \lambda_1) &\equiv \frac{x(\lambda_1) - x(\lambda)}{\lambda_1 - \lambda} = 0, \\ \eta(\lambda \lambda_1) &\equiv \frac{y(\lambda_1) - y(\lambda)}{\lambda_1 - \lambda} = 0.\end{aligned}$$

Die Richtung der Tangenten in dem Doppelpunkt findet man aus den Werthen, die u für λ und λ_1 annimmt. Fallen dieselben zu-

sammen, indem zugleich λ mit λ_1 zusammenfällt, so erhält man einen Rückkehrpunkt. Dann gehen aber die obigen Gleichungen über in:

$$\frac{dx}{d\lambda} = x' = 0, \quad \frac{dy}{d\lambda} = y' = 0,$$

oder, weil für $x' = 0$ die Gleichung $y' = 0$ von selbst erfüllt wird, in:

$$x'(\lambda) = \varrho(\lambda) = 0.$$

Dies ist die Gleichung für die Parameter der Rückkehrpunkte einer rational-ganzen Curve. Es ist übrigens klar, dass sich diese Lösungen auch unter denen der Gleichungen $\xi = 0$, $\eta = 0$ befinden müssen.

Analog hat man für die Parameter der Berührungspunkte der Doppeltangenten die Gleichungen:

$$\alpha(\lambda \lambda_1) \equiv \frac{u(\lambda_1) - u(\lambda)}{\lambda_1 - \lambda} = 0,$$

$$\beta(\lambda \lambda_1) \equiv \frac{v(\lambda_1) - v(\lambda)}{\lambda_1 - \lambda} = 0,$$

aus welchen für $\lambda = \lambda_1$ die Gleichung für die Wendepunkte folgt:

$$u'(\lambda) = \varpi(\lambda) = 0,$$

(die von selbst die Erfüllung von $v'(\lambda) = 0$ mit sich führt).

Die den unendlich weiten Punkten*) der Curve entsprechenden (unendlich grossen) Parameterwerthe von λ mögen hier vorerst noch unberücksichtigt bleiben. Nur ist zu erwähnen, dass, wenn man in den Gleichungen für die Doppelpunkte oder die Doppeltangenten den einen Parameter $\lambda = \infty$ setzt, der andere nothwendig den gleichen Werth enthält, woraus folgt, dass von den Berührungspunkten einer Doppeltangente nicht einer im Unendlichen gelegen sein kann, während der andere sich im Endlichen befindet.

Sind die ganzen Functionen $\varrho(\lambda)$, $\varpi(\lambda)$ bzw. von den Graden R und W , so hat die Curve im Endlichen R Rückkehrpunkte und W Wendepunkte.

Aus der Anzahl der Schnittpunkte der Curve mit einer Geraden, d. h. dem Grad einer linearen Function von x und y in Bezug auf λ bestimmt sich die Ordnung der Curve, sie ist $= R + W + 2$. Diese Zahl stellt aber auch den Grad einer linearen Function der Linien-coordinaten u und v dar, und somit sind Ordnung und Classe einer rational-ganzen Curve gleich und zwar $= R + W + 2$.

Die Anzahl (D) der (im Endlichen gelegenen) Doppelpunkte bestimmt sich aus der Zahl der gemeinsamen Lösungen der oben aufgestellten Gleichungen $\xi(\lambda \lambda_1) = 0$, $\eta(\lambda \lambda_1) = 0$, wenn man die den

*) Wir werden unten sehen, dass die Curve nur einmal ins Unendliche geht und dort eine höhere Singularität besitzt.

Rückkehrpunkten entsprechenden abzieht. Die Dimension, bis zu der die erste dieser Gleichungen in λ, λ_1 ansteigt, ist R , die der zweiten $R + W + 1$, der Grad der Resultante Beider in Bezug auf die eine der Variablen ist also $R(R + W + 1)$. Unter Umständen wird eine Erniedrigung dieser Zahl dadurch eintreten, dass die Coefficienten der höchsten Potenzen Null werden. Dies tritt z. B. ein, wenn R und W beide ungerade Zahlen sind, wo dann $R(R + W + 1)$ nicht durch zwei theilbar wird. Weil nun der Grad der Resultante nothwendig eine gerade Zahl sein muss, indem wegen der symmetrischen Bildung von ξ und η in λ und λ_1 beide Parameter eines Doppelpunktes der Resultante genügen müssen, so ist in diesem Fall der angegebene Grad um eine ungerade Zahl von (unendlich werdenden) Lösungen zu vermindern. Die Grösse der Herabminderung wird später (§ 9.) genau bestimmt. Bezeichnen wir sie durch Θ , so ist die Anzahl der im Endlichen gelegenen Doppelpunkte:

$$D = \frac{1}{2} \{ R(R + W + 1) - \Theta \} - R,$$

oder

$$D = \frac{1}{2} R(R + W - 1) - \frac{1}{2} \Theta.$$

Analog erhält man für die Anzahl aller im Endlichen gelegenen Doppeltangenten einen Ausdruck von der Form:

$$T = \frac{1}{2} W(R + W - 1) - \frac{1}{2} \Theta',$$

wo Θ' die analoge Bedeutung wie Θ hat. Wir werden später sehen, dass in jedem Falle $\Theta' = \Theta$ ist, und dass beide Null sind, wenn $R + 1$ und $W + 1$ relative Primzahlen sind.

§ 2.

Die eine höhere Singularität definirenden Reihenentwickelungen.

Wenn von den Wurzeln der vorstehend aufgestellten Gleichungen zwei oder mehrere zusammenfallen, so entsteht eine höhere Singularität auf der rational-ganzen Curve. Ehe ich mich zur Discussion dieses Vorkommens wende, will ich den Nachweis führen, dass jeder Zweig einer Curve mit höherer Singularität in seinem Verhalten zu algebraischen Bedingungsgleichungen, sofern man sich auf die nächste Umgebung des singulären Punktes beschränkt, durch eine rational-ganze Curve ersetzt werden kann.

Die Begründung dieser Bemerkung macht das Eingehen auf einige elementare functionentheoretische Betrachtungen nöthig.

Auf einer beliebigen ebenen algebraischen Curve befinde sich im Ursprung eines Cartesischen Coordinatensystems ein singulärer Punkt,

dessen Zweige durch Entwicklungen von y gegeben seien, die nach steigenden Potenzen von x mit positiven ganzen oder gebrochenen Exponenten fortschreiten. In dem Falle gebrochener Exponenten, der den anderen mitumfasst, werden sich immer p Entwicklungen zu einem sogenannten „cyklischen“ System*) vereinigen, welche, wenn

$$p \leq q < q_1 < \dots$$

ganze Zahlen sind, die nicht alle einen gemeinsamen Theiler haben, ε eine p^{te} Einheitswurzel ist, von der Form sind:

$$y = a_0 \varepsilon^q x^{\frac{q}{p}} + a_1 \varepsilon^{q_1} x^{\frac{q_1}{p}} + \dots$$

Diese p Entwicklungen unterscheiden sich, bei gleichen Coefficienten a_i , nur durch die Grösse ε , für welche je eine andere p^{te} Einheitswurzel zu setzen ist. Jedem cyklischen System kommt in der imaginären Ebene der x ein Convergencebereich zu, innerhalb dessen es den entsprechenden Curvenzweig**) völlig darstellt, so dass für denjenigen Theil der imaginären Ebene, welcher Convergencebereich für alle Entwicklungen von y nach aufsteigenden Potenzen von x ist,***) die ganze Curvengleichung zwischen x und y durch die Entwicklungen ersetzbar ist. Wir betrachten nun in diesem oder einem Theile dieses Bereichs den Zweig, dem die obige Entwicklung zugehört, und für welchen y p -deutige Function von x ist. Setzt man:

$$x = \lambda^p,$$

also:

$$y = a_0 \lambda^q + a_1 \lambda^{q_1} + \dots,$$

so werden x und y eindeutige Functionen von λ sein, und umgekehrt gehört jedem Werthepaar x, y nur ein Werth von λ zu; so dass diese Functionen innerhalb des dem betrachteten Bereich der x -Ebene entsprechenden Bereiche B der imaginären λ -Ebene eindeutig dem λ sich zuordnen. Handelt es sich nun darum, durch die Coordinaten eine algebraische Bedingungsgleichung (mit endlicher Gliederzahl) zwischen x und y oder deren Differentialquotienten zu erfüllen, für welche die Anzahl der Lösungen eine endliche ist, so kommt die Aufgabe, die in den Bereich B fallenden Lösungen zu finden, auf die Aufstellung einer Gleichung für den Parameter λ : $F(\lambda) = 0$ mit unendlich vielen Gliedern hinaus, von denen eine beliebige Anzahl

*) Puiseux, in Liouville Journ. T. XV. 1850.

**) „Superlinear branch“ nach Cayley. Ich werde kurzweg „Zweig“ oder „unicursaler Zweig“ sagen.

***) Ein solcher Bereich ist in der Nähe des Punktes $x = 0$ immer vorhanden, wenn diejenige Voraussetzung gilt, die oben bezüglich der Zahlen $p, q, \dots$ gemacht wurde, und deren Erfüllung sich nöthigenfalls durch Substitution linearer Functionen von x und y an Stelle dieser Variablen erreichen lässt.

sich durch endliche Operationen aus den Coefficienten der Reihe für y und der Bedingungsgleichung herstellen lässt.

Ich werde nun zeigen, dass man für die Berechnung der gewünschten Wurzeln dieser Gleichung, um irgend einen vorgeschriebenen Genauigkeitsgrad zu erreichen, nur einer endlichen Anzahl von Gliedern der Entwicklung für y bedarf.

Sei:

$$F(\lambda) \equiv A\lambda^a + B\lambda^b + \dots + M\lambda^m + N\lambda^n + P\lambda^p + \dots \text{ in inf.}$$

Wir setzen:

$$f(\lambda) \equiv A\lambda^a + B\lambda^b + \dots + M\lambda^m; \quad \varphi(\lambda) \equiv N\lambda^n + P\lambda^p + \dots \text{ in inf.},$$

und bezeichnen den absoluten Betrag einer Grösse durch Einschliessen derselben in eckige Klammern. Weil der absolute Betrag einer Summe niemals grösser ist, als die Summe der absoluten Beträge der Summanden, so ist:

$$[\varphi(\lambda)] \leq [N\lambda^n] + [P\lambda^p] + \dots \text{ in inf.},$$

oder

$$< [N]l^n + [P]l^p + \dots \text{ in inf.},$$

wo an Stelle von $[\lambda]$ der grösste absolute Betrag l :

$$l > [\lambda]$$

gesetzt wurde, der einem Punkte des Bereichs B zukommen kann, und der durch Einführung eines Vielfachen von λ an Stelle von λ immer kleiner als Eins gemacht werden kann. Wir nehmen also in der Folge:

$$l < 1$$

an. Nun besteht die obige Ungleichung noch, wenn man die rechte Seite dadurch vergrössert, dass man statt der Coefficienten $N, P, \dots$ denjenigen R von ihnen setzt, dessen absoluter Betrag grösser ist, als der aller übrigen, und wenn man weiter die Reihe der natürlichen Zahlen der Exponenten durch Zufügen der noch fehlenden Glieder herstellt:

$$\begin{aligned} [\varphi(\lambda)] &< [R](l^n + l^p + \dots \text{ in inf.}), \\ &< [R]l^n(1 + l + l^2 + \dots \text{ in inf.}), \\ &< [R] \frac{l^n}{1-l}. \end{aligned}$$

Indem man zu $f(\lambda)$ so viele Glieder hinzuzieht, dass n einen genügend grossen Werth erhält, um die rechte Seite, und also $[\varphi(\lambda)]$ unter die vorgeschriebene Genauigkeitsgrenze herunter zu drücken, hat man nun zur Bestimmung der Wurzeln von $F(\lambda) = 0$, welche in B fallen, die Gleichung:

$$f(\lambda) \equiv A\lambda^a + B\lambda^b + \dots + M\lambda^m = 0.$$

Erhielte man nämlich aus dieser zunächst nur Näherungswerthe, und wäre ε ein solcher, so berechnete sich die an ε anzubringende Correction η aus:

$$f(\varepsilon + \eta) + \varphi(\varepsilon + \eta) = 0,$$

oder aus:

$$\varphi(\varepsilon) + \eta \{f'(\varepsilon) + \varphi'(\varepsilon)\} + \dots = 0,$$

η ist hiernach mit $\varphi(\varepsilon)$ proportional, dessen absoluter Betrag vermöge der getroffenen Wahl für n unterhalb der Genauigkeitsgrenze liegt. — Nur wenn ε mehrfache Wurzel von $f(\lambda) = 0$ ist, kann diese Correction eine nachträgliche Vergrößerung der Zahl n nöthig machen, welche so lange fortzusetzen ist, bis η unter jene Grenze hinabsinkt.

Die Zahl der in $f(\lambda)$ eingehenden Glieder wird übrigens um so kleiner sein können, je kleiner der Bereich B um den Punkt $\lambda = 0$ ist, und reducirt sich auf das erste:

$$A\lambda^a,$$

wenn B sich auf diesen Punkt zusammenzieht.

Sind nun auf die angegebene Weise die in $f(\lambda)$ aufzunehmenden Glieder bestimmt, so hat man die in die Coefficienten von f eingehenden Coefficienten a_i der Reihe für y zu bestimmen; bis zu dem höchsten unter diesen ist die Entwicklung von y noch fortzusetzen, von da ab kann die Reihe abgebrochen werden.

Wenn statt einer Bedingungsgleichung für die Coordinaten x, y , d. h. für den Parameter λ , deren zwei oder mehrere für zwei oder mehrere Parameterwerthe $\lambda, \lambda_1, \dots$ bestehen (wie z. B. die Gleichungen für die in die Singularität fallenden Doppelpunkte), so verlangt der obige Beweis eine kleine Modification.

Treten an Stelle der Gleichung $F(\lambda)$ z. B. zwei solche, deren Coefficienten wieder durch endliche Operationen gefunden werden können, so ordne man dieselben nach Dimensionen von λ und λ_1 und spalte sie wieder je in zwei Theile:

$$F(\lambda\lambda_1) \equiv f(\lambda\lambda_1) + \varphi(\lambda\lambda_1) = 0,$$

$$F_1(\lambda\lambda_1) \equiv f_1(\lambda\lambda_1) + \varphi_1(\lambda\lambda_1) = 0,$$

deren einer f bez. f_1 die Glieder niedrigster Dimension, deren anderer φ bez. φ_1 die höheren Glieder (in unendlicher Anzahl) enthält. Der Bereich B sowie die Grössen $l < 1$, n , der Coefficient R (bez. R_1) etc. mögen ihre vorige Bedeutung behalten. Dann erhält man wie oben eine Ungleichung für $[\varphi]$ und $[\varphi_1]$, die von der Form sein wird:

$$[\varphi(\lambda\lambda_1)] < [R]((n+1)l^n + (n+2)l^{n+1} + \dots \text{ in inf.})$$

$$< [R] \frac{d}{dl} \left(\frac{l^{n+1}}{1-l} \right),$$

und analog:

$$[\varphi_1(\lambda, \lambda_1)] < [R_1] \frac{d}{dt} \left(\frac{t^{n+1}}{1-t} \right),$$

woraus hervorgeht, dass die Fehler, welche bei Berechnung der den beiden Gleichungen $F=0$, $F_1=0$ genügenden Werthepaare λ, λ_1 begangen werden, wenn man dieselben aus $f=0$, $f_1=0$ bestimmt, durch passende Wahl von n unter jede beliebig festgesetzte Grenze herabgedrückt werden können. Aus den Coefficienten von f und f_1 ergeben sich dann die zu berücksichtigenden Glieder der Entwicklung für y , so dass auch in diesem Falle die Entwicklung an einem endlichen Gliede abbrechen kann.

Handelt es sich nicht um die Berechnung, sondern nur um die Bestimmung der Anzahl der in das Bereich B fallenden Lösungen, so ist es oft bequem, diese Zahl durch versuchsweises Abbrechen der Entwicklung für y an irgend einem Glied zu bestimmen, indem man sich nachträglich von der Richtigkeit der erhaltenen Zahl durch den Nachweis überzeugt, dass dieselbe durch Hinzunahme beliebig vieler höherer Glieder in endlicher Anzahl keine Aenderung erfährt.

Indem wir uns im Nachfolgenden dieses Verfahrens bedienen, werden wir des erwähnten Nachweises durch die Art der Abzählung selbst, aus der sich diese Thatsache jedesmal ergibt, überhoben.

Das Abbrechen der Reihenentwicklung für y liefert nun aber eine Gleichung zwischen x und y , die man offenbar als die einer speciellen rational-ganzen Curve auffassen kann. Denn die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= \lambda^p, \\ y &= a_0 \lambda^q + a_1 \lambda^{q_1} + \dots \end{aligned}$$

bedeuten, wenn $p \leq q < q_1 < \dots$ ist, wie oben angenommen wurde, eine rationale Curve, für die $y':x'$ eine ganze Function ist. Die Singularität, welche dieselbe für $\lambda=0$ besitzt, kann bei genügend hoher Gliederanzahl des Ausdrucks für y durch passende Coefficientenbestimmung mit jeder beliebig gegebenen Entwicklung in jeder gewünschten Anzahl von Gliedern zur Uebereinstimmung gebracht werden, und somit jeden durch seine Entwicklung gegebenen Curvenzweig ersetzen.

Diese Auffassung gestattet insbesondere die Cayley'schen Aequivalenzzahlen, deren Bestimmung direct aus den Reihen auf die Schwierigkeit einer geometrischen Interpretation der vorzunehmenden Operationen stösst, durch einfache und, wie ich glaube, den Kern der Frage treffende Ueberlegungen abzuleiten (§§ 3., 8.).

Wir wenden uns demgemäss der Untersuchung der Singularitäten einer rational-ganzen Curve zu.

§ 3.

Die unicursalen Singularitäten und die Operation des Deformirens.

Unter einer „unicursalen Singularität“ möge eine solche mit nur einem Zweig, die also durch ein einziges cyklisches System von Entwicklungen definirt ist, verstanden werden. Wir betrachten die unicursale Singularität, welche die durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}x &= \lambda^p, \\ y &= a_0 \lambda^q + a_1 \lambda^{q_1} + \dots\end{aligned}$$

dargestellte rational-ganze Curve im Punkte $\lambda = 0$ besitzt (wo $p < q < q_1 \dots$ angenommen ist).

Die Gerade:

$$ax + by = 0$$

hat mit dieser Curve im Punkte $\lambda = 0$ so viele Schnittpunkte gemeinsam, als sich der Factor λ aus dem Ausdruck absondert, den man durch Substitution von x und y in $ax + by$ erhält; also p im Allgemeinen, q für $a = 0$, d. h. in der Richtung der X -Axe.

Die Gleichung für die Rückkehrpunkte der Curve, die sich aus § 1. ergibt, nämlich:

$$\varrho(\lambda) = x'(\lambda) = p\lambda^{p-1} = 0,$$

zeigt, dass $r = p - 1$ solche in die Singularität entfallen; aus der für die Wendepunkte:

$$\begin{aligned}\varpi(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{y'(\lambda)}{x'(\lambda)} \right) \\ &= \frac{1}{p} \lambda^{q-p-1} \{ a_0(q-p) + a_1 q_1 (q_1 - p) \lambda^{q_1-q} + \dots \} = 0\end{aligned}$$

folgt, dass $w = q - p - 1$ Wendepunkte darin vereinigt sind. Die Zahl der Doppelpunkte (d) und Doppeltangenten (t), die in die Singularität fallen, findet man (§ 1.) aus der Anzahl der Wurzelsysteme, $\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$, durch welche die Gleichungspaare $\xi(\lambda, \lambda_1) = 0$, $\eta(\lambda, \lambda_1) = 0$, bzw. $\alpha(\lambda, \lambda_1) = 0$, $\beta(\lambda, \lambda_1) = 0$ erfüllt werden, d. h. indem man diejenige Potenz von λ ermittelt, die als Factor in der Resultante auftritt (unter Abzug natürlich der den r Rückkehrpunkten bzw. w Wendepunkten entsprechenden Wurzeln $\lambda = 0$). Die genaue Bestimmung jener Potenz erfolgt in § 8., hier mag es genügen, zur nächsten Orientirung die Form des Eliminationsresultats anzugeben.

Man kann die Gleichung:

$$\xi(\lambda, \lambda_1) \equiv \frac{x(\lambda_1) - x(\lambda)}{\lambda_1 - \lambda} = 0$$

selbst als eine Curve mit den Coordinaten λ, λ_1 auffassen, die in dem Punkt $\lambda = \lambda_1 = 0$ einen $(p-1) = r$ -fachen Punkt mit getrennten Tangenten — sie entsprechen p ten Wurzeln der Einheit — besitzt.

Ebenso hat die Gleichung $\eta(\lambda\lambda_1) = 0$, als Curvengleichung aufgefasst, in $\lambda = \lambda_1 = 0$ einen $(q-1)$ - oder $(r+w+1)$ -fachen Punkt mit getrennten Tangenten, die mit jenen nicht übereinstimmen, wenn p und q , d. h. wenn $r+1$ und $w+1$ relative Primzahlen sind. In diesem Fall ist nach einem unbedenklich hier verwendbaren Satze die Anzahl der Schnittpunkte beider Curven, die in den Punkt $\lambda = \lambda_1 = 0$ fallen, gleich dem Product der Anzahl der Tangenten, also gleich $r(r+w+1)$. Wenn $r+1$ und $w+1$ aber einen gemeinsamen Theiler haben, so erhöht sich diese Zahl, weil, wie man später sehen wird, alsdann die Curvenzweige von $\xi = 0$ und $\eta = 0$ theilweise in Berührung treten. Sei ϑ die zuzufügende Grösse, so ist in jedem Fall die Zahl der den Gleichungen $\xi = 0$, $\eta = 0$ gemeinsamen Lösungssysteme $\lambda = \lambda_1 = 0$, d. h. die doppelte Summe der in diesen Punkt entfallenden Doppelpunkte (d) und Rückkehrpunkte (r):

$$2(r+d) = r(r+w+1) + \vartheta,$$

woraus folgt:

$$d = \frac{1}{2} r(r+w-1) + \frac{\vartheta}{2},$$

und analog erhält man für die Anzahl der in die Singularität entfallenden Doppeltangenten:

$$t = \frac{1}{2} w(r+w-1) + \frac{\vartheta'}{2},$$

wo $\vartheta = \vartheta' = 0$ ist für den Fall, dass $r+1$ und $w+1$ relativ prim sind. In § 8, wo diese Zahlen bestimmt werden, zeigt es sich, dass sie in allen Fällen gleich gross sind.

Aber unsere Auffassung ermöglicht weiter jene mit dem Wort „*Deformation einer Singularität*“ bezeichnete Operation auf streng analytischer Grundlage vorzunehmen. Wenn man nämlich die oben für die Bestimmung der Rückkehr- und Wendepunkte erhaltenen Gleichungen ($\varphi=0$, $\varpi=0$) durch Variation der Coefficienten, ohne den Grad zu ändern, in solche überführt, die keine gleichen Wurzeln mehr besitzen, so ist der Erfolg eine Trennung der Rückkehr- und Wendepunkte auf dem betreffenden unieursalen Zweig, bei welchem Process zugleich eine Trennung der Doppeltangenten und Doppelpunkte erfolgt, wenn man, was im Allgemeinen immer möglich ist, die Variationen so einrichtet, dass die Erfüllung gewisser Gleichungen (das Verschwinden der Discriminanten der Doppelpunkts- und der Doppeltangentengleichung) vermieden wird.

Sind die Gleichungen für die Rückkehrpunkte und Wendepunkte:

$$\varphi \equiv \lambda^r (a_0 + a_1 \lambda^{r-1} + a_2 \lambda^{r-2} + \dots) = 0,$$

$$\varpi \equiv \lambda^w (b_0 + b_1 \lambda^{w-1} + b_2 \lambda^{w-2} + \dots) = 0,$$

wo

$$r < r_1 < r_2 < \dots, \quad w < w_1 < w_2 < \dots$$

ist, so erfolgt eine Trennung der in dem Punkt $\lambda = 0$ vereinigten Rückkehr- und Wendepunkte, wenn man in dem Ausdruck für ϱ :

$$(\lambda - \alpha_1 \varepsilon) (\lambda - \alpha_2 \varepsilon) \cdots (\lambda - \alpha_r \varepsilon) \text{ statt } \lambda^r$$

und ebenso in ϖ :

$$(\lambda - \beta_1 \varepsilon) (\lambda - \beta_2 \varepsilon) \cdots (\lambda - \beta_w \varepsilon) \text{ statt } \lambda^w$$

eingführt, wo ε eine sehr kleine Grösse ist, und die endlichen Grössen α und β , durch welche sich die Realitäts- und Lagenverhältnisse der Rückkehr- und Wendepunkte bestimmen, verschieden und noch völlig willkürlich sind. Eine Folge hiervon und durch sie bedingt sind dann die Schnitzweige der Doppelpunkte bez. die Berührungspunkte der Doppeltangenten.

Ebenso wenig, wie das Vorkommen der Singularität auf einer rational-ganzen Curve eine Beschränkung für erstere mit sich führt, so wenig liegt eine Specialisirung in der Deformation des unicursalen Curvenzweigs, der Träger der Singularität ist, in wieder eine rational-ganze Curve. Dieselbe liefert vielmehr in der nächsten Umgebung des Punktes alle Formen, welche durch eine beliebige Deformation die Curve annehmen kann, vorausgesetzt, dass hierbei die Singularität in die äquivalenten elementaren übergeht, d. h. dass Ordnung, Classe und Geschlecht der Curve durch die Deformation nicht geändert wird.

In der That, wenn das Geschlecht sich nicht ändert, so muss die deformirte Curve wieder eine rationale sein, x und y also jedenfalls von der Form:

$$x = \frac{\lambda^p + \varepsilon f(\lambda, \varepsilon)}{1 + \varepsilon \varphi(\lambda, \varepsilon)} = \lambda^p + \varepsilon F(\lambda, \varepsilon),$$

$$y = \frac{a_0 \lambda^q + a_1 \lambda^{q_1} + \cdots + \varepsilon \psi(\lambda, \varepsilon)}{1 + \varepsilon \chi(\lambda, \varepsilon)} = a_0 \lambda^q + a_1 \lambda^{q_1} + \cdots + \varepsilon \Psi(\lambda, \varepsilon),$$

wo ε eine sehr kleine Grösse ist, $f(\lambda, \varepsilon)$, $\varphi(\lambda, \varepsilon)$, $F(\lambda, \varepsilon)$, $\cdots$ ganze Functionen sind. Wenn nun die $p - 1$ Rückkehrpunkte, welche für $\varepsilon = 0$ in $\lambda = 0$ fallen, wieder in solche übergehen sollen, so müssen für $\varepsilon \geq 0$ die $(p - 1)$ Wurzeln der Gleichung $x' = \frac{dx}{d\lambda} = 0$, die in die Nähe von $\lambda = 0$ fallen, auch die Gleichung $y' = 0$ befriedigen, d. h. die Function $y' : x'$ von λ kann in der Nähe von $\lambda = 0$ nicht unendlich werden. Dann ist sie aber in eine Reihe $P(\lambda)$ nach ganzen positiven Potenzen von λ entwickelbar, so dass:

$$y'(\lambda) = x'(\lambda) \cdot P(\lambda).$$

Setzt man

$$x'(\lambda) = \varrho(\lambda), \quad P'(\lambda) = \varpi(\lambda),$$

so sind, wenn man $P(\lambda)$ an einem endlichen Gliede abbricht, — eine Operation, deren Berechtigung aus § 2. folgt —, x und y die Coordinaten einer rational-ganzen Curve, die, wenn man $P(\lambda)$ genügend

weit fortsetzt, die obige Curve mit einem beliebigen Genauigkeitsgrad in der Nähe von $\lambda = 0$ ersetzen kann, und für welche $\varphi = 0$ und $\varpi = 0$ durch Variation der Gleichungen für die Rückkehr- und Wendepunkte der Curve mit der Singularität ableitbar sind. Q. e. d.

Ich habe mit Rücksicht auf die Bedürfnisse eines späteren Abschnitts jene Deformation an einigen Curven mit reellen Coefficienten ausgeführt, und lasse zunächst die auf die Auflösung unicursaler Singularitäten bezüglichen Beispiele hier folgen.

I. Ein *Bicuspidalpunkt* (so nenne ich eine Singularität, die durch das Zusammenrücken zweier Spitzen entsteht) liegt im Punkte $\lambda = 0$ einer rational-ganzen Curve, deren Coordinaten dargestellt sind durch:

$$x = \int_0^\lambda \lambda^2 P d\lambda, \quad y = \int_0^\lambda \lambda^3 Q d\lambda,$$

wo P, Q ganze Functionen von λ sind, die für $\lambda = 0$ nicht verschwinden. Durch diese Gleichungen ist das *allgemeinste* Vorkommen der genannten Singularität charakterisirt, weil die einzige Specialisirung, die des Parameters, auf ihre Form und Eigenschaften ohne Einfluss ist. — Ersetzt man λ^2 durch $\lambda^2 + \varepsilon$, so trennen sich die beiden Spitzen und es entsteht eine „penultimate“ Form der Singularität, wenn ε sehr klein angenommen wird.

Um die Doppelpunkte der Curve:

$$x = \int_0^\lambda (\lambda^2 + \varepsilon) P d\lambda,$$

$$y = \int_0^\lambda \lambda (\lambda^2 + \varepsilon) P Q d\lambda,$$

zu finden, welche in die Nähe des Ursprungs fallen, deren Parameterpaare λ, λ_1 also sehr klein sind, entwickle man:

$$\xi(\lambda, \lambda_1) = \frac{x(\lambda_1) - x(\lambda)}{\lambda_1 - \lambda} = 0,$$

und $\eta(\lambda, \lambda_1) = 0$ in Reihen nach aufsteigenden Potenzen von λ und λ_1 . Man erhält:

$$\xi \equiv \frac{1}{\lambda_1 - \lambda} \left\{ \varepsilon P_0(\lambda_1 - \lambda) + 2P_0 \left(\frac{\lambda_1^3}{6} - \frac{\lambda^3}{6} \right) + \dots \right\} = 0,$$

$$\eta \equiv \frac{1}{\lambda_1 - \lambda} \left\{ \varepsilon P_0 Q_0 \left(\frac{\lambda_1^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} \right) + 6P_0 Q_0 \left(\frac{\lambda_1^4}{24} - \frac{\lambda^4}{24} \right) + \dots \right\} = 0,$$

wo P_0, Q_0 die Werthe von P, Q für $\lambda = 0$ sind. Aus der letzten Gleichung ergibt sich in erster Annäherung:

$$(\lambda + \lambda_1) Q \varepsilon + \lambda_1^2 + \lambda^2 = 0.$$

Die der zweiten Klammer entsprechenden Lösungen führen, wie man leicht sieht, wieder auf die Rückkehrpunkte. Setzt man aber den aus der ersten sich ergebenden Werth für λ_1 in die Gleichung $\xi = 0$ ein, so kommt der Näherungswerth:

$$\lambda = -\lambda_1 = \sqrt{-3\varepsilon}.$$

Es fällt also ein Doppelpunkt in die Singularität, und die Gleichung $\Lambda = 0$, welche die Parameter der Doppelpunkte liefert, reducirt sich für kleine Werthe von ε und λ auf:

$$\lambda^2 + 3\varepsilon = 0.$$

Hält man hierzu die Gleichung, in welche unter gleicher Voraussetzung $\varrho = 0$ übergeht:

$$\lambda^2 + \varepsilon = 0,$$

so erkennt man, dass die Wurzeln beider Gleichungen gleichzeitig null oder imaginär sind. Geht als ε durch Null, so geht gleichzeitig mit einem Paar von Spitzen, welches imaginär wird, ein reeller Doppelpunkt in einen isolirten über.

Die Discriminante der Gleichung:

$$\varrho \equiv P(\lambda^2 + \varepsilon)$$

ist wegen der über P gemachten Voraussetzung der Grösse ε proportional.

II. Die *Schnabelspitze* (Spitze 2. Art), die man mit Rücksicht darauf, dass sie durch Vereinigung eines Rückkehrpunktes mit einem Wendepunkt entsteht, auch „*Cuspiflexionspunkt*“ nennen könnte, wird in ihrem allgemeinsten Vorkommen dargestellt durch die Reihenentwicklung:

$$y = ax^2 + x^{\frac{5}{2}} Q,$$

wo a eine Constante, Q eine nicht mit $x = 0$ verschwindende ganze Function von x ist. Setzt man $x = \lambda^2$, so kommt:

$$\begin{aligned} x &= \lambda^2, \\ y &= a\lambda^4 + Q\lambda^5. \end{aligned}$$

Ist ε eine kleine Grösse, so wird für:

$$\begin{aligned} x &= \lambda^2, \\ y &= \varepsilon\lambda^3 + a\lambda^4 + Q\lambda^5 \end{aligned}$$

eine Trennung von Rückkehr- und Wendepunkt erfolgen, wie man aus der Gleichung für die Letzteren:

$$0 = \varpi \equiv \frac{3}{2}\varepsilon + 4a\lambda + \frac{15}{2}Q\lambda^2 + \frac{9}{2}Q'\lambda^3 + \frac{1}{2}Q''\lambda^4$$

ersieht. Aus $\xi = 0$; $\eta = 0$ folgt:

$$\lambda + \lambda_1 = 0;$$

$$\frac{1}{\lambda - \lambda_1} (\varepsilon (\lambda^3 - \lambda_1^3) + a (\lambda^4 - \lambda_1^4) + Q_0 (\lambda^5 - \lambda_1^5)) = 0,$$

oder:

$$\lambda = -\lambda_1 = \sqrt[3]{\frac{-\varepsilon}{Q_0}}.$$

Die penultimate Form für $\Lambda = 0$ (s. Nr. I.) ist also:

$$\lambda^2 + \frac{\varepsilon}{Q_0} = 0,$$

wo, wie für eine spätere Anwendung hervorgehoben werden mag, ε der Resultante von:

$$\varpi = 0, \quad \varrho \equiv 2\lambda = 0$$

proportional ist.

Die Form der Gleichung $M = 0$ für die Parameter der Doppel-tangenten in der penultimate Form der Curve ergibt sich aus der Entwicklung von:

$$\alpha \equiv \frac{u(\mu) - u(\mu_1)}{\mu - \mu_1} = 0,$$

$$\beta \equiv \frac{v(\mu) - v(\mu_1)}{\mu - \mu_1} = 0,$$

nach aufsteigenden Potenzen von μ und μ_1 . Wenn man die Identitäten:

$$ux' - y' = 0; \quad v = ux - y$$

mehreremal nach λ differenzirt, so erhält man Bestimmungsgleichungen für die Differentialquotienten $u', u'', \dots v', v'', \dots$, in welchen nur noch die Differentialquotienten $x', x'', \dots y', y'', \dots$ von x und y vorkommen. Man erhält so ohne Mühe:

$$0 = \alpha \equiv \frac{3}{2} \varepsilon (\mu - \mu_1) + 4a \left(\frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu_1^2}{2} \right) + 15 Q_0 \left(\frac{\mu^3}{6} - \frac{\mu_1^3}{6} \right) + \dots,$$

$$0 = \beta \equiv 3\varepsilon \left(\frac{\mu^3}{6} - \frac{\mu_1^3}{6} \right) + 4 \cdot 6a \left(\frac{\mu^4}{24} - \frac{\mu_1^4}{24} \right) \\ + 6 \cdot 30 \cdot Q_0 \left(\frac{\mu^5}{120} - \frac{\mu_1^5}{120} \right) + \dots$$

Eliminirt man ε aus diesen Gleichungen, so kommt:

$$0 = -a(\mu + \mu_1)(\mu - \mu_1)^2 + \frac{1}{2} Q_0 f_4 + \dots,$$

wo f_4 eine homogene Function 4. Dimension in μ und μ_1 ist. Man entnimmt dieser Gleichung die approximative Lösung $\mu = -\mu_1$, die, in die Gleichung $\alpha = 0$ eingesetzt, ergibt:

$$\mu = -\mu_1 = \sqrt[3]{\frac{-3\varepsilon}{5Q_0}}.$$

In eine Schnabelspitze entfällt also eine Doppeltangente. Der entsprechende Factor der Doppeltangentengleichung $M = 0$ ist:

$$\mu^2 + \frac{3\varepsilon}{5Q_0} = 0.$$

Diese Gleichung besitzt mit der $\Lambda = 0$ gleichzeitig reelle oder imaginäre Wurzeln, d. h. der durch Auflösung einer Schnabelspitze entstehende Doppelpunkt und die zugleich entstehende Doppeltangente sind entweder beide reell oder beide isolirt.

§ 4.

Die zusammengesetzten Singularitäten.

Die für unicursale Singularität angegebene Untersuchungsmethode lässt sich mit einigen Modificationen auf jede beliebige (aus mehreren unicursalen Zügen) „zusammengesetzte“ Singularität übertragen.

Ich beginne damit eine zusammengesetzte Singularität auf eine rational-ganze Curve zu verlegen, d. h. ich werde Ausdrücke für die Coordinaten einer solchen angeben, für welche die Reihenentwicklungen der einen Coordinate noch Potenzen der anderen mit denen der gegebenen Singularität in einer vorgeschriebenen Anzahl von Gliedern übereinstimmt. Den verschiedenen Zweigen mögen die folgenden Entwicklungen*) entsprechen:

1. $y = A_1 x^{\frac{\alpha_1}{\alpha}} + A_2 x^{\frac{\alpha_2}{\alpha}} + \dots,$
2. $y = B_1 x^{\frac{\beta_1}{\beta}} + B_2 x^{\frac{\beta_2}{\beta}} + \dots,$
3. $y = C_1 x^{\frac{\gamma_1}{\gamma}} + C_2 x^{\frac{\gamma_2}{\gamma}} + \dots,$

wo die $A_i, B_i, C_i \dots$ beliebige Constante, $\alpha \alpha_1 \dots \beta \beta_1 \dots \gamma \gamma_1 \dots$ ganze Zahlen sind, für welche die Ungleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} \alpha &\leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots, \\ \beta &\leq \beta_1 < \beta_2 < \dots, \\ \gamma &\leq \gamma_1 < \gamma_2 < \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

was die Bedingung involvirt, dass die Y -Axe von keinem der Zweige

*) Die zu einem „Cyklus“ gehörigen Entwicklungen sind der Kürze halber durch nur je eine repräsentirt.

berührt wird. Man führe nun in die erste, zweite, u. s. w. der obigen Entwicklungen bezw. die Substitution ein:

$$x^{\frac{1}{\alpha}} = A(\lambda - a); \quad x^{\frac{1}{\beta}} = B(\lambda - b); \quad x^{\frac{1}{\gamma}} = C(\lambda - c); \dots,$$

wo $A, B, C, \dots$ noch näher zu bestimmende Constante, $a, b, c, \dots$ beliebig wählbare, den verschiedenen Zweigen zuzutheilende Parameterwerthe*) sind. Man erhält dann:

$$(1) \quad \begin{cases} 1. \ x = (\lambda - a)^{\alpha} \cdot A^{\alpha}; & y = A_1(\lambda - a)^{\alpha_1} A^{\alpha_1} + A_2(\lambda - a)^{\alpha_2} A^{\alpha_2} + \dots, \\ 2. \ x = (\lambda - b)^{\beta} \cdot B^{\beta}; & y = B_1(\lambda - b)^{\beta_1} B^{\beta_1} + B_2(\lambda - b)^{\beta_2} B^{\beta_2} + \dots \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Dies sind die Gleichungen von rational-ganzen Curven, die den verschiedenen unicursalen Zweigen der Singularität entsprechen.

Aber man kann diese Zweige auf einer einzigen Curve vereinigen, wenn man setzt:

$$(2) \quad \begin{cases} x = (\lambda - a)^{\alpha} (\lambda - b)^{\beta} \dots, \\ y = (\lambda - a)^{\alpha_1} (\lambda - b)^{\beta_1} \dots [p + \lambda q + \lambda^2 r + \dots], \end{cases}$$

und die Coefficienten $p, q, r, \dots$, passend bestimmt.

In der That, verfügt man über die Grössen $A, B, \dots$ so, dass:

$$(3) \quad \begin{cases} A^{\alpha} = (a - b)^{\beta} (a - c)^{\gamma} \dots, \\ B^{\beta} = (b - a)^{\alpha} (b - c)^{\gamma} \dots, \\ C^{\gamma} = (c - a)^{\alpha} (c - b)^{\beta} \dots, \\ \dots \end{cases}$$

so stimmt in der Nähe des Ursprungs, für welchen der Parameter λ auf den verschiedenen Zweigen bezw. die Werthe: $\lambda = a, \lambda = b, \lambda = c, \dots$ besitzt, der Werth von x in der Darstellung (2) mit denjenigen Werthen überein, welche x nach den Formeln (1) in der Nähe dieses Punktes annimmt. Man hat dann noch die Coefficienten $p, q, r, \dots$, die in endlicher aber beliebig grosser Anzahl verfügbar sein mögen, so zu bestimmen, dass

1. die Uebereinstimmung der Formeln (2) mit den (1) auch bezüglich der y -Coordinationen erzielt wird,

2. dass die Curve den Charakter einer rational-ganzen erhält,

d. h. dass $\frac{dy}{d\lambda} : \frac{dx}{d\lambda}$ eine ganze Function wird**).

*) Im Falle reeller Curven theile man Zweigen mit conjugirt imaginären Coefficienten $A, B, \dots$ auch conjugirt imaginäre Werthe a, b zu, um eine reelle Parameterdarstellung zu erhalten.

**) Lässt man diese Bedingung fallen, so erniedrigt sich der Grad der entstehenden Curve.

Diese Forderungen werden durch ein System von linearen Bedingungsgleichungen für die Coefficienten $p, q, r, \dots$ repräsentirt, die dadurch entstehen, dass man:

1. die Ausdrücke einander gleich setzt, die für (y) aus (2) und (1) erhalten werden, wenn man darin die Parameterwerthe $a, b, c, \dots$ für λ einsetzt (nach vorgängiger Division mit $(\lambda - a)^{\alpha_1}$ bez. $(\lambda - b)^{\beta_1}$, etc.),

2. dass man die in $y'(\lambda) : x'(\lambda)$ enthaltene ganze Function herauszieht und dann den Rest Coefficient für Coefficient mit Null vergleicht; oder auch, dass man die Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ von $x'(\lambda) = 0$ bestimmt und

$$y'(\varrho_1) = 0; \quad y'(\varrho_2) = 0, \dots$$

setzt.

Die erste Bedingung ergiebt, beispielsweise für den Parameterwerth a , ein Gleichungssystem, das sich darstellen lässt durch:

$$\begin{aligned} [p + \lambda q + \lambda^2 r + \dots] (a - b)^{\alpha_1} (a - c)^{\alpha_2} \dots \\ = [A_1 A^{\alpha_1} + A_2 (\lambda - a)^{\alpha_2 - \alpha_1} A^{\alpha_2} + \dots], \end{aligned}$$

wo die eckigen Klammern bedeuten, dass hieraus durch Vergleichung der Coefficienten der niedersten Potenzen von $\lambda - a$ (nach welchen man sich auch die erste Klammer angeordnet zu denken hat) sovieler lineare Bestimmungsgleichungen für die Coefficienten $p, q, r, \dots$ abzuleiten sind, als man wünscht, dass Glieder in den Ausdrücken für y in (2) und (1) übereinstimmen. Weitere Systeme solcher Gleichungen werden durch die Parameterwerthe $b, c, \dots$ geliefert. Ueberhaupt kann man eine beliebig genaue Uebereinstimmung der Entwicklungen (2) mit den gegebenen (1) in der Nähe der Parameterwerthe, die dem vielfachen Punkte entsprechen, erzielen, wenn man nur die Reihe $p + q\lambda + r\lambda^2 + \dots$ genügend weit fortsetzt. Man kann so auch verhüten, dass die linearen Gleichungen, die durch obige Bedingungen geliefert werden, unerfüllbar sind, indem durch Hinzunahme höherer Glieder mit verfügbaren Coefficienten dort nur Unbestimmtheiten entstehen, wo sonst ein Widersprechen stattfinden würde*). Das folgende Beispiel weist diesen Fall auf.

Man verlangt, die einfachste rational-ganze Curve mit Selbstberührungspunkt zu finden. Die den beiden Zweigen entsprechenden Reihenentwicklungen haben die Form:

$$y = kx^2 + \dots, \quad y = lx^2 + \dots,$$

und es werde die Uebereinstimmung nur für die Coefficienten der

*) Die Fortsetzung der Entwicklung kann auch durch die in § 1. geforderte Eindeutigkeit des Entsprechens von Curvenpunkt und Parameter bedingt werden, vermöge deren sich z. B. die Darstellung der beiden Coordinaten durch blos gerade Potenzen verbietet.

zweiten Potenzen verlangt. Behält man die obigen Bezeichnungen bei und setzt noch:

$$b = -a,$$

so werden die linearen Bedingungsgleichungen für die Coefficienten,

$$q = 0,$$

$$p + aq + a^2r + a^3s + \dots = 2ak,$$

$$p - aq + a^2r - a^3s + \dots = -2al.$$

Obgleich dies nur drei Gleichungen sind, müssen doch 4 Glieder der Reihe $p + q\lambda + \dots$ herangezogen werden, wenn jene sich nicht selbst widersprechen sollen. Bricht man mit $s\lambda^3$ ab, so erhält man:

$$q = 0; \quad a^2s = k + l; \quad p + a^2r = 2a(k - l).$$

Die Gleichungen für die gesuchte Curve sind also:

$$x = \lambda^2 - a^2;$$

$$y = (\lambda^2 - a^2)^2 (p + \lambda^2r + \lambda^3s),$$

wo von den Grössen p, r eine noch beliebig ist, während die andere in Verbindung mit s die Krümmung der Zweige bestimmt.

Um endlich eine zusammengesetzte Singularität durch Variation der Coefficienten in den Ausdrücken für die Coordinaten der Curve in elementare Singularitäten *aufzulösen*, beginne man mit der Auflösung der einzelnen Zweige, und verschiebe diese dann gegeneinander. Es geschieht dies so, dass man die jedem unicursalen Zweig entsprechende Entwicklung durch eine rational-ganze Curve ersetzt, diese — in der oben angegebenen Weise — variirt, so dass die Singularität sich auflöst, worauf die variirten Zweige auf einer Curve vereinigt werden, was entweder in der eben angegebenen Weise in einem vielfachen Punkt geschehen kann, oder so, dass die verschiedenen Zweige eine durch den Ursprung gelegte Gerade in verschiedenen Punkten treffen. — Die näheren Umstände mögen an einigen Beispielen erläutert werden, die für das Nachfolgende von Interesse sind und deshalb theilweise eingehender, als dies für den vorliegenden Zweck nöthig wäre, besprochen werden sollen. Gegenstand der Untersuchung werden namentlich die bei der Auflösung entstehenden Doppelpunkte und Doppeltangenten sein.

I. *Selbstberührungspunkt* (Binodalpunkt). Um alle Fälle des Vorkommens zu umfassen, legen wir statt der oben betrachteten Curve eine allgemeinere zu Grunde, deren Gleichung in der variirten Form:

$$x = (\lambda - a)(\lambda - a_1)P(\lambda);$$

$$y = \{(\lambda - a)^2(\lambda - a_1)^2 + \varepsilon\}Q(\lambda)$$

lautet, wo a, a_1 Constante, $P(\lambda), Q(\lambda)$ ganze Functionen von λ sind,

die für $\lambda = a$ und $\lambda = a_1$ nicht verschwinden, und von denen man sich die letztere so bestimmt denken mag, dass $\frac{y'}{x}$ eine ganze Function ist; ε endlich sei eine sehr kleine Grösse, deren Verschwinden das Auftreten der Singularität mit sich führt. Um die Parameter der Doppelpunkte d. h. die sehr kleinen Grössen α, α_1 in:

$$\lambda = a + \alpha, \quad \lambda_1 = a_1 + \alpha_1$$

zu finden, entwickle man die linken Seiten der Gleichungen:

$$x(\lambda) - x(\lambda_1) = 0, \quad y(\lambda) - y(\lambda_1) = 0$$

nach steigenden Potenzen von α und α_1 . Die ersten Glieder der Entwicklung lauten:

$$\alpha(a - a_1) P - \alpha_1(a_1 - a) P_1 + \dots = 0$$

$$\varepsilon(Q - Q_1) + 2(a - a_1)^2 \left(\frac{\alpha^2}{2} Q - \frac{\alpha_1^2}{2} Q_1 \right) + \dots = 0,$$

wo zur Abkürzung P_1 für $P(a_1)$, P für $P(a)$ u. s. w. geschrieben wurde. Hieraus berechnet sich:

$$\alpha = \pm \frac{P_1}{a - a_1} \cdot \Omega \sqrt{\varepsilon},$$

$$\alpha_1 = \pm \frac{P}{a_1 - a} \cdot \Omega \sqrt{\varepsilon},$$

wo

$$\Omega = \sqrt{\frac{Q - Q_1}{P^2 Q_1 - P_1^2 Q}} = \Omega$$

gesetzt wurde. Die Parameter der Doppelpunkte sind also in erster Annäherung:

$$\lambda = a \pm \frac{P_1}{a - a_1} \Omega \sqrt{\varepsilon},$$

$$\lambda_1 = a_1 \pm \frac{P}{a_1 - a} \Omega \sqrt{\varepsilon},$$

und genügen einer Gleichung 4. Grades von der Form:

$$((\lambda - a)^2 - \varepsilon c) ((\lambda - a_1)^2 - \varepsilon c_1) = 0,$$

wo c und c_1 Constante sind. Die Discriminante dieser Gleichung ist mit ε^2 proportional.

Die Gleichung für die Parameter der Doppeltangenten, deren Berührungspunkte für $\varepsilon = 0$ in die Singularität entfallen, erhält man durch Entwicklung der Gleichungen:

$$u(\mu) - u(\mu_1) = 0; \quad v(\mu) - v(\mu_1) = 0$$

nach aufsteigenden Potenzen der sehr kleinen Grössen β, β_1 , wenn:

$$\mu = a + \beta; \quad \mu_1 = a_1 + \beta_1$$

gesetzt wird. Die Entwicklung liefert (vgl. § 3., II.):

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{a-a_1} \left(\frac{Q'}{P} + \frac{Q'_1}{P_1} \right) + 2(a-a_1) \left(\frac{Q}{P} \beta + \frac{Q_1}{P_1} \beta_1 \right) + \dots = 0, \\ -\varepsilon(Q-Q_1) + 2(a-a_1) \left(Q \frac{\beta^2}{2} - Q_1 \frac{\beta_1^2}{2} \right) + \dots = 0, \end{aligned}$$

wo wieder Q für $Q(a)$, Q' für $\frac{\partial Q(\lambda)}{\partial \lambda}$ für $\lambda = a$ u. s. w. gesetzt wurde. Durch Elimination von ε erhält man in erster Annäherung:

$$\frac{Q}{P} \beta + \frac{Q_1}{P_1} \beta_1 = 0.$$

Wenn man diese Gleichung mit der letzterhaltenen combinirt, so bekommt man β und β_1 , deren Substitution in μ und μ_1 für die Parameter der Berührungspunkte die Werthe ergibt:

$$\begin{aligned} \mu &= a \pm \frac{Q P_1}{a-a_1} \frac{1}{P P_1 \sqrt{Q Q_1}} \Omega \sqrt{\varepsilon}, \\ \mu_1 &= a_1 \pm \frac{P Q_1}{a_1-a} \frac{1}{P P_1 \sqrt{Q Q_1}} \Omega \sqrt{\varepsilon}, \end{aligned}$$

wo Ω den früheren Werth hat. Dieselben genügen einer biquadratischen Gleichung von derselben Form, wie die Parameter der Doppelpunkte.

Macht man die Voraussetzung *reeller Coefficienten* in den Parameterdarstellungen von x und y , so können die Grössen a, a_1 null oder conjugirt imaginär sein.

Sind 1. a, a_1 conjugirt imaginär, so werden die Producte $P P_1, Q Q_1$ reelle positive Grössen; dann werden, wenn das Vorzeichen von ε so beschaffen ist, dass $\Omega \sqrt{\varepsilon}$ eine reelle Grösse ist, auch die Grössen α und α_1, β und β_1 und somit die zu einem und demselben Doppelpunkt (Doppeltangente) gehörigen Parameter $\lambda, \lambda_1; \mu, \mu_1$, für die bez. die Gleichungen:

$$\alpha P + \alpha_1 P_1 = 0; \quad \frac{Q}{P} \beta + \frac{Q_1}{P_1} \beta_1 = 0$$

bestehen, conjugirt imaginär. Dies ändert sich aber, wenn ε sein Vorzeichen ändert, indem dann die conjugirt imaginären Werthe λ, λ_1 , bez. μ, μ_1 zu *verschiedenen* Doppelpunkten (Doppeltangenten) gehören. Dieser Umschlag findet für Doppelpunkte und Doppeltangenten gleichzeitig und zwar je mit zwei Paaren von Wurzeln statt.

Sind 2. a, a_1 reell, so sind die Grössen λ, λ_1 reell, wenn $\Omega \sqrt{\varepsilon}$ reell ist, sonst imaginär, indess so, dass conjugirt imaginäre Werthe zu verschiedenen Doppelpunkten gehören. Ob alsdann die Grössen μ, μ_1 reell oder imaginär sind (im letzteren Fall gehören conjugirte zu verschiedenen Doppeltangenten), hängt noch von dem Vorzeichen von $Q Q_1$ (dem Kriterium für die gegenseitige Krümmung der sich berührenden Zweige) ab.

Das Vorstehende lässt sich dahin zusammenfassen, dass, wenn beim Durchgang der Grösse ε durch Null die Zahl der Paare von *zusammengehörigen* (demselben Doppelpunkt, u. s. w. angehörigen) Wurzeln einer der Gleichungen:

$$\Lambda = 0, \quad M = 0$$

für die Parameter der Doppelpunkte, bez. -tangente, zu- oder abnimmt, dies nothwendig auch mit der anderen Gleichung und zwar um gleich viel Paare, nämlich um zwei, der Fall sein muss.

II. *Der Cuspibinodalpunkt*, der durch Zusammenfallen einer Spitze mit einem einfachen Curvenzweige entsteht, lässt sich in der penultimate Form darstellen durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= \lambda^2(\lambda - a) P(\lambda), \\ y &= \lambda^3(\lambda - a + \varepsilon) Q(\lambda), \end{aligned}$$

wo ε eine sehr kleine Grösse ist, deren Verschwinden die penultimate Form in die Singularität überführt, P und Q ganze Functionen, die weder für $\lambda = 0$, noch für $\lambda = a$ verschwinden und von denen Q so bestimmt ist, dass $\frac{y'}{x'}$ eine ganze Function ist. Die Gleichung für die Doppelpunkte erhält man wie oben, indem man:

$$\lambda = a + \alpha, \quad \lambda_1 = \alpha_1$$

setzt und $\xi = 0$, $\eta = 0$ nach Potenzen der sehr kleinen Grössen α , α_1 entwickelt. Man erhält:

$$a^2 P \alpha + 2a P_1 \frac{\alpha_1^2}{2} + \dots = 0,$$

$$\varepsilon a^3 Q + a^3 Q \alpha + \alpha_1^3 Q_1 + \dots = 0,$$

wo

$$Q = Q(a), \quad P = P(a), \quad P_1 = P'(a)$$

bedeutet.

Hieraus bestimmt sich:

$$\alpha = -\varepsilon, \quad \alpha_1 = \sqrt{\frac{aP}{P_1}} \sqrt{\varepsilon},$$

also

$$\lambda = a - \varepsilon, \quad \lambda_1 = \sqrt{\frac{aP}{P_1}} \sqrt{\varepsilon},$$

und hieraus der Factor von Λ für die penultimate Form:

$$\left(\lambda^2 - \frac{aP\varepsilon}{P_1}\right) ((\lambda - a + \varepsilon)^2 - \varepsilon^3 B),$$

wo B eine hier nicht näher zu bestimmende Grösse ist*). Die Form

*) Dass die erste ungerade Potenz der Entwicklung die dritte ist, B also im Allgemeinen von Null verschieden, geht aus der Abzählung des § 6. hervor, wonach die Discriminante von Λ keiner höheren als der vierten Potenz der Grösse ε proportional sein kann.

des letzten Klammerausdrucks ergibt sich aus dem Umstand, dass sich der Parameter λ_1 so gut wie λ aus einer quadratischen Gleichung bestimmen muss.

III. *Der Trinodalpunkt* (dreifache Punkt mit getrennten Tangenten) wird in seiner penultimaten Form dargestellt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= (\lambda - a) (\lambda - a_1) (\lambda - a_2) P(\lambda), \\ y &= [(\lambda - a) (\lambda - a_1) (\lambda - a_2) + \varepsilon] Q(\lambda), \end{aligned}$$

wo, wie man sogleich sehen wird, $P(\lambda)$ mindestens vom 1. Grad sein muss, $Q(\lambda)$ so bestimmt, dass $\frac{y'}{x'}$ eine ganze Function ist. Aus jedem der Parameterwerthe a, a_1, a_2 entstehen durch Variation zwei; denn setzt man z. B.:

$$\lambda = a + \alpha; \quad \lambda_1 = a_1 + \beta_1$$

in die Gleichungen für die Doppelpunkte ein:

$$x(\lambda) - x(\lambda_1) = 0, \quad y(\lambda) - y(\lambda_1) = 0,$$

so erhält man zwei Bestimmungsgleichungen für α und β_1 . Man erhält so im Ganzen sechs Variationen, von denen jedem Parameterwerthe zwei verschiedene zugehören, deren geometrische Deutung sich leicht aus dem Dreieck ergibt, welches die drei Zweige nach der Auflösung bilden. Man erhält nach dem öfters angegebenen Verfahren aus den (hier schon mit dem 1. bzw. 2. Glied abbrechenden) Reihenentwicklungen die folgenden variirten Parameterwerthe:

$$\begin{aligned} a + \varepsilon(a a_1) \frac{P_1}{(a)}; \quad a_1 + \varepsilon(a_1 a_2) \frac{P_2}{(a_1)}; \quad a_2 + \varepsilon(a_2 a) \frac{P}{(a_2)}; \\ a_1 + \varepsilon(a a_1) \frac{P}{(a_1)}; \quad a_2 + \varepsilon(a_1 a_2) \frac{P_1}{(a_2)}; \quad a + \varepsilon(a_2 a) \frac{P_2}{(a)}, \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung: P statt $P(a)$; $P_1 = P(a_1)$, etc.,

$$(a) = (a - a_1) (a - a_2); \quad (a_1) = (a_1 - a) (a_1 - a_2), \text{ etc.,}$$

und endlich:

$$(a a_1) = \frac{Q - Q_1}{P Q_1 - Q P_1}, \text{ u. s. w.}$$

gesetzt wurde.

Von diesen 6 Werthen gehören je die untereinander stehenden einem Doppelpunkt an, deren also drei aus einem dreifachen Punkt entstehen. Dagegen würden die drei Zweige ungetrennt bleiben, wenn P eine Constante wäre, weil die Variationen dann paarweise einander gleich würden, wesshalb wir diesen Fall ausschlossen.

Sind a und a_1 conjugirt imaginär, so wird dies auch eines der untereinander stehenden Paare sein, während die beiden anderen kreuzweise conjugirt werden, beides unabhängig von dem Vorzeichen von ε . Beim Durchgang von ε durch Null ändert sich also an der Zahl der

reellen oder conjugirt imaginären Wurzeln der Doppelpunktsgleichung $\Lambda = 0$ überhaupt nichts.

Endlich die Discriminante des Factors der Gleichung $\Lambda = 0$, welcher den obigen 6 Wurzeln entspricht, ist, wie man sogleich sieht, mit $\varepsilon^2 \cdot \varepsilon^2 \cdot \varepsilon^2 = \varepsilon^6$ proportional.

Zusatz 1. Das Verhalten der Hesse'schen Curve in der Nähe eines singulären Punktes ergibt sich aus der rationalen Form der Curvengleichung in Cartesischen Coordinaten, wenn man die Glieder derselben nach ihrer Dimension anordnet, und auf die so entstehende Summe von binären Formen das von mir in einer Note über die Hesse'sche Curve (d. Annalen Bd. XIII.) angegebene Verfahren anwendet.

Zusatz 2. Nachdem im Vorstehenden gezeigt worden, wie sich eine rationale Curve k angeben lässt, welche statt einer gewissen höheren Singularität die äquivalenten elementaren hat, die dann durch Nullsetzen einer Variation ε zu jener höheren sich vereinigen, so kann man auch aus einer beliebigen algebraischen Curve C , die mit einer Singularität behaftet ist, durch Variation eine Curve c ableiten, welche, ohne dass die Zahlen für Grad, Classe, Geschlecht andere sind, wie für C , statt der Singularität die äquivalenten elementaren besitzt. Betrachten wir irgend einen Zweig jener Singularität, und bilden die Gleichung der rational-ganzen Curve k , welche Träger der äquivalenten elementaren ist, so muss diese für $\varepsilon = 0$ in den Gliedern G niederster Dimension von x und y mit C übereinstimmen. Aber die Variationen erstrecken sich in k nur auf Glieder noch niederer Dimension, als jene G , weil sie eine Trennung der in $x = y = 0$ zusammengefallenen Rückkehr- und Wendepunkte bewirken (§ 3.). Fügt man daher diese variirten Glieder auch der Gleichung der Curve C zu, so ändert sich deren Ordnung nicht. Variirt man dann, um auch die übrigen Singularitäten, die etwa auf C auftreten, für c zu erhalten, ebenso die übrigen (von Null verschiedenen oder auch verschwindenden) Coefficienten derselben, so kann dies immer in der Weise geschehen, dass Zahl und Art derselben ungeändert bleibt. Denn wenn die Anzahl der in C auftretenden Glieder ausgereicht hat, um ausser der betrachteten Singularität noch andere hervorzubringen, so werden auch die Variationen der Glieder höherer Dimension ausreichen müssen, um die durch das Hinzukommen der variirten Glieder niederer Dimension illusorisch gewordenen Bedingungsgleichungen wieder zu erfüllen. Classe, Ordnung und Geschlecht bleiben also erhalten. Durch kleine Variationen kann ferner auch das Vorzeichen von endlichen Grössen sich nicht ändern; von solchen hängt aber die Realität jener Singularitäten ab, die also gleichfalls ungeändert bleiben muss. — Diese Betrachtungen sind mit geringen Modificationen auch auf den Fall zusammengesetzter

Singularitäten anwendbar, sowie dann, wenn mehrere Singularitäten auf derselben Curve aufzulösen sind, was hier nicht weiter ausgeführt werden soll.

§ 5.

Die Doppelpunktsgleichung der rational-ganzen Curve und ihre Discriminante.

Wegen der dualistischen Eigenschaften der Gleichungen einer rational-ganzen Curve kann man sich, wenn es sich im Folgenden um die Untersuchung der Doppelpunkte und Doppeltangenten handelt, auf die Gleichungen für die ersteren beschränken.

Die Gleichung für die Parameter der Doppelpunkte — wir werden sie kurzweg „*Doppelpunktsgleichung*“ nennen — entsteht durch Elimination von λ_1 aus den Gleichungen (§ 1.):

$$\xi(\lambda \lambda_1) \equiv \frac{x(\lambda_1) - x(\lambda)}{\lambda_1 - \lambda} = 0; \quad \eta(\lambda \lambda_1) \equiv \frac{y(\lambda_1) - y(\lambda)}{\lambda_1 - \lambda} = 0.$$

Für die Discussion erweist es sich als zweckmässig, diese Gleichungen durch zwei andere zu ersetzen*), die statt der Variablen λ_1 die Differenz enthalten:

$$D = \lambda_1 - \lambda.$$

Entwickelt man $x(\lambda_1) = x(\lambda + D)$ nach aufsteigenden Potenzen von D , so erhält man, mit Rücksicht darauf, dass (§ 1.):

$$\frac{dx}{d\lambda} = x' = \varrho$$

ist, an Stelle von $\xi(\lambda \lambda_1) = 0$ die folgende Gleichung:

$$\xi(\lambda D) \equiv \varrho + \varrho' \cdot \frac{D}{2!} + \varrho'' \cdot \frac{D^2}{3!} + \dots + \varrho^{(R)} \cdot \frac{D^R}{(R+1)!} = 0,$$

wo $\varrho', \varrho'', \dots, \varrho^{(R)}$ die ersten, zweiten u. s. w. Differentialquotienten der ganzen Function R . Grades ϱ nach λ sind. Analog ergibt sich durch Entwicklung von $y(\lambda_1) = y(\lambda + D)$ nach Potenzen von D aus $\eta(\lambda \lambda_1) = 0$ die Gleichung:

$$\eta(\lambda D) \equiv \varrho u + \frac{D}{2!} (\varrho w + \varrho' u) + \frac{D^2}{3!} (\varrho w' + 2\varrho' w + \varrho'' u) + \dots + \frac{D^{R+W+1}}{(R+W+2)!} \binom{R+W+1}{R} \varrho^{(R)} w^{(W)} = 0.$$

*) Zur wirklichen Herstellung der Gleichung in λ empfiehlt sich dann die Beibehaltung der obigen Gleichungen in λ und λ_1 , wenn eine von ihnen zerfällbar ist, wie dies z. B. eintritt, wenn x oder y nur durch gerade Potenzen von λ darstellbar ist.

wo zur Abkürzung:

$$\frac{(R+W+1)(R+W)\cdots(W+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots R} = \binom{R+W+1}{R}$$

gesetzt ist,

$$u = \frac{y'}{x}, \quad \varpi = \frac{du}{d\lambda} = u',$$

und $\varpi', \varpi'', \dots, \varpi^{(W)}$ die successiven Differentialquotienten der ganzen Function ϖ sind. Mit Rücksicht darauf, dass in $\eta(\lambda D)$ der Coefficient von u nichts anderes als ξ ist, erhält man neben:

$$\varrho = 0$$

die folgende Bedingungsgleichung für die Parameter der Doppelpunkte:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{D} \{ \eta(\lambda D) - u \cdot \xi \} &= \frac{1}{2!} \varrho \varpi + \frac{D}{3!} (\varrho \varpi' + 2 \varrho' \varpi) \\ &+ \frac{D^2}{4!} (\varrho \varpi'' + 3 \varrho' \varpi' + 3 \varrho'' \varpi) \\ &+ \frac{D^3}{5!} (\varrho \varpi''' + 4 \varrho' \varpi'' + 6 \varrho'' \varpi' + 4 \varrho''' \varpi) + \dots \\ &+ \frac{D^{R+W}}{(R+W+2)!} \binom{R+W+1}{R} \varrho^{(R)} \varpi^{(W)}. \end{aligned}$$

Den Grad dieser Gleichung in D kann man vermöge $\xi = 0$ noch erniedrigen, indem man bildet:

$$H \equiv \frac{1}{D^2} \{ \eta(\lambda D) - u \cdot \xi - \frac{\varpi}{2} \cdot \xi \} = 0,$$

oder ausgeführt:

$$\begin{aligned} 0 = H &\equiv \frac{1}{3!} (\varrho \varpi' - \varpi \varrho') + \frac{D}{4!} (\varrho \varpi'' + 3 \varrho' \varpi' - \varrho'' \varpi) \\ &+ \frac{D^2}{5!} (\varrho \varpi''' + 4 \varrho' \varpi'' + 6 \varrho'' \varpi' - \varrho''' \varpi) + \dots \\ &+ \frac{D^{R+W-1}}{(R+W+2)!} \binom{R+W+1}{R} \varrho^{(R)} \varpi^{(W)}. \end{aligned}$$

Statt der Gleichungen $\xi(\lambda \lambda_1) = 0$, $\eta(\lambda \lambda_1) = 0$ des § 1. lassen sich also auch die $\xi = 0$, $H = 0$ zur Berechnung der Parameter der Doppelpunkte d. h. zur Bildung der „Doppelpunktsgleichung“ benutzen, welche man durch Elimination von D^2 aus beiden erhält. Würde man statt dessen λ eliminiren, so erhielte man eine Gleichung in D mit nur geraden Potenzen. Denn das einem Doppelpunkt entsprechende Werthepaar λ, λ_1 wird in der neuen Bezeichnungsweise $\lambda, \lambda + D$. Wegen des symmetrischen Vorkommens von λ und λ_1 genügt aber auch: $\lambda_1, \lambda_1 - D$; die Gleichung, welche λ nicht mehr enthält, muss also sowohl durch $+D$ wie durch $-D$ befriedigt werden können. — Das constante Glied dieser Gleichung in D^2 erhält man, wenn man in ξ und $H : D = 0$ setzt; es wird also gleich der Resultante aus:

$$\varrho = 0 \quad \text{und} \quad \varrho' \varpi = 0,$$

oder bis auf einen Zahlenfactor gleich dem Product aus der *Discriminante* von ϱ in die *Resultante* von ϱ und ϖ .

Eliminirt man dagegen aus $\xi = 0$, $H = 0$ die Grösse D , so erhält man eine Gleichung für λ :

$$\Lambda(\lambda) = 0$$

die „*Doppelpunktsgleichung*“, aus welcher sich die Parameter der in den Doppelpunkten sich schneidenden Curvelemente bestimmen. Da die Dimension der Ausdrücke ξ und H hinsichtlich der Grössen λ , D bzw. R und $R + W - 1$ ist, so steigt jene Gleichung $\Lambda = 0$ in λ bis zum Grad:

$$R(R + W - 1)$$

an*), sofern nicht aus irgend einem Grunde die Glieder höchster Dimension ausfallen.

Was die Coefficienten der Gleichung $\Lambda = 0$ angeht, so setzen sich dieselben aus denen der Ausdrücke ϱ und ϖ zusammen. Nehmen wir für letztere die Form an:

$$\begin{aligned} \varrho &\equiv a_0 \lambda^R + a_1 \lambda^{R-1} + \dots, \\ \varpi &\equiv b_0 \lambda^W + b_1 \lambda^{W-1} + \dots, \end{aligned}$$

und legen den Coefficienten a_i , b_i *Gewichte* bei, dem Coefficienten a_i von λ^{R-i} in ϱ sowie dem b_i von λ^{W-i} in ϖ jedem das Gewicht i , so dass also die Summe aus dem Gewicht des Coefficienten und des Exponenten der Potenz von λ für jedes Glied in ϱ denselben Werth R , für ϖ den W hat, so werden auch die Glieder in ξ , H die nämliche Eigenschaft besitzen, indem für jedes Glied in ξ die Summe aus den Gewichten der eingehenden Coefficienten a_i , b_i von ϱ und ϖ und den Exponenten von λ und D den constanten Werth R , für jedes Glied in H den Werth $R + W + 1$ hat. Auf diese Weise ist eine Art Homogenität dieser und der aus ihnen abzuleitenden Gleichungen hergestellt (welche noch vollständiger zum Vorschein kommen würde, wenn die Coefficienten a_i , b_i je durch die i^{te} Potenz einer Grösse ersetzt würden). Ebenso wie mit dem Begriff der „Dimension“ kann man mit dem des „Gewichts“ eines Products rechnen, unter dem wir die Summe aus dem Gewicht der vorkommenden Coefficienten von ϱ und von ϖ und den Exponenten der Variablen verstehen wollen, so dass, wie für ϱ und ϖ , so für jeden der im Folgenden zu betrachtenden Ausdrücke jedes Glied dasselbe Gewicht, das des betreffenden Ausdrucks, besitzt.

*) Die Resultante aus: $\xi(11_1) = 0$, $\eta(11_1) = 0$ ist vom Grade $R(R + W + 1)$, unterscheidet sich also von $\Lambda(1)$ durch einen Factor vom Grade $2R$, nämlich, wie man leicht direct erkennt, durch die 2. Potenz des Ausdrucks ϱ .

Hiernach ist das Gewicht der Resultante $\Lambda(\lambda) = 0$ aus den beiden Gleichungen $\xi = 0$, $H = 0$ gleich dem Product aus dem Gewichte beider Componenten, also gleich*):

$$R(R + W - 1).$$

Der Process der Elimination, durch welchen die Gleichung $\Lambda = 0$ gebildet wird, ist im Allgemeinen zu wenig übersichtlich, um die Eigenschaften der Doppelpunktsgleichung erkennen zu lassen. Wir werden aus ihm später (§ 9.) die näheren Umstände kennen lernen, unter denen eine Erniedrigung des Grades dieser Gleichung eintritt. Alles Andere jedoch, was sich von derselben allgemein aussagen lässt, erkennt man am leichtesten auf einem indirecten Weg, auf welchen die einfachen und eleganten Eigenschaften ihrer Discriminante hinweisen.

Wir wenden uns daher zur Untersuchung der *Discriminante der Doppelpunktsgleichung* $\Lambda(\lambda) = 0$, bezüglich deren fürs Erste die *Voraussetzung gemacht werden möge, dass sie $R(R + W + 1)$ von einander verschiedene endliche Wurzeln besitzt**)*. Dann wird die Discriminante Δ ein von Null verschiedenes Aggregat der Coefficienten a_i, b_i sein, dessen Gewicht (vgl. Salmon-Fiedler, Algebra, 3. Aufl., p. 125):

$$(\Delta) = R(R + W - 1) \{R(R + W - 1) - 1\}$$

ist. Dieselbe verschwindet, wenn zwei oder mehrere Parameterwerthe, die Doppelpunkten zugehören, zusammenfallen. Aber einfache geometrische oder auch algebraische Ueberlegungen, von denen sogleich die Rede sein wird, lassen erkennen, dass dies Zusammenfallen in sehr verschiedenartiger Weise erfolgen kann. Hat man die Bedingung für irgend ein Eintreten dieses Falls durch eine Gleichung zwischen den Coefficienten a, b dargestellt und diese auf die Form gebracht: eine rationale ganze irreducible (nicht als Potenz darstellbare) Function dieser Coefficienten gleich Null, so muss diese Function Factor der Discriminante der Doppelpunktsgleichung sein. Wir wollen im Folgenden durch eine algebraische Betrachtung die Modalitäten, unter denen die Discriminante verschwinden kann, entwickeln und die Vollständigkeit der Aufzählung dadurch prüfen, dass die zugehörigen rationalen Functionen ihrem Gewicht und der Vielfachheit nach bestimmt werden, in welcher jede als Factor in der Discriminante auftritt; die Summe der

*) Diese Zahl giebt das Gewicht von Λ , wenn von den Coefficienten a_i, b_i beliebige Null sind, nur unter der Voraussetzung an, dass man die Resultante so bildet, als wenn sie nicht Null wären, und dann sie erst gleich Null setzt.

**) Aus § 9. ergibt sich, dass diese Voraussetzung — für allgemeine Coefficienten a_i, b_i — immer dann zutrifft, wenn $R + 1$ und $W + 1$ relative Primzahlen sind.

so erhaltenen Gewichte muss dann gleich dem oben bestimmten Gewicht der Discriminante sein. Auf diese Weise ergibt sich, bis auf Potenzen von a_0 und b_0 genau, die Zerlegung der Discriminante in rationale Factoren.

§ 6.

Die Factoren der Discriminante.

Die Discriminante der Gleichung $\Lambda(\lambda) = 0$, die man sich hier aus der Resultante von:

$$\xi(\lambda \lambda_1) = 0, \quad \eta(\lambda \lambda_1) = 0$$

durch Division mit ϱ^2 (s. d. Note p. 397) gebildet denken mag, verschwindet immer und nur dann, wenn 1. einem Werthe von λ zwei Werthe von λ_1 zugehören, die alsdann verschieden oder gleich (benachbart) sein können, oder 2. (wegen des symmetrischen Vorkommens von λ und λ_1): wenn $\lambda = \lambda_1$ ist.

Die Bedingung dafür, dass zu einem λ zwei *verschiedene* Werthe von λ_1 gehören, drückt sich dadurch aus, dass ausser der Determinante, welche die Resultante aus den obigen Gleichungen darstellt, auch deren erste Unterdeterminanten verschwinden, wobei diejenigen Lösungen noch abzuziehen sind, für welche die beiden Werthe λ_1 unendlich benachbart sind*). — Geometrisch ausgedrückt bedeutet dies das Auftreten eines *dreifachen* („*Trinodal*“) *Punktes* mit getrennten Tangenten, weil ein Tripel von Werthen λ zusammengehört.

Wenn zu einem λ zwei *benachbarte* Werthe von λ_1 gehören sollen, die den obigen Gleichungen genügen, so müssen neben denselben noch die folgenden bestehen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \lambda} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} = 0.$$

Hieraus folgt aber sogleich $x' = 0$, $y' = 0$ **), oder $\varrho = 0$. Diese Bedingung entspricht also dem Fall, wo von einem dreifachen Punkte zwei Zweige sich zu einem Rückkehrpunkt vereinigen. Wir nennen diese Singularität: „*Cuspibinodalpunkt*“.

*) Wir werden weiter unten diese Bedingung, anknüpfend an die Gleichungen

$$\xi(1D) = 0, \quad \eta(1D) = 0,$$

aus denen durch Elimination von D ja ebenfalls $\Lambda = 0$ entsteht, in der Form ausdrücken, dass die Unterdeterminanten *dieser* Eliminationsdeterminante verschwinden. Dies sagt dasselbe aus, weil immer dann, wenn zu einem λ zwei verschiedene Werthe λ_1 gehören, auch das zugehörige $D = \lambda_1 - \lambda$ zwei verschiedene Werthe hat, und umgekehrt.

**) Diese letztere Gleichung ist eine Folge der erstern $x' = 0$.

Es können aber auch zwei *benachbarten* Werthen von λ *benachbarte* von λ_1 entsprechen, wo dann neben $\xi = 0$, $\eta = 0$ statt der obigen Gleichungen die bestehen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \xi}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \eta}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 = 0.$$

Dann verschwindet die Functionaldeterminante von ξ und η nach λ und λ_1 genommen.

Man kann diese Gleichung auf die Form:

$$\frac{y'(\lambda)}{x'(\lambda)} = \frac{y'(\lambda_1)}{x'(\lambda_1)},$$

d. h. auf $\alpha(\lambda, \lambda_1) = 0$ (§ 1.) bringen. Wegen der Identität:

$$\beta = u\xi - \alpha x - \eta,$$

die sich unmittelbar aus der Gleichung:

$$v = ux - y$$

ableitet, folgt hieraus, dass auch β verschwindet. Dem gleichzeitigen Verschwinden von ξ, η, α, β entspricht aber offenbar ein Punkt der Curve, wo diese sich nicht nur selbst schneidet, sondern auch selbst berührt, ein *Selbstberührungs- („Binodal-“) Punkt*.

Aber hiermit sind noch nicht alle Fälle erschöpft, in denen zwei Werthe von λ einander gleich werden. Vermöge der Symmetrie der Gleichungen $\xi = 0$, $\eta = 0$ in Bezug auf λ und λ_1 ist sowohl λ wie λ_1 Wurzel der Gleichung $\Lambda = 0$, welche demnach, in dem besonderen Falle, dass $\lambda = \lambda_1$, oder $D = 0$ wird, eine Doppelwurzel erhält. Wir haben oben (p. 376) gesehen, dass dem Falle $D = 0$ diejenigen Werthe von λ entsprechen, für welche entweder die Discriminante der Gleichung $\varphi = 0$ für die Rückkehrpunkte oder die Resultante aus φ und ϖ , wo $\varpi = 0$ die Wendepunkte ergiebt, verschwindet. Die zugehörigen Singularitäten sind also der „*Biscuspidalpunkt*“ und die *Schnabelspitze* (Spitze 2. Art, „*Cuspiflexionspunkt*“).

Jedem der vorstehend aufgezählten Fälle entspricht als Factor der Discriminante eine rationale und ganze Function der Coefficienten, irreducibel (d. h. keine Potenz einer solchen), deren Verschwinden das Auftreten der betreffenden Singularität mit sich führt. Wir werden im Folgenden einen Weg angeben, diese Factoren direct zu bilden, ferner ihr Gewicht in den Coefficienten und die Vielfachheit ihres Auftretens bestimmen. Das Erstere bietet keine Schwierigkeit; was die Bestimmung der Vielfachheit angeht, so werden wir in folgender Weise verfahren.

Nimmt man die Coefficienten in φ und ϖ so an, dass der Factor, dessen Vielfachheit bestimmt werden soll, sehr klein, $= \varepsilon$, wird, so können sich diese Coefficienten von denen einer Curve, für welche ε

verschwindet, nur um Grössen unterscheiden, die selbst mit ε verschwinden. Sei für diese letztere Curve der Parameterwerth λ^0 , welcher einem Zweige zukommt, der dem singulären Punkte angehört, p -fache Wurzel der Doppelpunktsgleichung. Dann wird die Function Λ der variirten Curve, wenn $\Lambda = 0$ ihre Doppelpunktsgleichung ist, eine ganze Function p^{ten} Grades in $(\lambda - \lambda^0)$ zum Factor haben, die sich für $\varepsilon = 0$ auf die p^{te} Potenz von $(\lambda - \lambda^0)$ reducirt, und deren Form aus irgend einem speciellen Fall zu bestimmen ist. Die Discriminante dieser Function ist einer Potenz von ε proportional. Bildet man ebenso die Factoren von Λ , die den anderen im singulären Punkt sich schneidenden Zweigen entsprechen, sowie deren Discriminanten, so ist der Gesamtbeitrag, welchen der singuläre Punkt zu der Discriminante von Λ liefert, gleich dem Product aus den Discriminanten der Factoren in die Quadrate der Resultanten derselben, also im Allgemeinen dem Product derjenigen Potenzen von ε proportional, welchen die Discriminanten der einzelnen Factoren proportional gefunden wurden. Der Gesamtexponent von ε ist dann der gesuchte Grad der Vielfachheit, in welcher der Factor auftritt, dessen Verschwinden die Singularität anzeigt.

Wir wenden uns nun zur Besprechung der oben aufgeführten Singularitäten im Einzelnen, wobei indess die Reihenfolge geändert werden mag.

I. *Bicuspidalpunkt* und *Cuspiflexionspunkt* nannten wir oben diejenigen Curvensingularitäten, die durch Vereinigung von zwei Rückkehrpunkten bez. einem Rückkehrpunkt und einem Wendepunkt entstehen. In jede derselben fällt ein Doppelpunkt herein, dessen Parameter sich (vgl. § 3.; I., II.) aus Gleichungen von der Form bestimmen lassen:

$$\lambda^2 + a\varepsilon = 0,$$

wo a eine Constante und ε eine je dem betreffenden Factor proportionale Grösse ist. Für die eine Singularität bedeutet also ε , bis auf eine Constante, die Discriminante der Rückkehrpunktsgleichung $\varrho = 0$, für die andere die Resultante aus dieser und der Wendepunktsgleichung $\varpi = 0$; beide sind offenbar einfache Factoren der Discriminante der Doppelpunktsgleichung $\Lambda = 0$. Wegen der begleitenden Umstände, mit denen das Verschwinden der Discriminante von ϱ verknüpft ist, kann man dieselbe den „Bicuspidalfactor“ $[C^2]$ der Discriminante der Doppelpunktsgleichung nennen. Bezeichnet man mit (C^2) das Gewicht von $[C^2]$ in den Coefficienten a_i, b_i bez. den Gleichungen $\varrho = 0, \varpi = 0$, so ist:

$$(C^2) = R(R-1),$$

wo R wie oben den Grad von ϱ bedeutet. — Analog ist das Ge-

wicht (CJ) des „*Cuspinflexionsfactors*“ $[CJ]$ d. h. der Resultante aus ϱ und ϖ :

$$(CJ) = RW.$$

Dualistisch entspricht $[CJ]$ sich selbst; dem Factor $[C^2]$ dagegen ein Ausdruck $[J^2]$, die Discriminante nämlich von ϖ , deren Verschwinden das Auftreten eines Undulationspunktes („*Bisinflexionspunktes*“) nach sich zieht. $[J]^2$ und $[CJ]$ sind hiernach Factoren der Discriminante der Doppeltangentengleichung.

II. Der *Binodaldpunkt* (*Selbstberührungspunkt*). Von den Bedingungsleichungen für einen solchen:

$$\xi = 0; \quad \eta = 0; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 0$$

ist, wie wir oben gesehen, die letzte eine identische Folge der drei ersten. Durch Einführung von

$$D = \lambda_1 - \lambda$$

an Stelle von λ_1 lässt sich, analog der oben (§ 5.) hergeleiteten Darstellung von ξ :

$$\xi(\lambda D) \equiv \varrho + \frac{D}{2!} \varrho' + \frac{D^2}{3!} \varrho'' + \cdots + \frac{D^R}{(R+1)!} \varrho^{(R)} = 0,$$

die Gleichung $\alpha = 0$ in die Form bringen:

$$\alpha(\lambda D) \equiv \varpi + \frac{D}{2!} \varpi' + \frac{D^2}{3!} \varpi'' + \cdots + \frac{D^W}{(W+1)!} \varpi^{(W)} = 0.$$

Die Gleichung $\eta = 0$, die wir oben (§ 5.) durch:

$$\eta(\lambda D) - u \cdot \xi(\lambda D) = 0$$

ersetzt haben, muss sich, wegen des dualistisch gleichmässigen Verhaltens der vorliegenden Singularität mit Hilfe von $\alpha = 0$ und $\xi = 0$ auf eine für ϖ und ϱ symmetrische Form bringen lassen. Diese Forderung wird in der That von der folgenden linearen Combination von η , α und ξ erfüllt:

$$\eta(\lambda D) - \xi(\lambda D) \cdot u + \frac{1}{2} \alpha(\lambda D) \cdot P - \frac{1}{2} \xi(\lambda D) \cdot Q \equiv \frac{D^3}{2} \cdot S(\lambda D),$$

welche, wie angedeutet, durch D^3 theilbar ist, wobei:

$$P \equiv \frac{1}{2!} \varrho + \frac{D}{3!} \varrho' + \frac{D^2}{4!} \varrho'' + \cdots + \frac{D^R}{(R+2)!} \varrho^{(R)},$$

$$Q \equiv \frac{1}{2!} 4 \varpi + \frac{D}{3!} 5 \varpi' + \frac{D^2}{4!} 6 \varpi'' + \cdots$$

$$+ \frac{D^W}{(W+2)!} (W+4) \varpi^{(W)}.$$

Setzt man diese Werthe ein, so wird:

$$\begin{aligned} S(\lambda D) \equiv & \frac{1}{5} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 1}{3! 4!} (\varpi' \varrho'' - \varrho' \varpi'') + \frac{D}{6} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{3! 5!} (\varpi' \varrho''' - \varrho' \varpi''') \\ & + \frac{D^2}{7} \left\{ \frac{1 \cdot 4 \cdot 3}{3! 6!} (\varpi' \varrho^{IV} - \varrho' \varpi^{IV}) + \frac{2 \cdot 3 \cdot 1}{4! 5!} (\varpi'' \varrho''' - \varrho'' \varpi''') \right\} \\ & + \frac{D^3}{8} \left\{ \frac{1 \cdot 5 \cdot 4}{3! 7!} (\varpi' \varrho^V - \varrho' \varpi^V) + \frac{2 \cdot 4 \cdot 2}{4! 6!} (\varpi'' \varrho^{IV} - \varrho'' \varpi^{IV}) \right\} \\ & + \frac{D^4}{9} \left\{ \frac{1 \cdot 6 \cdot 5}{3! 8!} (\varpi' \varrho^{VI} - \varrho' \varpi^{VI}) + \frac{2 \cdot 5 \cdot 3}{4! 7!} (\varpi'' \varrho^V - \varrho'' \varpi^V) \right. \\ & \quad \left. + \frac{3 \cdot 4 \cdot 1}{5! 6!} (\varpi'' \varrho^{IV} - \varrho'' \varpi^{IV}) \right\} \\ & + \dots \end{aligned}$$

wo allgemein der Coefficient von $\varpi^{(k)} \varrho^{(i)}$ D^{k+i-3} ist:

$$\frac{k \cdot i \cdot (i-k)}{k+i+2} \cdot \frac{1}{(k+2)!} \cdot \frac{1}{(i+2)!}.$$

Die drei Gleichungen:

$$S(\lambda D) = 0, \quad \xi(\lambda D) = 0, \quad \alpha(\lambda D) = 0,$$

welche dualistisch sich selbst, bzw. sich gegenseitig entsprechen, drücken durch ihr Zusammenbestehen nun nicht bloß die nothwendige, sondern auch die hinreichende Bedingung für das Auftreten eines Selbstberührungspunktes aus, nachdem die einzige uneigentliche Lösung, die den zu Grunde gelegten Gleichungen genügt, nämlich die Schnabelspitze ($D=0$, $\varpi=0$, $\varrho=0$) — sie wurde unter I. bereits berücksichtigt —, durch Ausscheidung der Lösungen $D=0$ beseitigt worden ist.

Die Resultante aus diesen Gleichungen ist aber, wie an einer anderen Stelle ausgeführt (vgl. d. vorstehende Note des Verf. über die Resultante) das vollständige Quadrat eines rationalen Ausdrucks in den Coefficienten a_i , b_i . Das Gewicht von S ist: $R+W-3$, das von $\xi: R$, das von $\alpha: W$, daher das Gewicht (N^2) des „Binodalfactors“ [N^2] (der Wurzel aus jener Resultante), dessen Verschwinden die Bedingung für einen Selbstberührungspunkt ausdrückt,

$$(N^2) = \frac{1}{2} R W (R + W - 3).$$

Der Ausdruck [N^2] tritt jedoch andererseits wieder als Factor der Discriminante Δ der Doppelpunktgleichung $\Lambda=0$ doppelt auf. Man kann dies geometrisch leicht einsehen; ich will es hier an dem Beispiel I. des § 4. durch Rechnung zeigen.

Wir betrachteten dort die Gleichungen für eine Curve, die durch Deformation aus einer solchen mit Selbstberührungspunkt hervorgegangen. Dieselben werden, wenn man der Einfachheit wegen $a_1 = -a$

und die ganze Function $P(\lambda)$ vom nullten, $Q(\lambda)$ vom 3. Grad annimmt:

$$x = \lambda^2 - a^2, \\ y = [(\lambda^2 - a^2)^2 + \varepsilon] (p + \lambda^2 r + \lambda^3 s).$$

Die Bedingung für das Auftreten des Selbstberührungspunktes ist $\varepsilon = 0$, und ε bis auf einen Zahlenfactor gleich jenem Factor $[N^2]$, wie eine Gewichtsabzählung lehrt. Andererseits fanden wir aber dort die Discriminante Δ der Doppelpunktsgleichung proportional mit ε^2 .

Da der Selbstberührungspunkt dualistisch sich selbst entspricht, so darf man, im Sinne der eingeführten Bezeichnungsweise:

$$[N^2] = [T^2]$$

setzen, wenn durch $[T^2]$ der Factor für das Zusammenfallen von zwei Doppeltangenten angedeutet wird.

III. Ein *Cuspibinodalpunkt* bildet sich, wenn die folgenden Gleichungen neben einander bestehen:

$$\xi(\lambda D) = 0, \quad \eta(\lambda D) = 0, \quad \varrho = 0.$$

Man kann die beiden ersten noch in der Dimension erniedrigen, indem man sie mit der dritten und gegenseitig combinirt. Man erhält so:

$$\varrho = 0, \\ \frac{1}{D} [\xi] \equiv \frac{1}{2!} \varrho' + \frac{D}{3!} \varrho'' + \dots + \frac{D^{r-1}}{(r+1)!} \varrho^{(r)} = 0, \\ [\eta] - [\xi] \cdot u - \frac{2}{3} \cdot \frac{\varpi}{D} [\xi] \equiv D^3 \cdot K;$$

wo K die folgende ganze Function ist:

$$K \equiv \frac{1}{4!} (3 \varrho' \varpi' + \frac{1}{3} \varrho'' \varpi) + \frac{D}{5!} (4 \varrho' \varpi'' + 6 \varrho'' \varpi' + \frac{2}{3} \varrho''' \varpi) \\ + \frac{D^2}{6!} (5 \varrho' \varpi''' + 10 \varrho'' \varpi'' + 10 \varrho''' \varpi' + \frac{3}{3} \varrho^{IV} \varpi) + \dots \\ + \frac{D^{R+W-2}}{R+W+2} \binom{R+W+1}{R} \varrho^{(R)} \varpi^{(W)}.$$

Durch diese Reductionen sind die dem Werth $D = 0$ entsprechenden uneigentlichen Lösungen beseitigt, so dass der Ausdruck, dessen Verschwinden die Bedingung für einen Cuspibinodalpunkt ausdrückt, der „Cuspibinodalfactor“ $[CN^2]$, durch die Resultante aus den drei Gleichungen*):

*) Ausser dieser verfügt man noch über zwei Gleichungen, die aus (p. 379):

$$\frac{\partial \xi(\lambda \lambda_1)}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial \eta(\lambda \lambda_1)}{\partial \lambda} = 0$$

$$\varphi = 0, \quad \frac{1}{D} [\xi] = 0, \quad K = 0$$

dargestellt wird. Das Gewicht derselben in den Coefficienten a_i, b_i ist:

$$(CN^2) = R(R-1)(R+W-2).$$

Das Werthepaar λ, λ_1 ist dabei — im Gegensatz zu dem Fall des Selbstberührungspunktes — eindeutig den beiden Zweigen der Singularität zugeordnet, indem λ bestimmt der Gleichung $\varphi = 0$ genügt, also dem Rückkehrpunkt (und somit λ_1 dem einfach schneidenden Zweig) zukommt. Man kann (CN^2) in die Form setzen:

$$(CN^2) = R \cdot R(R+W-1) - RW - 2R(R-1),$$

woraus hervorgeht, dass der Cuspibinodalfactor auch angesehen werden kann als die Resultante aus Λ und φ dividirt durch $[CJ]$ und das Quadrat von $[C^2]$.

Hieraus ergibt sich auch, dass in der oben (§ 4., II.) betrachteten penultimaten Form des Cuspibinodalfunktes die sehr kleine Grösse ε , deren Verschwinden das Auftreten der Singularität anzeigte, mit $[CN^2]$ direct proportional ist. Denn bildet man die Resultante von:

$$\varphi \equiv \frac{d}{d\lambda} (\lambda^2(\lambda - a) P(\lambda))$$

und

$$\Lambda \equiv (\lambda^2 - \varepsilon A) ((\lambda - a + \varepsilon)^2 - \varepsilon^3 B),$$

(wo A und B Functionen von a sind), so ist dieselbe offenbar mit ε proportional, während im Allgemeinen weder $[CJ]$ noch $[C^2]$ den Factor ε besitzt. Nun ist weiter die Discriminante von Λ (das Product der Discriminanten jener beiden Factoren mal dem Quadrat der Resultante derselben) mit $\varepsilon \cdot \varepsilon^3 = \varepsilon^4$ proportional; demnach besitzt die Discriminante der Doppelpunktgleichung $\Lambda = 0$ den Factor $[CN^2]$ vierfach.

Es mag hier noch darauf hingewiesen werden, dass ein wesentliches Unterscheidungsmerkmal dieser und der Singularität des Selbstberührungspunktes in dem Werthe des Quotienten $\frac{d\lambda_1}{d\lambda}$ gelegen ist, welcher im ersteren Falle eine mit ε verschwindende Grösse ist.

durch Einführung von λ_1, D_1 entstehen, wenn λ_1 die eine der obigen Variabeln,

$$D_1 = \lambda - \lambda_1 = -D$$

ist.

In der That liefern die bekannten Regeln:

$$\frac{\partial \xi(\lambda, \lambda_1)}{\partial \lambda} = \frac{\partial \xi(\lambda_1, D_1)}{\partial D_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \eta(\lambda, \lambda_1)}{\partial \lambda} = \frac{\partial \eta(\lambda_1, D_1)}{\partial D_1} = 0.$$

Die dem Cuspibinodalpunkt dualistisch entsprechende Singularität, welcher der Factor $[JT^2]$ der Doppeltangentengleichung zugehört, ist eine Wendetangente, die die Curve noch einmal berührt.

IV. Der *Trinodalpunkt* (dreifache Punkt). Die Bedingung für einen solchen ist die, dass die beiden Gleichungen*):

$$\xi(\lambda D) = 0, \quad H(\lambda D) = 0$$

zu einem Werth von λ zwei verschiedene Werthe der Differenz D liefern. Die „Ordnung dieser Bedingung“ (hier das Gewicht der Bedingungsgleichung) ist aber für zwei Gleichungen von bezw. den Dimensionen m und n (vgl. Salmon-Fiedler, Algebra, 2. Aufl., § 271., p. 371):

$$\frac{1}{2} mn(m-1)(n-1),$$

also hier, wo $m = R$, $n = R + W - 1$ ist:

$$\frac{1}{2} R(R-1)(R+W-1)(R+W-2).$$

Aber die obigen Gleichungen haben die besondere Eigenschaft, dass von den beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial \xi(\lambda D)}{\partial D} = 0, \quad \frac{\partial H(\lambda D)}{\partial D} = 0$$

die letztere eine Folge der ersteren ist, weil dies mit den Gleichungen:

$$\frac{\partial \xi(\lambda \lambda_1)}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial \eta(\lambda \lambda_1)}{\partial \lambda} = 0,$$

welche den eben angeführten äquivalent sind (siehe p. 385, Note), der Fall ist. Unter den angeführten Lösungen sind also noch diejenigen mit inbegriffen, für welche die zwei zu einem λ gehörigen Werthe von D einander gleich sind, für welche also die partiellen Differentialquotienten von ξ und H nach D neben ξ und H selbst verschwinden. Dies sind aber eben die Bedingungsgleichungen für einen Cuspibinodalpunkt (s. Nr. III.). Der Cuspidalfactor muss also in jenem Ausdruck mitenthalten sein. Ausserdem enthält derselbe den *Trinodalfactor* $[N^3]$, dessen Verschwinden das Auftreten eines dreifachen Punktes anzeigt; und zwar dreifach, weil zu jedem der drei Zweige eines dreifachen Punktes zwei verschiedene Werthe von D zugehören, die den beiden anderen Zweigen entsprechen, während $[CN^2]$ einfach auftritt, weil nur zu *einem* Zweige des Cuspibinodalpunktes zwei gleiche Werthe von D gehören (zu den beiden anderen Zweigen, sofern man überhaupt von solchen reden will, zwar zwei verschiedene

*) Statt der Gleichung $\eta(\lambda D) = 0$ wurde die reducirte $H(\lambda D) = 0$ (§ 5.) genommen, um die dem Werthe $D = 0$ entsprechenden Lösungen auszuschliessen.

Werthe D , von denen aber einer Null ist, welchen Fall wir ausgeschlossen haben).

Das Gewicht des Trinodalfactors ist also das folgende:

$$\begin{aligned}(N^3) &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} R(R-1)(R+W-1)(R+W-2) \right. \\ &\quad \left. - R(R-1)(R+W-2) \right\} \\ &= \frac{1}{6} R(R-1)(R+W-2)(R+W-3).\end{aligned}$$

Weil jedem dreifachen Punkt drei verschiedene Werthe von λ entsprechen, von denen wieder einem jeden zwei verschiedene Werthe von D entsprechen, so wird der Trinodalfactor sechsmal in der Discriminante von Λ auftreten, wie dies übrigens unmittelbar aus der Gestalt der variirten 6 Parameterwerthe der penultimaten Form (§ 4., III.) folgt.

Dualistisch entspricht dem Trinodalpunkt die „*Tritangente*“, welche die Curve in drei verschiedenen Punkten berührt, und zu der der Factor $[T^3]$ der Discriminante der Doppeltangentengleichung gehört.

V. *Zusammenstellung.* Den im Vorstehenden aufgezählten Singularitäten einer rational-ganzen Curve entsprechen gewisse in den Coefficienten von q und ϖ rationale Ausdrücke, deren Verschwinden das Auftreten der betreffenden Singularität nach sich zieht, und welche als mehrfache Factoren der Discriminante der Doppelpunktgleichung vorkommen. Nachdem aber diese Vielfachheit und das Gewicht der Factoren oben bestimmt worden, entsteht die Frage, ob das Product aller auch wirklich gerade gleich der Discriminante der Doppelpunktgleichung ist (abgesehen von einer Potenz der gewichtlosen Coefficienten a_0, b_0). Dies geschieht durch Vergleichung der Gewichtszahlen.

Die Letzteren wurden gefunden, wie folgt:

- $(\Delta) = R(R+W-1) \{ R(R+W-1) - 1 \}$, das Gewicht der Doppelpunktgleichung $\Lambda = 0$;
- $(CJ) = RW$, das Gewicht des Cuspiflexionsfactors (dem Auftreten einer Schnabelspitze entsprechend);
- $(C^2) = R(R-1)$, Gewicht des Bienspidalfactors,
- $(N^2) = \frac{1}{2} RW(R+W-3)$, Gewicht des Binodal- (Selbstberührungs-) factors;
- $(CN^2) = R(R-1)(R+W-2)$, Gewicht des Cuspibinodalfactors;
- $(N^3) = \frac{1}{6} R(R-1)(R+W-2)(R+W-3)$, Gewicht des Trinodalfactors (einem dreifachen Punkt entsprechend).

Man prüft nun leicht durch Einsetzen dieser Werthe die Richtigkeit der Identität:

$$(\Delta) = (CJ) + (C^2) + 2(N^2) + 4(CN^2) + 6(N^3).$$

Die Zahlencoefficienten entsprechen genau den oben bestimmten Vielfachheiten jeder betreffenden Factoren, und hiermit ist bewiesen, dass die Discriminante in der That in der gegebenen Weise in Factoren zerfällbar ist, d. h. es besteht (bis auf Potenzen von a_0 und b_0 und Zahlencoefficienten genau) zwischen den Factoren*) und der Discriminante die identische Gleichung:

$$\Delta = [CJ] \cdot [C^2] \cdot [N^2]^2 \cdot [CN^2]^4 \cdot [N^3]^6.$$

Ist T die Discriminante derjenigen Gleichung $M(\lambda) = 0$, welcher die Parameter der *Berührungspunkte der Doppeltangenten* einer rationalen Curve genügen, und bezüglich deren (analog der im § 5. über Λ gemachten Voraussetzung) angenommen wurde, dass sie $W(R+W+1)$ von einander verschiedene endliche Wurzeln besitzt, so ergibt sich ohne Weiteres aus der Formel für Δ die dualistische Identität:

$$T = [CJ] [J^2] \cdot [T^2]^2 \cdot [JT^2]^4 \cdot [T^3]^6,$$

in leicht verständlicher Bezeichnung, deren geometrische Bedeutung aus dem Vorstehenden zu entnehmen ist. Wir beschränken uns hier auf den Nachweis der aufgestellten Identitäten unter der Voraussetzung, dass die Doppelpunkts- und die Doppeltangentengleichung $\Lambda = 0$, $M = 0$ keine gleichen und keine unendlich grossen Wurzeln besitzen (d. h. dass, wie später bewiesen wird, $R+1$ und $W+1$ relative Primzahlen sind), weil die Aufhebung dieser Beschränkung, die nur durch eine subtilere Unterscheidung der möglichen Fälle erreichbar scheint, für die folgenden Untersuchungen nicht nöthig ist.

§ 7.

Der Realitätsindex einer höheren Singularität.

In dem Nächstfolgenden werden die *Coefficienten* der Gleichungen $\varrho = 0$, $\varpi = 0$ für die Rückkehr- und Wendepunkte einer rationalen Curve *reell angenommen*, die Wurzeln derselben also reell oder paarweise imaginär. Das Gleiche gilt dann von den Coefficienten und Wurzeln der Gleichungen $\Lambda = 0$, $M = 0$ für die Parameter der Doppunkte und Doppeltangenten. Die Discriminanten und Resultanten der genannten vier Gleichungen haben nach dem vorigen Paragraphen verschiedentlich Factoren mit einander gemeinsam. Dieser Umstand

*) Die Factoren selbst sind durch dieselben Symbole wie die entsprechenden Gewichtszahlen, nur mit eckiger Klammer umschlossen, dargestellt.

lässt auf einen Zusammenhang zwischen der Zahl der reellen bzw. conjugirt imaginären Wurzeln der vier Gleichungen schliessen, der im Folgenden nachgewiesen werden soll. Wenn einer der genannten Factoren verschwindet, so darf man die Parameterwerthe der Singularität als bekannt ansehen, da jene Factoren sich durch ein Eliminationsverfahren wirklich herstellen lassen, wobei denn, wenn die Resultante verschwindet, eine Berechnung der gleichwerdenden Wurzeln möglich wird. Wenn der Factor nicht ganz verschwindet, sondern nur sehr klein, $= \varepsilon$, wird, so denke man sich die Parameterwerthe der in die Singularität entfallenden Doppelpunkte u. s. w. nach steigenden Potenzen von ε entwickelt; das erste Glied der Reihe ist jene vielfache Wurzel; wie man die nächstfolgenden Glieder berechnet, wurde oben in den §§ 3. 4. gezeigt.

Wir werden an die dortige Darstellung der Singularitäten, die hier in Betracht kommen, anknüpfen, indem wir der Reihe nach die verschiedenen Factoren, deren Verschwinden das Zusammenfallen von Wurzeln einer oder mehrerer der Gleichungen für die vier elementaren Singularitäten:

$$\varrho = 0, \quad \varpi = 0, \quad \Lambda = 0, \quad M = 0$$

nach sich zieht, der Null nahe annehmen, und den Erfolg des Durchgangs durch Null an den Wurzeln dieser Gleichungen studiren. Was die Wurzeln der Gleichungen $\Lambda = 0$, $M = 0$ angeht, so ist, wie dies an der bezeichneten Stelle geschah, zwischen „zusammengehörigen“, d. h. demselben Doppelpunkt (derselben Doppeltangente) und nichtzusammengehörigen Parameterwerthen zu unterscheiden. Hat man ein Paar von conjugirt imaginären Wurzeln der letzteren Art, so existirt hierzu ein entsprechendes Paar, das den anderen Zweigen derselben beiden Doppelpunkte zugehört und ebenfalls conjugirt sein muss. Ein Zusammenhang zwischen der Anzahl der nicht zusammengehörigen Wurzeln der obigen vier Gleichungen kann indess nicht erwartet werden, weil durch Verschwinden des Cuspibinodalfactors, wie aus dem Beispiel II. des § 4. hervorgeht, reelle Wurzeln der Gleichung $\Lambda = 0$ in conjugirt imaginäre nicht zusammengehörige übergeführt werden können, ohne dass für die übrigen Gleichungen eine Veränderung in der Anzahl der reellen u. s. w. Wurzeln eintritt. Wir können uns also auf die Betrachtung der conjugirten zusammengehörigen Wurzelpaare beschränken. Die Bezeichnungen sind die schon früher (§ 6.) angewandten.

Was zunächst den Factor $[C^2]$ angeht, so wurde (§ 3., I.) gezeigt, dass mit dessen Verschwinden ein gleichzeitiger Uebergang von zwei reellen Rückkehrpunkten in conjugirt imaginäre und von einem reellen Paar zusammengehöriger Doppelpunktparameter in conjugirt imaginäre verbunden ist. Ist R die Zahl der reellen Wurzeln von $\varrho = 0$, W'

die von $\varpi = 0$, D' die der Paare von conjugirt imaginären zusammengehörigen Wurzeln von $\Lambda = 0$, T' die von $M = 0$, so ändern sich also beim Durchgang von $[C^2]$ durch Null die Zahlen W' , T' nicht, dagegen die Zahlen R' , D' , um bez. 2 und 1, während die Summe:

$$R' + 2D'$$

wieder ungeändert bleibt. Analog ändern sich beim Durchgang von $[J^2]$ durch Null die Grössen R' , D' und:

$$W' + 2T'$$

nicht.

Wenn der Cuspiflexionsfactor durch Null geht, so geht zugleich mit einem reellen zusammengehörigen Wurzelpaar von $\Lambda = 0$ ein ebensolches von $M = 0$ in ein conjugirtes über (§ 3., II.), so dass die Zahlen W' , R' und die Differenz:

$$D' - T'$$

ungeändert bleibt. Genau das Gleiche gilt von dem Verschwinden des Binodalfactors (§ 4., I.). Mit dem Verschwinden von $[CN^2]$ sowie mit dem von $[N^3]$ ist eine Aenderung der Zahlen $R' W' D' T'$ überhaupt nicht verbunden. Fasst man diese Ergebnisse zusammen, so hat man den Satz, dass die lineare Function:

$$J = R' - W' + 2(D' - T'),$$

wo R' , W' bez. die Zahl der reellen Wurzeln der Gleichungen $\varphi = 0$, $\varpi = 0$ für die Rückkehr- und Wendepunkte einer rational-ganzen Curve, D' , T' die Anzahl der conjugirt imaginären Wurzelpaare bez. der Doppelpunkts- und Doppeltangentengleichungen $\Lambda = 0$, $M = 0$ bedeutet, bei keinem der Durchgänge durch Null, welchen durch Coefficientenänderung die Discriminanten der Gleichungen $\varphi = 0$, $\varpi = 0$, $\Lambda = 0$, $M = 0$ nehmen können, ihren numerischen Werth ändert.

Was von der Gesamtheit R, W, D, T aller Wurzeln der Gleichungen $\varphi = 0$, $\varpi = 0$, etc. und deren Bestandtheilen R', W', D', T' ausgesagt wurde, gilt von jeder Gruppe von Wurzeln r, w, d, t dieser vier Gleichungen (und deren analogen Bestandtheilen r', w', d', t'), welche sich während gewisser Coefficientenänderungen innerhalb eines bestimmten Bereiches der imaginären Ebene bewegen und dort, ohne sich aus demselben zu entfernen, indem sie zusammenfallen, zwar einzeln die Zahlen r', w', d', t' ändern, nicht aber die Summe:

$$r' - w' + 2(d' - t').$$

Eine solche rational aus den übrigen sich ausscheidende Gruppe bilden nun diejenigen elementaren Singularitäten, welche aus einer höheren Singularität durch Ueberführung der Curve in eine penultimate Form entstehen *).

*) Man kann die rational-ganze Curve, welche Träger einer Singularität sein soll, immer so annehmen, dass für sie $R + 1$ und $W + 1$ relative Prim-

Wenn man aus den verschiedenen penultimaten Formen mit getrennten elementaren Singularitäten, die man, ohne Grad, Classe und Geschlecht zu ändern, aus einer rational-ganzen Curve mit höherer Singularität entstehen lassen kann (§§ 3., 4.), irgend zwei Curven herausgreift, so kann man sie immer durch successive Coefficienten-änderung derart in einander überführen, dass während des Uebergangs ein gleichzeitiges Verschwinden von zwei oder mehreren Factoren der Discriminanten jener vier Gleichungen vermieden wird. Denn eine höhere Singularität wie die, welche das Verschwinden jener Discriminanten hervorbringt, ist durch das Zusammenfallen von mindestens drei Wurzeln der Gleichungen $\varphi = 0$, $\varpi = 0$ bedingt, bringt also mindestens zwei verfügbare Parameter mit sich, welche man in dem angegebenen Sinne verwenden kann. Da nun aber die angegebene Zahl sich beim Durchgang durch irgend eine jener einfacheren Singularitäten nicht ändert, so bleibt sie für alle penultimaten Curvenformen die nämliche. Daraus folgt der Satz (dem wir die geometrisch anschauliche Fassung geben, welche der Bedeutung der reellen Wurzeln von $\varphi = 0$ etc., der „zusammengehörigen“ Wurzeln von $\Lambda = 0$, etc. entspricht):

Ist r' , w' , d' , t' die Anzahl bez. der reellen Rückkehr- und Wendepunkte, isolirten Doppelpunkte und Doppeltangenten, welche bei der Auflösung einer Singularität) entstehen, so hat für jede mögliche Art der Auflösung in die äquivalenten elementaren Singularitäten die Zahl:*

$$r' - w' + 2(d' - t')$$

denselben Werth.

Diese Zahl, die ich den „Realitätsindex“ der Singularität nenne, kann positiv, negativ oder Null sein und ist aus einer speciellen Auflösungsart zu ermitteln. Ich gedenke an einem anderen Ort zu beweisen, dass der Realitätsindex jeder unicursalen Singularität, in die im Ganzen r Rückkehr- und w Wendepunkte gerückt sind, unabhängig von der Zahl der in dieselbe entfallenden Doppelpunkte und Doppeltangenten ist und den Werth $r - w$ besitzt.

zahlen sind, was nach § 9. die obigen Betrachtungen (welche voraussetzen, dass der Grad der Gleichungen $\Lambda = 0$, $M = 0$ der höchstmögliche ist, § 5.) auf sie anwendbar macht.

*) Dass dieser Satz von dem Vorkommen der Singularität auf einer rational-ganzen Curve, an welcher er zunächst abgeleitet wurde, unabhängig ist, geht aus den Betrachtungen des § 4. (Zusatz 2.) hervor.

§ 8.

Bestimmung der Aequivalenzzahlen einer unicursalen Singularität.

Die vorstehende Discussion der Discriminante der Doppelpunkts- und Doppeltangentengleichung knüpft an die Voraussetzung an, dass die Gleichungen $\varphi = 0$, $\varpi = 0$ (von bezw. dem Grade R und W), von denen die Parameter der Rückkehr- und Wendepunkte abhängen, so beschaffen sind, dass in jenen Gleichungen keine gleichen oder unendlich grossen Wurzeln auftreten. Lässt man diese Voraussetzung fallen, so treten höhere Singularitäten auf, die oben (§ 3.) bezüglich der auf einem einzelnen Zweig auftretenden r Rückkehr- und w Wendepunkte untersucht worden sind. Indem wir, unter Aufhebung der dort gemachten Voraussetzung, dass φ bloß einer Potenz von λ proportional sei, der Parameterdarstellung der rational-ganzen Curve, des Trägers der betrachteten Singularität, beliebige ganze Functionen φ und ϖ zu Grunde legen, wenden wir uns in dem folgenden Abschnitt der Frage zu, wie viele gleiche Wurzeln der *Doppelpunkts-* und *Doppeltangentengleichung* durch die Annahmen über φ und ϖ bedingt sind, und vervollständigen so die Reihe der Aequivalenzzahlen der betrachteten Singularität durch Aufstellung der Anzahl d der Doppelpunkte und der Zahl t der Doppeltangenten, welche in die Singularität entfallen. Es wird sich zeigen, dass d und t nicht Functionen bloß von r und w sind, sondern dass noch die Kenntniss der Exponenten gewisser in den Ausdrücken φ und ϖ vorkommenden Potenzen von λ nöthig ist, welche in die „kritischen Exponenten“ von Smith (die „charakteristischen Zahlen“ von Halphen) übergehen, wenn sich φ auf eine Potenz von λ reducirt, die aber eine weitergehende Bedeutung für sich beanspruchen dürfen, weil sie gegenüber der Wendepunkts- und der Rückkehrpunktsgleichung d. h. gegenüber Punkt- und Linien-coordinaten das gleiche Verhalten zeigen. Unsere Darstellung ermöglicht zugleich eine geometrische Deutung der genannten Exponenten.

In dieser Betrachtung ist implicite eine Methode enthalten zur Bestimmung der Aequivalenzzahlen für unicursale Singularitäten einer durch Parameterdarstellung der Coordinaten gegebenen rationalen Curve, ohne dass man zuvor die Reihenentwicklung herzustellen nöthig hat. Näheres über dieses Verfahren ist in § 9. enthalten, wo zugleich eine Anwendung auf die Untersuchung der im Unendlichen gelegenen Singularität einer rational-ganzen Curve gemacht wird. Es ergibt sich hieraus die Graderniedrigung, welche die Gleichungen für die Parameter der Doppelpunkte und Doppeltangenten (§ 5.) erfahren, wenn $R + 1$ und $W + 1$ einen gemeinsamen Theiler haben.

Endlich bestimmt man im Folgenden (§ 10.) noch die Zahl der durch Vereinigung *mehrerer* Zweige zu einer höheren Singularität zu-

sammenrückenden Doppelpunkte und Doppeltangenten, wobei wiederum „kritische Exponenten“ auftreten, von denen das oben für einen einzelnen Zweig Gesagte zu wiederholen wäre. Man kann sich hierbei auf das Vorkommen im Endlichen beschränken, da eine rational-ganze Curve, wie sich ergeben wird, im Unendlichen nur eine *unicursale* Singularität besitzt.

Wenn in $\lambda = 0$ w Wende- und r Rückkehrpunkte zusammenfallen, so haben die Gleichungen für diese Singularität die Form:

$$\varphi \equiv A_0 \lambda^r + A_1 \lambda^{r_1} + \dots,$$

$$\varpi \equiv B_0 \lambda^w + B_1 \lambda^{w_1} + \dots,$$

wo:

$$r < r_1 < r_2 \dots,$$

$$w < w_1 < w_2 \dots$$

ganze positive Zahlen sind, von der Beschaffenheit, dass die Zahlen $r + 1, r_1 + 1, \dots, w + 1, w_1 + 1 \dots$ nicht alle denselben Divisor haben, und die A_i, B_i alle als von Null verschieden angenommen werden. Dann sind die Ausdrücke für die Coordinaten der zugehörigen rational-ganzen Curve:

$$x = \frac{A_0}{r+1} \lambda^{r+1} + \frac{A_1}{r_1+1} \lambda^{r_1+1} + \dots = \sum \frac{A_p}{r_p+1} \lambda^{r_p+1},$$

$$y = \int_0^\lambda \left(\frac{B_0}{w+1} \lambda^{w+1} + \frac{B_1}{w_1+1} \lambda^{w_1+1} + \dots \right) (A_0 \lambda^r + A_1 \lambda^{r_1} + \dots) d\lambda$$

$$= \sum \sum \frac{A_p B_q \lambda^{r_p+w_q+2}}{(w_q+1)(r_p+w_q+2)}.$$

Die Anzahl d der in $\lambda = 0$ entfallenden Doppelpunkte bestimmt sich aus den Wurzeln Null der Resultante von:

$$\xi \equiv \frac{x(\lambda_1) - x(\lambda)}{\lambda_1 - \lambda} \equiv \sum \frac{A_p}{r_p+1} (\lambda_1^{r_p} + \lambda_1^{r_p-1} \lambda + \dots + \lambda^{r_p}) = 0,$$

$$\eta \equiv \frac{y(\lambda_1) - y(\lambda)}{\lambda_1 - \lambda}$$

$$\equiv \sum \sum \frac{A_p B_q}{(w_q+1)(r_p+w_q+2)} (\lambda_1^{r_p+w_q+1} + \lambda_1^{r_p+w_q} \lambda + \dots + \lambda^{r_p+w_q+1}) = 0,$$

vermöge deren übrigens jedem Werthe $\lambda = 0$ ein Werth $\lambda_1 = 0$ entspricht, wenn nicht x und y ausser λ noch andere lineare Factoren gemeinsam haben, was der Voraussetzung einer unicursalen Singularität widersprechen würde. Sind die Exponenten $r + 1$ und $r + w + 2$, also die Zahlen $r + 1$ und $w + 1$, welche den niedrigsten Potenzen entsprechen, relativ prim, so enthält die Resultante den Factor λ in

der Potenz $r(r+w+1)$, deren Hälfte dann gleich $d+r$ ist (§ 1.). Haben aber $(w+1)$ und $(r+1)$ die Zahl M zum grössten gemeinsamen Theiler, so erhält die Resultante von ξ und η eine höhere Potenz von λ zum Factor. Denn die Glieder niedrigster Dimension in λ_1 und λ dieser beiden Ausdrücke haben dann $M-1$ Factoren von der Form $\lambda_1 = \alpha\lambda$, wo α eine M^{te} Einheitswurzel ist, gemeinsam. Ist M Theiler nicht nur von $r+1$ und $w+1$, sondern auch von r_1+1 , $r_2+1, \dots, r_{m-1}+1$; $w_1+1, w_2+1, \dots, w_{\mu-1}+1$, während erst r_m+1 und $w_\mu+1$ ihn nicht besitzen und, wie wir vorerst annehmen wollen, gegen M relativ prim sind, so ist das Glied niedrigster Dimension in ξ , welches für $\lambda_1 = \alpha\lambda$ nicht verschwindet:

$$\frac{A_m}{r_m+1} (\lambda_1^{r_m} + \dots + \lambda^{r_m}).$$

Das entsprechende Glied von η ist, wenn:

$$\text{I) } r_m - r < w_\mu - w : \frac{A_m B_0}{(w+1)(r_m+w+2)} (\lambda_1^{r_m+w+1} + \dots + \lambda^{r_m+w+1});$$

oder, wenn:

$$\text{II) } r_m - r > w_\mu - w : \frac{A_0 B_\mu}{(w_\mu+1)(r+w_\mu+2)} (\lambda_1^{r+w_\mu+1} + \dots + \lambda^{r+w_\mu+1}),$$

während im Falle $r_m - r = w_\mu - w$ das entsprechende Glied aus der Summe der unter I) und II) angeführten besteht.

Es handelt sich nur darum, in der Resultante, die sich, abgesehen von einem constanten Factor, als das Product aller Differenzen der in Function von λ ausdrückbaren Wurzeln λ_1 der Gleichungen $\xi = 0$, $\eta = 0$ darstellen lässt, diese Wurzeln durch Reihenentwicklungen nach ganzen Potenzen von λ auszudrücken. Von diesen werden r , bzw. $r+w+1$ kein constantes Glied besitzen, sondern gleich mit der ersten Potenz von λ beginnen. Wenn aber $M-1$ Einheitswurzeln in den Gliedern niedrigster Dimension von ξ und η , also die ersten Glieder von $M-1$ Entwicklungen übereinstimmen, so beginnt die Differenz der Entwicklungen statt mit der ersten mit einer höheren Potenz von λ , die man in folgender Weise ermittelt.

Setzt man in $\xi = 0$:

$$\lambda_1 = \alpha\lambda + \beta\lambda^{\pi+1} + \dots,$$

so hat man zur Bestimmung von π und β die Gleichung:

$$\sum \frac{A_p}{r_p+1} \{(\alpha + \beta\lambda^\pi)^{r_p} + (\alpha + \beta\lambda^\pi)^{r_{p-1}} + \dots + (\alpha + \beta\lambda^\pi) + 1\} \lambda^{r_p} = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$[r_p] = \alpha^{r_p} + \alpha^{r_{p-1}} + \dots + \alpha + 1$$

und:

$$[r_p]' = \frac{d[r_p]}{d\alpha},$$

so erhält man:

$$\sum \frac{A_p}{r_p+1} [r_p] \lambda^{r_p} + \beta \lambda^\pi \cdot \sum \frac{A_p}{r_p+1} [r_p]' \lambda^{r_p} + \dots = 0.$$

Für sehr kleine Werthe von λ reducirt sich diese Gleichung auf die Glieder niedrigster Ordnung, und man erhält mit Rücksicht darauf, dass:

$$[r] = [r_1] = [r_2] = \dots = [r_{m-1}] = 0,$$

$$\frac{A_m}{r_m+1} [r_m] \lambda^{r_m} + \beta \lambda^{\pi+r} \cdot \frac{A_0}{r+1} [r]' = 0,$$

woraus sich:

$$\pi = r_m - r,$$

$$\beta = - \frac{A_m}{A_0} \frac{[r_m]}{[r]'} \frac{r+1}{r_m+1} = - \frac{A_m}{A_0} \frac{[r_m]}{r_m+1} \alpha(\alpha-1)$$

bestimmt, wegen:

$$[r]' = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\alpha^{r+1}-1}{\alpha-1} \right) = \frac{r+1}{\alpha(\alpha-1)}.$$

Die Entwicklung von λ_1 aus der Gleichung $\xi = 0$ (wir wollen sie mit $\lambda_1^{(5)}$ bezeichnen) beginnt daher wie folgt:

$$\lambda_1^{(5)} = \alpha \lambda \left\{ 1 - \frac{A_m}{A_0} \frac{[r_m]}{r_m+1} (\alpha-1) \lambda^{r_m-r} + \dots \right\}.$$

Ebenso erhält man aus der Gleichung $\eta = 0$ den Fällen I) und II) entsprechend:

$$\text{I)} \quad \lambda_1^{(\eta)} = \alpha \lambda \left\{ 1 - \frac{A_m}{A_0} \frac{[r_m+w+1]}{r_m+w+2} (\alpha-1) \lambda^{r_m-r} + \dots \right\},$$

$$\text{II)} \quad \lambda_1^{(\eta)} = \alpha \lambda \left\{ 1 - \frac{B_\mu}{B_0} \frac{[r+w_\mu+1]}{r+w_\mu+2} \cdot \frac{w+1}{w_\mu+1} (\alpha-1) \lambda^{w_\mu-w} + \dots \right\},$$

wo noch wegen der Voraussetzung über α :

$$[r_m+w+1] = [r_m] \alpha^{w+1} + [w] = [r_m],$$

und:

$$[r+w_\mu+1] = [w_\mu]$$

gesetzt werden darf. Im Falle III), wo $r_m - r = w_\mu - w$ ist, besteht das zweite Glied aus der Summe der den Fällen I), II) entsprechenden zweiten Glieder.

Die Entwicklung der Differenz $\lambda_1^{(\eta)} - \lambda_1^{(5)}$ beginnt also, entsprechend den drei Fällen I), II), III) mit folgenden Gliedern:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I)} \quad \lambda_1^{(\eta)} - \lambda_1^{(\xi)} = \frac{A_m}{A_0} \frac{[r_m]}{r_m + 1} \cdot \frac{w + 1}{r_m + w + 2} \alpha (\alpha - 1) \lambda^{r_m - r + 1} + \dots, \\ \text{II)} \quad \lambda_1^{(\eta)} - \lambda_1^{(\xi)} = - \frac{B_\mu}{B_0} \frac{[w_\mu]}{w_\mu + 1} \cdot \frac{w + 1}{r + w_\mu + 2} \alpha (\alpha - 1) \lambda^{w_\mu - w + 1} + \dots, \\ \text{III)} \quad \lambda_1^{(\eta)} - \lambda_1^{(\xi)} = \left[\frac{A_m}{A_0} \cdot \frac{1}{r_m + 1} - \frac{B_\mu}{B_0} \cdot \frac{1}{w_\mu + 1} \right] \frac{[r_m]}{r_m + w + 2} \\ \quad \cdot (w + 1) \alpha (\alpha - 1) \lambda^{r_m - r + 1} + \dots \end{array} \right.$$

Solcher Wurzeln α , wie sie in diese Gleichungen eingehen, giebt es $M - 1$; dadurch erhöht sich aber die Potenz von λ , welche als Factor der Resultante auftritt, und also die doppelte Summe der dem Werth $\lambda = 0$ entsprechenden d Doppel- und r Rückkehrpunkte auf:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I)} \\ \text{III)} \end{array} \right\} \text{ wo } r_m - r \leq w_\mu - w : 2d + 2r = r(r + w + 1) + (M - 1)(r_m - r);$$

$$\text{II)} \quad \text{ wo } r_m - r > w_\mu - w : 2d + 2r = r(r + w + 1) + (M - 1)(w_\mu - w).$$

Die den Fällen I), II) entsprechenden Formeln (1) für die Differenzen verlieren, da die Coefficienten A_m, B_μ nach der gemachten Annahme von Null verschieden sind, ihre Giltigkeit nur für solche Wurzeln α , für welche $[r_m] = 0$ ist, d. h. welche zugleich r_m te Wurzeln der Einheit sind. Heben wir nämlich die oben gemachte Voraussetzung bezüglich der Zahlen $r_m + 1$ und M auf, und nehmen an, dass dieselben einen gemeinsamen Theiler N haben, welcher dann noch einigen auf r_m bez. w_μ folgenden Exponenten $r_{m+1} + 1, w_{\mu+1} + 1, \dots$, bis $r_{n-1} + 1$ bez. $w_{\nu-1} + 1$, nicht aber $r_n + 1$ und $w_\nu + 1$ zukommen möge, so wiederholen sich die obigen Schlüsse, indem nur M mit N und die Indices m, μ mit n, ν zu vertauschen sind. Haben dann weiter $r_n + 1$ und N noch einen Factor P gemeinsam, der den folgenden Exponenten bis $r_{p-1} + 1$, bez. $w_{\pi-1} + 1$ zukommt, u. s. w., so kann man die Bestimmungsgleichungen für $d + r$, die den Fällen I), II) und III) entsprechen, in einer Formel von folgender Gestalt vereinigen:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2d + 2r = r(r + w + 1) + \vartheta, \\ \text{wo} \quad \vartheta = (M - N) \left\{ \frac{r_m - r}{w_\mu - w} + (N - P) \left\{ \frac{r_n - r}{w_\nu - w} \right. \right. \\ \quad \left. \left. + (P - Q) \left\{ \frac{r_p - r}{w_\pi - w} + \dots + (S - 1) \left\{ \frac{r_s - r}{w_\sigma - w} \right. \right. \right. \right. \end{array} \right.$$

und wo als Factor von $(M - N)$, bezw. $(N - P), \dots$, je die *kleinere* von den beiden Differenzen $r_m - r, w_\mu - w$ bez. $r_n - r, w_\nu - w$, u. s. w. zu wählen ist.

Die Zahlen $M, N, P, \dots$, schliessen mit 1 ab. Hätten nämlich alle Zahlen $w_k + 1$ und $r_i + 1$, den letzten in ϖ bez. ϱ auftretenden

Exponenten (vermehrt um Eins) eingerechnet, einen gemeinsamen Theiler $T > 1$, so könnte man x und y in λ^T rational ausdrücken, und zwischen Curvenpunkt und Parameter fände kein eindeutiges Entsprechen statt, was (§ 1.) vorausgesetzt wird. Die in obiger Formel untereinander geschriebenen Zahlen, z. B. $r_m - r$ und $w_\mu - w$, können einander gleich werden. Wenn dann noch der oben in (1) III) angegebene Coefficient von λ^{r_m-r+1} Null ist, so tritt in dieser Formel eine höhere Potenz an Stelle des ersten Gliedes, welche aufzusuchen und deren Exponent, um 1 vermindert, alsdann in ϑ an die Stelle der Zahlen $r_m - r$, $w_\mu - w$ zu setzen ist. Ein solches Glied muss immer existiren, weil die Entwicklungen, die sich aus $\xi = 0$ und $\eta = 0$ ergeben, nicht völlig übereinstimmen können, wenn nicht beide Gleichungen einen gemeinsamen Factor besitzen sollen, der für unendlich viele Werthsysteme λ, λ_1 verschwinden würde, was wieder darauf schliessen liesse, dass die Ausdrücke für x und y nicht in der einfachsten Form sind. — Die folgenden Glieder obiger Formel bleiben ungeändert, wenn für sie nicht der gleiche Fall eintritt.

Der Formel (2) entsprechend lässt sich eine andere aufstellen für die Anzahl der Doppeltangenten und Wendepunkte, die in die singuläre Tangente $\lambda = 0$ unseres Punktes hereinrücken. Aus dem Princip der Dualität, das schon öfter angewendet wurde, ergiebt sich für sie unmittelbar der Ausdruck:

$$2t + 2w = w(w + r + 1) + \vartheta,$$

wo ϑ *genau denselben Ausdruck wie oben darstellt*, und eventuell die gleiche Modification zu erfahren hat, wie der obige.

Für die betrachtete rational-ganze Curve erhält man also, wenn mit d die Anzahl der in $\lambda = 0$ entfallenden Doppelpunkte, mit t die der Doppeltangenten bezeichnet wird:

$$d = \frac{1}{2} r(r + w - 1) + \frac{\vartheta}{2},$$

$$t = \frac{1}{2} w(r + w - 1) + \frac{\vartheta}{2},$$

wo ϑ die oben angegebene Bedeutung hat.

Bildet man die Differenz, so kommt die Relation:

$$d - t = \frac{1}{2} (r - w) (r + w - 1),$$

welche Herr H. J. S. Smith aus der Reihenentwicklung von y nach gebrochenen Potenzen von x entwickelt hat. Dies entspricht den Annahmen $A_1 = A_2 = \dots = 0$ und $r_m = r_n = \dots = 0$, in Folge deren in dem mehrdeutigen Ausdrucke ϑ je die oberen Glieder wegfallen. Die Bezeichnung „kritische Exponenten“, welche Herr Smith den Zahlen $w_\mu, w_\nu, \dots$, beilegt, verdienen in der obigen Darstellung je

die kleineren der Zahlen $r_m, w_\mu; r_n, w_\nu$; etc. Für diese Zahlen, oder vielmehr für die Differenzen $r_m - r$ (bez. $w_\mu - w$), $r_n - r$ (bez. $w_\nu - w$) finde ich folgende geometrische Deutung.

Fasst man die Gleichungen $\xi(\lambda, \lambda_1) = 0$, $\eta(\lambda, \lambda_1) = 0$ selbst als Curvengleichungen mit den Coordinaten λ, λ_1 auf, so besitzen beide Curven in $\lambda = \lambda_1 = 0$ einen vielfachen Punkt je mit getrennten Tangenten, die jedoch für beide theilweise oder alle dieselben sein können. Ist M (der gemeinsame Theiler von $r+1, \dots, w+1, \dots$) eine ungerade Zahl, so haben $M-1$ Zweige je dieselbe Tangente. Längs dieser findet eine Berührung der Curven statt, vermöge deren eine gewisse Anzahl von Schnittpunkten auf sie entfallen, welche Doppelpunkten entsprechen, die in die Singularität der ursprünglichen Curve hereingerückt sind. Die Zahl der Letzteren ist indess nur halb so gross als die jener Schnittpunkte, weil jeder Tangente sich eine andere zuordnet, die dem reciproken Werth des Verhältnisses $\frac{\lambda_1}{\lambda}$ entspricht. Es entfallen so auf $M-N$ Zweige je $r_m - r$ (bez. $w_\mu - w$) Schnittpunkte, welche:

$$\frac{1}{2} (M-N) \left\{ \begin{matrix} r_m - r \\ w_\mu - w \end{matrix} \right.$$

Doppelpunkten entsprechen, für die das Verhältniss der Parameter eine M^{te} Wurzel der Einheit ist, aber nicht zugleich eine N^{te} , auf $N-P$ Zweige fallen ferner je $r_n - r$ (bez. $w_\nu - w$), denen:

$$\frac{1}{2} (N-P) \left\{ \begin{matrix} r_n - r \\ w_\nu - w \end{matrix} \right.$$

Doppelpunkte entsprechen u. s. w. Reell ist von diesen Doppelpunkten keiner, weil, abgesehen von 1 selbst, eine M^{te} Wurzel der Einheit, wenn M ungerade, einen complexen Werth hat.

Anders verhält es sich, wenn M gerade ist. Alsdann tritt zu den Einheitswurzeln der erwähnten Art noch die in gewisser Hinsicht ausgezeichnete $\alpha = -1$ hinzu, die sich selbst reciprok ist und also keiner anderen paarweise sich zuordnet. Ist dann in der Reihenfolge der Zahlen $M, N, \dots, Q, R, S, \dots$ etwa R die erste ungerade Zahl, so ist r_q (bez. w_π) eine gerade Zahl, (weil $r_q + 1$ ungerade) und es rücken in den Punkt $\lambda_1 = \lambda = 0$ auf *imaginären* Zweigen $M-N, N-P, \dots, Q-R-1, R-S, \dots$ Punkte herein, welchen im Ganzen halbsoviel, also:

$$\frac{1}{2} \vartheta - \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} r_q - r \\ w_\pi - w \end{matrix} \right.$$

imaginäre Doppelpunkte entsprechen; die übrigen

$$r(r+w-1) + \begin{cases} r_q - r \\ w_x - w \end{cases}$$

Schnittpunkte theilen sich in solche, welche durch den Schnitt verschiedener Zweige entstehen, es sind:

$$r(r+w-1) - (M-1);$$

$M-1$ weitere liegen je auf einem der $M-1$ sich berührenden Zweige, von denen einer der reelle ist. Auf diesen fallen alle übrigen, also im Ganzen $(r_q - r + 1)$ (bez. $w_x - w + 1$) Schnittpunkte. Die ihm entsprechenden Doppelpunkte können nur entweder reell oder isolirt sein, je nachdem λ, λ_1 reelle oder rein imaginäre Grössen sind.

§ 9.

Bestimmung der Aequivalenzzahlen aus der Parameterdarstellung.

Nachdem im Vorstehenden gezeigt worden, dass sich für jede unicursale Singularität einer rational-ganzen Curve auch ohne vorgängige Aufstellung der Reihenentwicklung von y nach Potenzen von x gewisse kritische Exponenten finden lassen, von denen die Zahlen d und t der in die Singularität entfallenen Doppelpunkte und Doppeltangenten abhängen, wirft sich nun die Frage auf, ob diese Exponenten mit denen übereinstimmen, welche man aus der Reihenentwicklung von y nach Potenzen von x erhalten würde.

Ich will allgemeiner die kritischen Exponenten derjenigen Reihenentwicklung bestimmen, welche man erhält, wenn man aus der Darstellung *beider* Coordinaten durch eine nach ganzen Potenzen eines Parameters λ aufsteigende Reihe:

$$(1) \quad \begin{cases} x = \lambda^p + a_1 \lambda^{p_1} + \dots + a_m \lambda^{p_m} + \dots, \\ y = \lambda^q + b_1 \lambda^{q_1} + \dots + b_\mu \lambda^{q_\mu} + \dots \end{cases}$$

die Grösse λ eliminirt. Seien in diesen Gleichungen die Zahlen p_m, q_μ in der Reihe der $p, p_1, \dots$, bez. $q, q_1, \dots$ ($q > p$) die ersten, welche den grössten gemeinsamen Theiler M , den p und q haben, nicht mehr besitzen. Setzt man dann die Reihe für x gleich x^p , und zieht die p^{te} Wurzel, so wird in der Entwicklung:

$$\begin{aligned} x &= \lambda (1 + a_1 \lambda^{p_1-p} + \dots + a_m \lambda^{p_m-p})^{\frac{1}{p}} \\ &= \lambda \left(1 + \frac{a_1}{p} \lambda^{p_1-p} + \dots + \frac{a_m}{p} \lambda^{p_m-p} + \dots \right) \end{aligned}$$

der niedrigste Exponent, welcher den Factor M nicht mehr besitzt, $p_m - p$ sein. Kehrt man nun diese Entwicklung um und stellt λ durch eine Reihe nach Potenzen von x dar, so wird in:

Hier ist:

$$\begin{aligned} \vartheta = (M - N) \left\{ \frac{p_m - p}{q_\mu - q} + (N - P) \left\{ \frac{p_n - p}{q_v - q} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + (S - 1) \left\{ \frac{p_s - p}{q_\sigma - q} \right. \right. \right. \end{aligned}$$

(wo je die kleinere der untereinanderstehenden Differenzen zu nehmen ist), M bedeutet den gemeinsamen Theiler der Zahlen: $p, p_1, \dots, q, q_1, \dots$; ferner p_m, q_μ die ersten Zahlen dieser Reihen, die diesen Theiler nicht, dagegen mit M den grössten Theiler N gemeinsam haben, u. s. w. Der Ausdruck ϑ erfährt nur dann eine Modification, wenn irgend zwei der untereinanderstehenden Differenzen gleich sind und dazu noch die entsprechende, der obigen (3) analoge, Coefficientenrelation erfüllt ist, wo man dann statt der betreffenden Differenzen den nächsthöheren Exponenten der Entwicklung zu setzen hat, dessen Coefficient von Null verschieden ist.

Die Formel für ϑ geht für rational-ganze Curven in die früher für diese entwickelte über. In der That ist z. B. $p_m - p$ in der Bezeichnung des § 8. gleich $r_m - r$, und $q_\mu - q$ gleich der kleineren der Zahlen $r_m - r$ und $w_\mu - w$, u. s. w.

Dieselben kritischen Exponenten, welche die Reihenentwicklung liefern würde, können hiernach direct aus den Entwicklungen (1) der beiden Coordinaten einer Curve nach Potenzen eines Parameters λ in der Nähe des Punktes $\lambda = 0$ entnommen werden. Sind x und y durch Quotienten von Potenzentwicklungen dargestellt, so bringe man diese durch Ausführung der Division auf die angegebene Form. Ich will hier nicht darauf eingehen zu zeigen, dass man auch diese Division umgehen kann, sondern wende mich zu einer Anwendung des vorstehenden Verfahrens auf die Untersuchung rational-ganzer Curven in ihrem *unendlich weiten* Punkt. Hat man eine solche Curve durch Gleichungen von der Form gegeben:

$$\begin{aligned} x &= \lambda^P + A_1 \lambda^{P_1} + \dots, \\ y &= \lambda^Q + B_1 \lambda^{Q_1} + \dots, \end{aligned}$$

wo

$$Q > P \quad \text{und} \quad P > P_1 > \dots; \quad Q > Q_1 > \dots$$

vorausgesetzt wird, und macht man diese Gleichungen homogen durch Einführung von $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \frac{\lambda}{\mu}$ an Stelle von bez. x, y, λ , so erhält man, wenn man noch $\lambda = 1$ setzt:

$$\begin{aligned} \frac{z}{x} &= \frac{\mu^P}{1 + A_1 \mu^{P-P_1} + \dots}, \\ \frac{y}{x} &= \frac{\mu^Q}{1 + B_1 \mu^{Q-Q_1} + \dots}. \end{aligned}$$

In der Nähe des Parameterwerthes $\mu = 0$, der dem unendlich fernen Punkt der zu untersuchenden Curve entspricht, kann man diese Gleichungen durch folgende ersetzen:

$$\frac{z}{x} = \mu^P (1 - A_1 \mu^{P-P_1} - \dots),$$

$$\frac{z}{y} = \mu^Q (1 - B_1 \mu^{Q-Q_1} - \dots),$$

auf welche sogleich die vorstehenden Formeln Anwendung finden. Man erhält so die Aequivalenzzahlen $d_\infty, t_\infty, w_\infty, r_\infty$, welche der im Unendlichen gelegenen unicursalen Singularität entsprechen. Besitzen die Zahlen P, Q , und also (in den Bezeichnungen der §§ 1. und 5.) $R + 1$ und $W + 1$ einen gemeinsamen Theiler, so wird der für die Gleichungen $\Lambda = 0, M = 0$ in § 5. aufgestellte Grad eine Erniedrigung auf Kosten der ins Unendliche gerückten Lösungen erfahren. Die Grösse derselben wird durch die Zahl Θ , die zu der im Unendlichen gelegenen Singularität gehört, angezeigt. Man findet für $r_\infty, w_\infty, d_\infty, t_\infty$ genau die Ausdrücke (4), nach Vertauschung nur der $p_i q_i \vartheta$ mit $P_i Q_i \Theta$. Die Theiler $M, N, \dots, S$ verhalten sich gegenüber den Zahlen $P, Q, \dots$ ebenso, wie die dortigen $M, N, \dots, S$ gegenüber den $p, q, \dots$.

§ 10.

Die Aequivalenzzahlen einer zusammengesetzten Singularität.

In § 4. wurde gezeigt, dass man immer die Gleichung einer rational-ganzen Curve mit einer aus mehreren Zweigen bestehenden Singularität angeben kann, deren Reihenentwicklungen in beliebig vielen Gliedern mit denen einer vorliegenden übereinstimmen. Man kann so die Bestimmung der Aequivalenzzahlen einer zusammengesetzten Singularität an derjenigen rational-ganzen Curve vornehmen, die durch die Gleichungen (2) des § 4. dargestellt ist. Der Beitrag, der den Zahlen r und w aus einer solchen erwächst, besteht aus der Summe dieser Zahlen für die einzelnen Zweige, wie man erkennt, wenn man für jene Gleichungen die Ausdrücke ϱ und ϖ bildet. Anders ist es mit den Zahlen d und t , zu welchen ausser den entsprechenden für die einzelnen Zweige noch die Werthepaare $\lambda = a, \lambda_1 = b; \lambda = a, \lambda_1 = c$; etc., welche ebenfalls die Gleichungen $\xi(\lambda \lambda_1) = 0, \eta(\lambda \lambda_1) = 0$ befriedigen, beitragen. Um die Zahl der Letzteren zu finden, sind die diese Zweige darstellenden Curven paarweise auf ihre Schnittpunkte zu untersuchen, weil vermöge der a. a. O. vorgenommenen Coefficientenbestimmung die Ausdrücke $x(\lambda), y(\lambda)$ sich in der Nähe z. B. von $\lambda = a$ auf die dem zugehörigen Zweig entsprechende Entwicklung reduciren. Es genügt, die Schnittpunkte irgend zweier, etwa der den

Parameterwerthen $\lambda = a$, $\lambda_1 = b$ zugehörigen Zweige zu suchen, wo man noch $\lambda = a$ durch λ , $\lambda_1 = b$ durch λ_1 ersetzen kann. Den betrachteten Zweigen können wir also je die Parameterdarstellung einer allgemeinen rational-ganzen Curve zu Grunde legen, und setzen für den ersten Zweig:

$$\varrho = A_0 \lambda^r + A_1 \lambda^{r_1} + \dots,$$

$$\varpi = B_0 \lambda^w + B_1 \lambda^{w_1} + \dots,$$

(wo r und w auch Null sein können). Dann werden die Coordinaten (§ 8.):

$$x = \sum A_p \lambda^{x_p};$$

$$y = \sum \sum \frac{x_p}{x_p + \iota_q} A_p B_q \lambda^{x_p + \iota_q} = \sum \sum x_p C_{pq} \lambda^{x_p + \iota_q},$$

wo zur Abkürzung:

$$r_p + 1 = x_p; \quad A_p(r_p + 1) = A_p,$$

$$w_q + 1 = \iota_q; \quad B_q(w_q + 1) = B_q,$$

$$\frac{A_p B_q}{x_p + \iota_q} = C_{pq},$$

gesetzt wurde. Die Gleichungen für den anderen Zweig seien analog, mit einem oberen Strich an den Buchstaben, gebildet, wobei noch λ mit λ_1 zu vertauschen ist. Man hat dann die Werthe-paare λ , λ_1 zu bestimmen, welche den Gleichungen:

$$y - y' = 0 = \sum \sum (x_p C_{pq} \lambda^{x_p + \iota_q} - x'_p C'_{p'q} \lambda_1^{x'_p + \iota'_q}),$$

$$x - x' = 0 = \sum (A_p \lambda^{x_p} - A'_p \lambda_1^{x'_p}),$$

genügen. Die Zahl derselben ist im Allgemeinen gleich der kleineren der beiden Zahlen:

$$x'(x + \iota) = (r' + 1)(r + w + 2),$$

und:

$$x(x' + \iota') = (r + 1)(r' + w' + 2),$$

wie man erkennt, wenn man obige Summen durch ihre ersten Glieder ersetzt und λ_1 eliminirt. Aber in besonderen Fällen kann diese Zahl grösser werden. Setzt man:

$$A_0 = A'_0,$$

was immer durch Multiplication von λ_1 mit einer Constanten ermöglicht werden kann, und sucht das grösste gemeinsame Vielfache R von x und ι , so dass:

$$R = \varrho x = \varrho' x',$$

wo ϱ und ϱ' ganze Zahlen, so kann man in die obigen Gleichungen:

$$\lambda = \xi^e; \quad \lambda_1 = \xi_1^{e'};$$

eingeführen, wodurch sie die Form erhalten:

$$\sum \sum (\kappa_p C_{pq} \xi^{e_{\kappa p} + e_{\iota q}} - \kappa'_p C'_{pq} \xi_1^{e'_{\kappa p} + e'_{\iota q}}) = 0,$$

$$\sum (A_p \xi^{e_{\kappa p}} - A'_p \xi_1^{e'_{\kappa p}}) = 0.$$

Die Glieder niederster Dimension der letzten Gleichung enthalten sowohl ξ wie ξ_1 , die der ersten ebenfalls, wenn:

$$q\iota = q'\iota'$$

ist. Alsdann wird die nach Elimination von ξ_1 aus beiden Gleichungen vor die Resultante tretende Potenz von ξ gleich dem Product jener Dimensionen, also gleich:

$$q q' \kappa (\kappa + \iota)$$

sein. Die Anzahl d der gesuchten Schnittpunkte ist dann der $q q' \iota$ Theil hiervon, weil jedem Werthepaare λ, λ_1 q, q' Werthepaare ξ, ξ' entsprechen. Wenn aber neben der Gleichung $A_0 = A'_0$ noch die:

$$B_0 = B'_0$$

besteht, wodurch:

$$\kappa C_{00} = \kappa' C'_{00}$$

wird, so erhöht sich jene Potenz von ξ , sofern nur $q\kappa$ und $q\iota$ einen gemeinsamen Theiler haben. Wir nehmen weiter an, dass für

$$p = 1, 2, \dots, s - 1,$$

$$q = 1, 2, \dots, t - 1$$

die Gleichungen bestehen:

$$q\kappa_p = q'\kappa'_p; \quad q\iota_q = q'\iota'_q;$$

$$A_p = A'_p; \quad B_q = B'_q,$$

woraus noch:

$$\kappa C_{pq} = \kappa' C'_{pq}$$

folgt. Dann kann man in jenen Gleichungen aus den Klammern noch die Coefficienten $\kappa_p C_{pq}$ bez. A_p vorziehen, wodurch dieselben die Form der in § 8. betrachteten gewinnen. Nimmt man nun noch an, dass $q\kappa$ und $q\iota$ einen gemeinsamen Theiler haben, so kommt die Aufgabe, die Potenz von ξ zu finden, welche Factor der Resultante dieser Gleichungen ist, auf die Bestimmung eines ebensolchen Ausdrucks ϑ hinaus, wie er a. a. O. aufgestellt wurde. Nur der Umstand, dass mit $\xi - \xi_1$ hier nicht dividirt worden ist, bringt eine Modification mit sich. Von den Zahlen $M, N, P, \dots$, welche der Reihe nach grösste gemeinsame Theiler der Zahlen $q\kappa, q\iota$ sind, und die darum alle durch $q q'$ theilbar sind, ist nämlich die letzte, etwa $S = q q'$, in dem zu bildenden Ausdruck nicht um 1 zu vermindern, so dass also ϑ die Form gewinnt:

$$\vartheta = (M-N) \left\{ \frac{(r_m - r)q}{(w_\mu - w)q} + (N-P) \left\{ \frac{(r_n - r)q}{(w_\nu - w)q} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + S \left\{ \frac{(r_s - r)q}{(r'_s - r)q'} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \frac{(w_\sigma - w)q}{(w_{\sigma'} - w)q'} \right\} \right\}$$

wo überall $\kappa_m = r$, u. s. w. durch $r_m = r$ u. s. w. ersetzt ist. Man hat so als Gesamtzahl d der Schnittpunkte, welche beide Zweige mit einander gemeinsam haben:

$$d = (r+1)(r'+w'+2) + \frac{\vartheta}{qq'}.$$

Hieraus folgt sogleich für die Anzahl der den beiden Zweigen gemeinsamen Tangenten:

$$t = (w+1)(r'+w'+2) + \frac{\vartheta}{qq'},$$

woraus sich wieder ergibt, dass die Differenz $d - t$ von ϑ unabhängig wird.

§ 11.

Verhalten der adjungirten Curven in einem singulären Punkt.

Für die eindeutige Transformation einer algebraischen Curve von Wichtigkeit sind bekanntlich die „adjungirten“ Curven, die zu ihr in der Beziehung stehen, dass sie, wenn die gegebene Curve nur elementare Singularitäten besitzt, durch alle (d) Doppel- und (r) Rückkehrpunkte derselben einfach hindurchgehen. Sie bilden eine Schaar mit:

$$q = \frac{1}{2} \mu(\mu+3) - d - r$$

willkürlichen Constanten (wenn μ die Ordnung der adjungirten Curven ist), welchemit der gegebenen Curve n . Ordnung, deren Geschlecht $= p$ sei, noch:

$$Q = \mu n - 2(d+r)$$

„bewegliche“ Schnittpunkte, d. h. Punkte gemeinsam haben, die sich mit jenen Constanten ändern. Diese Punkte sind, gewisse specielle Lagen abgerechnet, für $\mu < n$ durch q , für $\mu \geq n$ durch $Q - p$ von ihnen bestimmt*). Wenn nun von höheren Singularitäten die Rede ist, wirft sich die Frage auf, was aus den adjungirten Curven wird,

*) Die Theorie der eindeutigen Transformation lässt sich auf die Eigenschaften von Punktgruppen gründen, die durch adjungirte Curven ausgeschnitten werden (Brill und Nöther, d. Ann. Bd. VII.). Diese Gruppen hängen aber nur von zwei Zahlen ab, der Mannigfaltigkeit der Gruppe und der Anzahl der ihr angehörigen Punkte, welche durch die Zahlen Q und q , bez. $Q - p$, bestimmt sind.

wenn von den Doppel- und Rückkehrpunkten sich einige zu einer höheren Singularität vereinigen. Man hat erkannt, dass auch in diesem Falle noch „adjungirte“ Curven existiren, für welche nämlich durch ihr Verhalten in den singulären Punkten ebensoviele Schnittpunkte und Bestimmungsstücke absorhirt werden, wie durch die äquivalente Anzahl von Doppel- und Rückkehrpunkten — und man findet in der Abhandlung über algebraische Functionen von Herrn Nöther und mir (d. Ann. Bd. VII.) einen Weg angegeben, wie man vermöge gewisser Transformationsprocesse zu einer Vorstellung von dem Verhalten der adjungirten Curve in einer gegebenen Singularität gelangen kann.

Ich will nun im Folgenden den allgemeinen Existenzbeweis der adjungirten Curven für Curven mit beliebigen Singularitäten dadurch führen, dass ich ein Verfahren angebe, vermöge dessen man auf dem Wege der Rechnung an der Hand leicht ausführbarer Operationen, die nie versagen, diejenige Curve findet, die sich in einer gegebenen höheren Singularität adjungirt, d. h. so verhält, wie die adjungirte in der aufgelösten, und die zugleich die nöthige Anzahl von verfügbaren Coefficienten besitzt. Aus den früher entwickelten Gründen ist es gleichgültig, auf welcher besonderen Gattung von Curven die Singularität auftritt. Denn die Forderung des Adjungirtseins involvirt nur die Absorption einer gewissen Anzahl von Bestimmungsstücken und Schnittpunkten durch den singulären Punkt, zwei Zahlen, die sich aus einer endlichen Anzahl von Gliedern der Entwicklungen, durch welche die Singularität definirt ist, also aus dem Vorkommen desselben auf einer rationalen Curve bestimmen lassen. Ich werde aus der Gleichung einer solchen Curve *die der adjungirten Curve herstellen, ohne dass sich eine vorgängige Bestimmung der Lage und Eigenschaften ihrer Singularitäten als nöthig erweist*. Das Verhalten dieser Curve in einer höheren Singularität der rationalen ergibt sich dann durch Untersuchung der erhaltenen Gleichung auf ihre Singularitäten.

Für eine rationale nicht zerfallende Curve, deren Cartesische Coordinaten x, y als Functionen eines Parameters λ dargestellt seien:

$$x = \frac{a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots}{c_0 \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots},$$

$$y = \frac{b_0 \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots}{c_0 \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots}$$

und diesem *eindeutig* zugeordnet sind, werde derjenige Werth von λ bestimmt, welcher den Coordinaten x, y irgend eines Curvenpunktes entspricht. Man bilde zu dem Zweck durch Elimination von λ aus obigen Gleichungen die Resultante in der Bezout'schen Form einer

n -gliedrigen Determinante, indem man alle zweigliedrigen Determinanten aus den Coefficienten der Gleichungen:

$$\begin{aligned}\lambda^n(xc_0 - a_0) + \lambda^{n-1}(xc_1 - a_1) + \dots &= 0, \\ \lambda^n(yc_0 - b_0) + \lambda^{n-1}(yc_1 - b_1) + \dots &= 0\end{aligned}$$

herstellt, und:

$$\begin{aligned}d_{ik} &= (xc_i - a_i)(yc_k - b_k) - (xc_k - a_k)(yc_i - b_i) \\ &= \begin{vmatrix} x & a_i & a_k \\ y & b_i & b_k \\ 1 & c_i & c_k \end{vmatrix}\end{aligned}$$

setzt. Dann ist die gesuchte Resultante*):

$$\begin{vmatrix} d_{01} & d_{02} & \dots \\ d_{02} & d_{03} + d_{12} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0, n-1} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1, n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1, 0} & c_{n-1, 1} & \dots & c_{n-1, n-1} \end{vmatrix},$$

wo zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}c_{0k} &= d_{0, k+1}, \\ c_{1k} &= d_{0, k+2} + d_{1, k+1}, \\ &\dots \\ c_{ik} &= d_{0, i+k+1} + d_{1, i+k} + \dots + d_{i, k+1}\end{aligned}$$

gesetzt ist. Die Wurzel λ berechnet sich dann als Quotient zweier passend gewählten Unterdeterminanten dieser n -gliedrigen Determinante, oder allgemeiner aus zwei aufeinanderfolgenden Gliedern der Proportion:

$$\lambda^{2n-2} : \lambda^{2n-1} : \dots : \lambda : 1 = \gamma_0 : \gamma_1 : \dots : \gamma_{2n-1} : \gamma_{2n-2},$$

wo $\gamma_{i+k} = \gamma_{ik}$ die Unterdeterminante eines Elementes c_{ik} bedeutet (also mehrfache Bedeutung hat). Die γ sind ganze Functionen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Variabeln x, y , wegen obiger Proportion linear von einander unabhängig, die auch für specielle Werthe der Coefficienten nicht identisch verschwinden können, da λ den Curvenpunkten nach Voraussetzung eindeutig zugeordnet ist. Vermöge einer bekannten Eigenschaft der Gleichungssysteme, denen mehrere Lösungen gleichzeitig genügen, verschwinden die γ nur für solche Werthe x, y , denen mehrere Parameterwerthe λ entsprechen, also für singuläre Punkte der Curve. Die γ repräsentiren also, gleich Null gesetzt, $2n-1$ Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die, wenn die gegebene Curve nur Doppel- und Rückkehrpunkte besitzt, in diesen verschwinden, und sich also adjungirt verhalten. Dies ist dann aber auch mit der ∞^{2n-2} Schaar von C_{n-1} der Fall:

*) Jacobi, Crelle J. Bd. 15.

$$\alpha_0 \gamma_0 + \alpha_1 \gamma_1 + \dots + \alpha_{2n-2} \gamma_{2n-2} = 0,$$

wo die α Constante sind. Diese Curvenschaar ist die allgemeinste adjungirte Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zu der gegebenen rationalen, denn die Zahl der Bestimmungsstücke einer solchen ist nach Früherem:

$$\frac{1}{2} (n-1) (n+2) - \frac{1}{2} (n-1) (n-2) = 2n - 2.$$

Der Uebergang aber von einer rationalen Curve mit nur Doppel- und Rückkehrpunkten zu einer solchen mit beliebigen Singularitäten ändert weder an der Zahl der beweglichen Schnittpunkte noch an der Mannigfaltigkeit der Schaar etwas.

Man kann die Schaar durch eine solche $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung ersetzen, wenn die Ausdrücke für x und y ganze Functionen von λ sind, also z. B. bei rational-ganzen Curven. Wenn nämlich die Grössen

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$$

sind, so reduciren sich die Elemente $c_{0i} = c_{i0}$ für $i = 0, 1, \dots, n-2$ sämmtlich auf Constante, die Unterdeterminanten γ_{in} (für $i = 0, 1, \dots, n-1$) sind in Folge davon Functionen von nur noch dem $(n-2)^{\text{ten}}$ Grade, und demnach stellt die Gleichung:

$$\alpha_1 \gamma_{1, n-1} + \alpha_2 \gamma_{2, n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \gamma_{n-1, n-1} = 0,$$

(wo nun wieder $\gamma_{i, n-1}$ die Unterdeterminante von $c_{i, n-1}$ bedeutet), eine adjungirte Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung zu der rational-ganzen Curve dar. Dass sie die allgemeinste dieser Art ist, zeigt man durch eine Abzählung wie oben.

München, im December 1879.

Berichtigung.

Auf Seite 368 2. Zeile des Textes von unten:

statt kx^2 lies $2akx^2$,

„ lx^2 „ $2alx^2$.