SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN CORPS PESANT DE RÉVOLUTION ROULANT PAR UNE ARÊTE CIRCULAIRE SUR UN PLAN HORIZONTAL; CAS PARTICULIER DU CERCEAU.

Par M. P. Appell, à Paris.

Adunanza del 13 agosto 1899.

1. Le problème du roulement d'un corps solide sur un plan horizontal a été étudié par Neumann, par Slessor, par Routh; le cas particulier du cerceau, déjà étudié par Routh, a été repris par M. Carvallo dans un mémoire encore inédit présenté en 1897 au Concours du prix Fourneyron et devant paraître prochainement dans le Journal de l'École Polytechnique.

Imaginons un solide pesant qui remplisse les conditions suivantes:

1° le solide est terminé par une arête vive ayant la forme d'un cercle K de centre H et de rayon a ;

2° le centre de gravité G du corps est situé sur la perpendiculaire $H\chi$ élevée par le centre H au plan du cercle K ;

3° l'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité G est de révolution autour de cette perpendiculaire $HG\chi$.

Supposons ensuite que le corps solide ainsi constitué soit assujéti à rouler sans glisser sur un plan horizontal fixe.

J'ai remarqué que l'intégration des équations de ce problème de mécanique peut être ramenée à l'intégration d'une équation linéaire du deuxième ordre suivie de quadratures. Dans le cas particulier où le centre de gravité G se confond avec le centre H du cercle K , le problème se ramène à des quadratures si l'on introduit comme élément analytique la fonction hypergéométrique de Gauss. Ce fait a lieu en particulier pour le mouvement du cerceau. J'ai indiqué sommairement la méthode d'intégration que j'expose ici, dans une publication intitulée « *Les mouvements de roulement en dynamique* » (Collection Scientia, CARRÉ ET NAUD édi-

teurs, Paris). Quoique les auteurs cités aient donné les équations du mouvement, nous les établirons rapidement pour bien fixer les notations. Je saisis cette occasion pour faire remarquer qu'il s'est glissé une erreur dans les premiers exemplaires du tome II de mon *Traité de Mécanique rationnelle*. Comme exercice sur les équations de Lagrange j'ai reproduit, au n° 452, les principaux résultats d'un mémoire de M. Ernst Lindelöf (Acta Societatis Scientiarum Fennicæ, t. XXI). Mais, ainsi qu'il résulte des recherches de MM. Vierkandt et Hadamard citées dans ce même n° 452, les résultats de M. Lindelöf sont inexacts. J'ai signalé cette erreur à M. Lindelöf en 1898 et j'ai fait corriger les exemplaires de mon *Traité* en magasin à cette époque : la fin du n° 452 a été modifiée et un n° 452^{bis} ajouté.

2. Soit P le point de contact du cercle K avec le plan fixe. Prenons comme origine mobile G et comme trièdre de référence les axes suivants : 1° la droite Gx parallèle à la droite HP qui joint le centre du cercle K au point de contact P ; 2° la droite HGz normale au plan du cercle K ; 3° la droite Gy perpendiculaire au plan zGx .

Désignons par θ l'angle de Gz avec la verticale ascendante Gz_1 et par ψ l'angle de Gy avec une horizontale fixe. Ces deux angles déterminent l'orientation du trièdre $Gxyz$. La rotation instantanée ω' de ce trièdre est la résultante d'une rotation $\frac{d\theta}{dt}$ autour de Gy et d'une rotation $\frac{d\psi}{dt}$ autour de Gz_1 . On a donc, en appelant p', q', r' les composantes de cette rotation ω' suivant Gx, Gy, Gz :

$$(\omega') \quad \left\{ \begin{array}{l} p' = -\frac{d\psi}{dt} \sin \theta, \\ q' = \frac{d\theta}{dt}, \\ r' = \frac{d\psi}{dt} \cos \theta. \end{array} \right.$$

Pour fixer la position du corps solide par rapport au trièdre $Gxyz$, il suffit de connaître l'angle φ que fait un rayon du cercle K , invariablement lié au corps, avec l'axe Gy . La rotation instantanée ω du corps est alors la résultante de la rotation ω' du trièdre et d'une rotation $\frac{d\varphi}{dt}$ autour de Gz . Les composantes p, q, r de ω sont donc :

$$(ω) \quad \begin{cases} p = p' = -\frac{d\psi}{dt} \sin \theta, \\ q = q' = \frac{d\theta}{dt}, \\ r = r' + \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \cos \theta + \frac{d\varphi}{dt}. \end{cases}$$

Appelons u, v, w les projections de la vitesse du centre de gravité G sur Gx, Gy, Gz . D'après des formules connues, les projections de l'accélération du point G sur ces mêmes axes sont

$$\frac{du}{dt} + q'w - r'v, \dots \text{etc.}$$

Cela posé, les forces appliquées au corps sont, en prenant la masse du corps pour unité :

1° le poids g appliqué en G et ayant pour projections sur Gx, Gy, Gz :

$$g \sin \theta, \quad 0, \quad -g \cos \theta;$$

2° la réaction du plan appliquée en P et ayant pour projections :

$$X, \quad Y, \quad Z.$$

Équations du mouvement du centre de gravité :

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + q'w - r'v = g \sin \theta + X \\ \frac{dv}{dt} + r'u - p'w = Y \\ \frac{dw}{dt} + p'v - q'u = -g \cos \theta + Z. \end{cases}$$

Équations du mouvement autour du centre de gravité.—Soient A, A, C les moments d'inertie du corps par rapport aux axes Gx, Gy, Gz . Soit dans le mouvement relatif du corps autour de $G, G\sigma$ le moment résultant des quantités de mouvement par rapport au point G ; ce vecteur $G\sigma$ a pour projections :

$$\sigma_x = Ap, \quad \sigma_y = Aq, \quad \sigma_z = Cr.$$

Prenons, d'autre part, le moment résultant GS des forces par rapport à G ; si l'on désigne par a le rayon HP du cercle K et par c la distance HG , le point de contact P a pour coordonnées, par rapport aux axes G, x, y, z :

$$x = a, \quad y = 0, \quad z = c.$$

Les moments de la réaction par rapport aux axes G, x, y, z sont alors :

$$-cY, \quad cX - aZ, \quad aY;$$

ceux du poids sont nuls. Le moment résultant GS a donc pour projections :

$$S_x = -cY, \quad S_y = cX - aZ, \quad S_z = aY.$$

Pour exprimer le théorème des moments, on écrit que la vitesse relative du point σ par rapport à des axes de directions fixes menées par G est égale à GS . On a donc

$$\frac{d\sigma_x}{dt} + q'\sigma_z - r'\sigma_y = S_x,$$

.....

c'est-à-dire, comme $q' = q$, $p' = p$:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \frac{dp}{dt} + (Cr - Ar')q = -cY, \\ A \frac{dq}{dt} - (Cr - Ar')p = cX - aZ, \\ C \frac{dr}{dt} = aY. \end{array} \right.$$

Conditions géométriques.—Pour exprimer que la circonférence K roule sur le plan, il faut écrire que la vitesse du point matériel P au contact est nulle. Cette vitesse étant la résultante de la vitesse u , v , w de G et de la vitesse due à la rotation du corps autour de G , on a :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u + qc = 0, \\ v + ar - pc = 0, \\ w - aq = 0, \end{array} \right.$$

car le point P a pour coordonnées

$$x = a, \quad y = 0, \quad z = c.$$

Remplaçons u , v , w par ces valeurs dans les équations (1), puis remplaçons Y par la valeur $\frac{C}{a} \frac{dr}{dt}$ dans la deuxième des équations (1) et la première des équations (2), nous avons les deux équations :

$$Aa \frac{dp}{dt} + a(Cr - Ar')q + Cc \frac{dr}{dt} = 0,$$

$$a \left(c \frac{dp}{dt} - a \frac{dr}{dt} \right) - a(cr' + ap)q - C \frac{dr}{dt} = 0.$$

Si, dans ces équations, on remplace q par $\frac{d\theta}{dt}$ et r' par sa valeur $-p \cotg \theta$, telle qu'elle résulte des relations définissant ω' et ω , on a enfin les deux équations linéaires simultanées :

$$(4) \quad \begin{cases} Aa \frac{dp}{d\theta} + Cc \frac{dr}{d\theta} + Car + Aap \cotg \theta = 0, \\ ac \frac{dp}{d\theta} - (C + a^2) \frac{dr}{d\theta} - a^2 p + acp \cotg \theta = 0 \end{cases}$$

définissant p et r en fonction de θ . On en déduit, par l'élimination de $\frac{dp}{d\theta}$:

$$(5) \quad Aa^2 p = - (Aa^2 + Cc^2 + AC) \frac{dr}{d\theta} - Cacr,$$

puis

$$(6) \quad \frac{d^2 r}{d\theta^2} + \cotg \theta \frac{dr}{d\theta} + \frac{Ca}{Aa^2 + Cc^2 + AC} (c \cotg \theta - a) r = 0.$$

Cette équation donne r en fonction de θ ; la précédente donne p . En lui adjoignant l'équation des forces vives :

$u^2 + v^2 + w^2 + A(p^2 + q^2) + Cr^2 = -2g(a \sin \theta - c \cos \theta) + h$,
on obtient θ en fonction de t par une quadrature.

3. *Cas particulier où $c = 0$. Cerceau.*—Lorsque le point G coïncide avec le centre H du cercle, on a $c = 0$. Dans ce cas r est déterminé par l'équation linéaire :

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + \cotg \theta \frac{dr}{d\theta} - \frac{Ca^2}{A(C + a^2)} r = 0,$$

qui devient, par la substitution

$$(7) \quad \cos^2 \theta = s,$$

$$(8) \quad s(1-s) \frac{d^2 r}{ds^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}s \right) \frac{dr}{ds} - \frac{Ca^2}{4A(C + a^2)} r = 0.$$

Cette équation est celle de la série hypergéométrique de Gauss, dans laquelle

$$(9) \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad \alpha + \beta = \frac{1}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{Ca^2}{4A(C + a^2)}.$$

On sait que l'intégrale générale de l'équation de Gauss (*Œuvres complètes*, t. III, p. 210) est

$\lambda F(\alpha, \beta, \gamma, x) + \mu x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x)$,
 λ et μ désignant deux constantes arbitraires.

Donc l'expression de r est

$$r = \lambda F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}, \cos^2 \theta\right) + \mu \cos \theta F\left(\alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 \theta\right).$$

On a ensuite

$$p = - \frac{C + a^2}{a^2} \frac{dr}{d\theta},$$

ce qui donne également p exprimé par des séries hypergéométriques.

Enfin l'équation des forces vives donne t en fonction de θ par une quadrature.

4. *Cas général: Corps pesant de révolution de forme quelconque.*

Faisons rouler et pivoter, sur un plan horizontal, un corps homogène pesant de révolution de *forme quelconque*. Prenons encore comme origine du trièdre de référence le centre de gravité G , comme axe Gz l'axe de révolution, comme axe Gx la ligne de plus grande pente du plan perpendiculaire à Gz , et comme axe Gy l'horizontal de ce plan. Les équations du mouvement sont encore les équations (1), (2) et (3), avec cette seule différence que les coordonnées a et c du point de contact du corps avec le plan, au lieu d'être *constantes*, sont des *fonctions* de θ dépendant de la forme extérieure du corps *). L'élimination de Y conduira encore à des équations linéaires et homogènes, définissant p et r en fonction de θ . L'une quelconque des quantités p et r sera définie en fonction de θ par une équation linéaire et homogène du deuxième ordre qui se réduira à (6) quand on supposera a et c constants. Peut-être cette équation pourra-t-elle être intégrée pour une forme particulière du corps.

NOTE ADDITIONNELLE.

Après l'achèvement d'une première rédaction de cet article, dans laquelle je traitais seulement le cas $c = 0$, en indiquant comme probable que la même méthode s'appliquerait au cas $c \neq 0$, j'ai pris connaissance d'un travail de M. Korteweg, professeur à l'Université d'Amsterdam, qu'il vient de publier dans le « Nieuw Archief voor Wiskunde », 2^e série, tome IV, livraison de Juillet. De ce travail il résulte que, par une rencontre curieuse, M. Korteweg s'est occupé en même temps que moi de la résolution du même problème à l'aide des fonctions hypergéométriques.

M. Korteweg à qui j'avais envoyé cette première rédaction m'a prié de ne pas la supprimer, d'autant moins qu'il avait donné ses résultats sans démonstration et laissé passer pour l'un d'entre eux une faute de calcul. Il m'a engagé à apporter à mon article le changement que j'avais entrevu et qui n'avait rien de commun avec son travail et à y ajouter de sa part ce qui va suivre.

St.-Germain-en-Laye (Seine-et-Oise).

27 juillet 1899.

P. APPELL.

*) Voyez mon opusculé : *Sur les mouvements de roulement*, n° 17.