6. *Zur Theorie des Lichtes und insbesondere der doppelten Brechung; von E. Ketteler.*

Die letzten Jahre haben auf dem Gebiete sowohl der mechanischen als der electricischen Lichttheorie eine grosse Reihe von Arbeiten gebracht, und es hat nach ihnen den Anschein, als ob die letztere selbst bei denjenigen Vertretern der mechanischen Auffassung, die früher ihren Standpunkt bezüglich der Erscheinungen der Dispersion wie Polarisirung mit einer gewissen engherzigen Schroffheit zu wahren strebten, mehr und mehr an Boden gewinne. Da die heutige electromagnetische Theorie insbesondere die ältere Fresnel'sche und Neumann'sche Auffassung nicht mehr als zwei sich ausschliessende, sondern sich zu höherer Einheit zusammenfassende Systeme betrachtet, so ist damit die leidige Rivalität derselben beseitigt und mit dem Wegfall jeder Voreingenommenheit ein mehr unparteiischer Einblick in beide ermöglicht.

Den hier charakterisirten freieren Standpunkt hält unter anderen eine Arbeit ein, welche Hr. Drude unter dem bezeichnenden Titel: „Inwieweit genügen die bisherigen Lichttheorien den Anforderungen der praktischen Physik?“¹⁾ kürzlich hat erscheinen lassen und auf welche ich weiterhin zurückkomme.

Was übrigens seit etwa 1885 auf mechanischer Seite bezüglich der Theorie der absorbirenden Medien und des Lichtüberganges zwischen ihnen geleistet ist, erscheint wesentlich als eine Vervollständigung, bez. Anlehnung an die Arbeiten von Kirchhoff und Stokes. Man mag dieselbe in mathematischer Hinsicht als ein wohlgelungenes, formvollendetes Kunstwerk betrachten, in physikalischer Hinsicht ist dadurch für irgendwelche fassbare Erklärung auch nicht das mindeste erreicht worden. Die bezüglichen Formelsysteme sind nämlich dadurch gewonnen, dass man gewisse Constanten, welche für durchsichtige Medien reelle Grössen sind, auf die allgemeinere

1) Drude, Gött. Nachr. 1892, p. 366—411.

complexe Form gebracht hat, ohne indess zugleich im Stande zu sein, die so gewonnenen symbolischen Gleichungen derart umzuformen, dass dieselben ausschliesslich physikalisch zugängliche Werthe enthalten. Ich selber halte zwar eine derartige Verwendung complexer Grössen im Nothfalle durchaus für statthaft, bekenne mich aber nach üblen persönlichen Erfahrungen entschieden zu dem Grundsatz, dass eine Theorie, welche dieselben nicht im einzelnen zu interpretiren vermag, eine noch nicht vollkommene ist.

2. *Die Metallreflexion.* In meinen eigenen Arbeiten über den Lichtübergang zwischen absorbirenden Medien (sogenannte Metallreflexion und Metallrefraction)¹⁾ habe ich die Neumann'sche Theorie nur um deshalb beanstandet, weil ich dieselbe zu einer Erweiterung auf absorbirende Medien nicht für fähig hielt. Die bezüglichlichen Grenzgleichungen haben nämlich zunächst für isotrope Medien, wenn man zugleich die z -Axe mit dem Einfallslot zusammenfallen lässt, zufolge meines Buches p. 142, 158 und 159 die folgende Gestalt.

Nach Fresnel:

$$(1) \quad \begin{cases} \xi_1 = \xi_2, & \eta_1 = \eta_2 \\ \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right)_1 = \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right)_2, & \left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} \right)_1 = \left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} \right)_2, \end{cases}$$

wo ξ , η , ζ die Componenten der Schwingungsausschläge des Aethers sind und die Indices 1, 2 sich auf das erste, bez. zweite Medium beziehen.

Nach Neumann dagegen:

$$(2) \quad \begin{cases} \xi_1 = \xi_2, & \eta_1 = \eta_2 \\ \omega_1^2 \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right)_1 = \omega_2^2 \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right)_2, \\ \omega_1^2 \left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} \right)_1 = \omega_2^2 \left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} \right)_2, \end{cases}$$

und bedeuten hierin noch ω_1 , resp. ω_2 die bezüglichlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten. Beide Gleichungensysteme sind

1) E. Ketteler, Theoretische Optik, gegründet auf das Bessel-Sellmeier'sche Princip. Braunschweig 1885. — Dieselbe scheint Hrn. Drude, der dieselbe niemals citirt, sondern bei Erwähnung meiner Ansichten auf ältere Publicationen von mir zurückgreift, bisher fremd geblieben zu sein.

gültig für die Punkte von der Lage $x = y = z = 0$ (in durchsichtigen Medien auch für $z = 0$).

Obwohl die ersteren Jahre lang von Hrn. Voigt als unmöglich bekämpft und die letzteren von demselben auf eine nur äusserlich verschiedene Form gebracht sind, so hat jetzt Hr. Drude beide Systeme auf p. 369 seiner Arbeit als Gleichungen (3') und (3) als thatsächlich gleich richtig anerkannt.

Die zu ihrer Integration dienenden Schwingungsausdrücke haben sämmtlich die Form (n bedeutet das Brechungsverhältniss):

$$\varrho = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - n \frac{ux + vy + wz}{\lambda} \right).$$

Handelt es sich nun weiter um die Ausdehnung vorstehender Uebergangsbedingungen auf absorbirende Medien, so begreift man sofort den wesentlichen Unterschied beider Systeme. Während nach Fresnel Schwingungsausdrücke mit den Componenten:

$$\xi = \mathfrak{A}_x e^{\frac{-2\pi}{\lambda} \kappa (u'x + v'y + w'z)} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\nu(ux + vy + wz)}{\lambda} - \psi_x \right) \dots$$

oder:

$$\xi = \mathfrak{A}_x (\cos \psi_x + \sqrt{-1} \sin \psi_x) \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{(\nu u + \sqrt{-1} \kappa u')x + (\nu v + \sqrt{-1} \kappa v')y + (\nu w + \sqrt{-1} \kappa w')z}{\lambda} \right) \dots$$

genügen und in meiner Optik selbst in dieser Allgemeinheit (p. 266—272) in gegenseitiger Ergänzung zur Anwendung gekommen sind, bilden im Neumann'schen System die beiden Factoren ω_1^2 , ω_2^2 ein vorläufig unübersteigbares Hinderniss.

Nachdem Hr. Voigt sich anfangs bemüht, diese Schwierigkeit mittels gewisser Zusatzglieder, die er den Grenzgleichungen in ihrer hier aufgeführten Form hinzufügte, zu beseitigen, hat er sich schliesslich genöthigt gesehen, beide Factoren vorbehaltlich einer späteren Interpretation derselben complex zu setzen. Gewiss wird man daher Hrn. Drude zustimmen, wenn er p. 411 die Meinung äussert, dass man in der eigentlichen Optik „eher die Fresnel'schen als die Neumann'schen Formeln wählen werde“.

Ich habe in der That in meinem Buche die Theorie der Metallreflexion etc. auf p. 187—276 nicht bloss in völlig er-

schöpfender Weise durchführen, sondern auch die Totalreflexion an durchsichtigen Medien als einen gewissen eigenthümlichen Specialfall derselben dieser subsummiren können. Dabei mag noch ausdrücklich constatirt werden, dass an dem Gelingen dieser Aufgabe die neben den Grenzgleichungen völlig unentbehrliche Incompressibilitätsbedingung:

$$(3) \quad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0$$

in der wesentlichsten Weise betheilt ist.

Wenn übrigens Hr. Drude in Anm. 4 auf p. 382 seiner Arbeit hervorhebt, dass die Voigt'sche Theorie zu einer Uebereinstimmung mit den Cauchy'schen Formeln führe und er selber diese Uebereinstimmung¹⁾ bewiesen habe, so hat mich der von ihm geführte Beweis, dessen Hilfsmittel gewissermaassen von aussen her entlehnt sind, nur wenig befriedigt. Dabei ergeht sich derselbe befremdlicher Weise bezüglich des Urhebers der beiden Grundformeln der Metallreflexion:

$$(4) \quad v^2 - \kappa^2 = v_0^2 - \kappa_0^2, \quad v \kappa \cos r = v_0 \kappa_0,$$

unter v, κ Refractions- und Extinctionscoefficient bei beliebigem Brechungswinkel r und unter v_0, κ_0 dieselben Grössen für $r = 0$ verstanden, in unbestimmten Vermuthungen, während ich doch in meinem Buche p. 198 den Nachweis führe, dass ich selber diese Relationen zuerst 1875 aufgestellt, dass dieselben dann sofort von Hrn. Wernicke acceptirt und von letzterem unter Anlehnung an die v. Helmholtz'sche Arbeit über anomale Dispersion ihre erste Begründung gefunden haben. Cauchy hat dieselben nirgendwo gegeben, Eisenlohr hat sie nicht gekannt und Beer hat ganz abweichende Beziehungen für die richtigen gehalten.

3. *Die Krystallreflexion.* Wenden wir uns hiernach zu den Theorien der durchsichtigen doppelbrechenden Medien, so unterscheidet Hr. Drude (p. 397) dreierlei Erklärungssysteme, je nachdem man mit Neumann streng transversale Wellen in der Polarisationssebene oder mit Fresnel streng transversale Wellen senkrecht zur Polarisationssebene oder mit Briot, Boussinesq und Sarrau genähert transversale (quasitrans-

1) Drude, Wied. Ann. 35. p. 508. 1888.

versale) Wellen ebenfalls senkrecht zur Polarisationssebene annimmt.

Wenn nun aber Hr. Drude alle diese Systeme vom Standpunkte der praktischen Physik für gleichmässig zulässig erachtet, so glaube ich ihm doch bezüglich des dritten widersprechen zu müssen. Nach obiger Darstellung ist nämlich eine praktisch richtige Construction der Formeln der Metallreflexion — unter strengem Ausschluss imaginärer Grössen — nur bei Zuziehung der Incompressibilitätsbedingung möglich. So wenig es aber einen Lichtäther und einen davon verschiedenen Electricitätsäther geben kann, ebensowenig gibt es einen unzusammendrückbaren Aether in isotropen und einen zusammendrückbaren in anisotropen Medien. Freilich wird diese durchschlagende Bedeutung jener Bedingung auf dem von Hrn. Drude eingenommenen Standpunkt weniger empfunden und daher kaum vollauf gewürdigt werden.¹⁾

Leider hat derselbe ein viertes Erklärungssystem, nämlich das in meiner Optik von mir aufgestellte, wohl übersehen. Da ich auf die Bewegungsgleichungen desselben weiter unten ausführlicher zurückkomme, so möge dieses Ketteler'sche System vorläufig dahin charakterisirt werden, dass es in scheinbar paradoxer Weise im incompressibeln Aether Schwingungen postulirt, die senkrecht zur Polarisationssebene und zugleich senkrecht zum Strahle erfolgen.²⁾

Die allgemeinen Bedingungen für den Lichtübergang zwischen anisotropen Medien sind in meinem Buche für den Standpunkt Neumann's, Cornu's und Ketteler's — also unter selbstverständlichem Ausschluss der Quasitransversalsysteme — p. 334—372 abgehandelt. Insbesondere habe ich die sämtlichen Grenzggleichungen des ersten und letzten Systems aus dem einen allgemeinen Energieprincip abgeleitet, während ich bezüglich der zunächst empirisch gewonnenen Gleichungen Cornu's eine solche Zusammenfassung nicht für möglich hielt. Wie nun aus der betreffenden interessanten Darstellung Drude's hervorgeht, habe ich mich in dieser Beziehung geirrt.

1) Auch in durchsichtigen Medien ist die Incompressibilitätsgleichung für die Vorzeichenbestimmung nützlich, damit man nicht z. B. Deformationscomponenten und Drehcomponenten verwechselt.

2) Vgl. insbesondere l. c. p. 288 u. ff.

Auf p. 342 und 343 der Optik finden sich die bezüglichen Grenzgleichungen wie folgt angegeben.

Für die Ketteler'schen Strahlschwingungen:

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \xi_2, \quad \eta_1 = \eta_2 \\ \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right)_1 = \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right)_2, \quad \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right)_1 = \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right)_2 \end{array} \right.$$

und für die Neumann'schen Normalschwingungen, sofern man der Einfachheit wegen xz -Ebene und Einfallsebene zusammenfallen lässt:

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \xi_2, \quad \eta_1 = \eta_2 \\ \omega_1^2 \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right)_1 = \omega_2^2 \alpha \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right)_2, \quad \omega_1^2 \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right)_1 = \omega_2^2 \beta \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right)_2 \end{array} \right.,$$

sämmtlich bezogen auf Punkte von der Lage $x = y = z = 0$ (in Neumann'schen durchsichtigen Medien auch für $z = 0$).

Dies sind aber wieder die nämlichen Gleichungen, die früher von gegnerischer Seite heftig angefochten wurden, und die nunmehr Hr. Drude p. 394—397 seines Aufsatzes ausdrücklich für zulässig erklärt. Es sind die Gleichungen (32) und (41) desselben.

Beide Systeme zeigen den gleichen charakteristischen Unterschied wie die entsprechenden für isotrope Medien. Während daher wieder die Grenzgleichungen Ketteler's ohne weiteres auch auf absorbirende Krystalle anwendbar sind, versagen dagegen die Gleichungen Neumann's, sofern mit ihnen weitere Operationen als ein einfaches Complexsetzen der Coefficienten unmöglich sind. — Genau dasselbe gilt bezüglich der neuen Cornu-Drude'schen Grenzbedingungen, nämlich der Gleichungen (39) bei Hrn. Drude.

Noch auf folgenden Umstand möchte ich hier vorläufig aufmerksam machen. Die Normalschwingungen befolgen das Brechungsgesetz, die Strahlschwingungen dagegen nicht. Geht man in anisotropen absorbirenden Medien von einer bestimmten Normalrichtung aus, so fehlt dazu vorläufig die Strahlrichtung, geht man dagegen von einer bestimmten Strahlrichtung aus, so fehlt die zugehörige Normale. Nun kennt bekanntlich die bisherige Optik seit Fresnel's Zeiten zur Ermittlung der relativen Lage von Strahl und Normale kein anderes Mittel, als von der Geschwindigkeitsfläche der Normalen durch eine

rein mathematische Umhüllungsoperation zu der der Strahlen fortzuschreiten. Hat aber die erstere eine complexe Form, so natürlich auch die letztere, und daher ist wenigstens im dreidimensionalen Raume auch der Winkel zwischen Strahl und Normale eine complexe und damit im allgemeinen eine unbestimmbare Grösse.

Andererseits habe ich schon in meinem Buche darauf hingewiesen, dass es ausser dem auf reine Geschwindigkeitsflächen angewandten Umhüllungsprincip noch einen anderen und zwar universelleren Grundsatz geben müsse, welcher auch für absorbirende Krystalle den reellen Zusammenhang jener beiden Grössen finden lasse. Ich komme weiterhin auf denselben ausführlich zurück.

4. *Die Bewegungsgleichungen doppeltbrechender Medien.* Nach dieser Fixirung des gegenwärtigen Thatbestandes wende ich mich zu meiner Hauptaufgabe, der Ableitung der Bewegungsgleichungen der doppeltbrechenden Medien, oder vielmehr, da ich dieselben in meinem Buche p. 294—300 für durchsichtige und p. 300—328 für undurchsichtige Krystalle bereits gegeben, zur Erläuterung und Sicherstellung dieser Gleichungen und zur Pointirung der ihnen zu Grunde liegenden Voraussetzungen.

Für den hier vorgesetzten Zweck ist es zunächst ausreichend, dass ich mich auf durchsichtige Krystalle beschränke. Machen wir dabei der Einfachheit wegen die Symmetrieaxen zu Coordinatenaxen, so sind die in Rede stehenden Differentialgleichungen die Gleichungen (V) auf p. 297 meines Buches, nämlich:

$$(7) \quad \begin{cases} m \frac{d^2 \xi}{dt^2} - m' \frac{d^2 \xi'}{dt^2} C = e A_2 X + B_x m' \xi' \xi', \\ m \frac{d^2 \eta}{dt^2} - m' \frac{d^2 \eta'}{dt^2} C = e A_2 Y + B_y m' \xi' \eta', \\ m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - m' \frac{d^2 \zeta'}{dt^2} C = e A_2 Z + B_z m' \xi' \zeta'. \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \xi}{dt^2} C + \frac{d^2 \xi'}{dt^2} = - \xi' \xi', \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} C + \frac{d^2 \eta'}{dt^2} = - \xi' \eta', \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} C + \frac{d^2 \zeta'}{dt^2} = - \xi' \zeta'. \end{cases}$$

zu welchen dann noch als Ergänzungsgleichung hinzutritt:

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0.$$

Darin beziehen sich die m ; ξ , η , ζ auf Dichtigkeit und Schwingungscomponenten des intermolecularen, d. h. des mit diesem als gleich angenommenen Weltäthers, die m' ; ξ' , η' , ζ' auf die entsprechenden Grössen der mitschwingenden Körpermolecüle, e ist die Deformationsconstante des Aethers, X , Y , Z sind die Vektoren der aus der Verschiebung hervorgehenden Kraftcomponenten desselben, und B_x , B_y , B_z , C , $\mathfrak{k}$ ($= 4\pi^2/T_m^2$) sind Constanten.

Vorstehende Gleichungen lassen sich noch unter Heranziehung zweier vor kurzem von mir veröffentlichter Aufsätze¹⁾, in der Weise transformiren, dass man schreibt:

$$(7b) \quad \begin{cases} (m + \alpha_x) \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \alpha'_x \frac{d^2 \xi'}{dt^2} = e \Delta_2 X \\ (m + \alpha_y) \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \alpha'_y \frac{d^2 \eta'}{dt^2} = e \Delta_2 Y \\ (m + \alpha_z) \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \alpha'_z \frac{d^2 \zeta'}{dt^2} = e \Delta_2 Z \end{cases}$$

$$(8b) \quad \begin{cases} m' \frac{d^2 \xi'}{dt^2} = -\mathfrak{k} \xi' - \gamma \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{d^2 \xi'}{dt^2} \right) \\ m' \frac{d^2 \eta'}{dt^2} = -\mathfrak{k} \eta' - \gamma \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - \frac{d^2 \eta'}{dt^2} \right) \\ m' \frac{d^2 \zeta'}{dt^2} = -\mathfrak{k} \zeta' - \gamma \left(\frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \frac{d^2 \zeta'}{dt^2} \right). \end{cases}$$

Um nämlich die letztere Form auf die obere zurückzuführen, dazu hat man nur zu substituiren:

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= \frac{m' \mathfrak{k}}{1 + C}, & \gamma &= \frac{m' C}{1 + C}, \\ \alpha_x &= m' B_x C, & \alpha_y &= m' B_y C, & \alpha_z &= m' B_z C, \\ \alpha'_x &= m' (B_x - C), & \alpha'_y &= m' (B_y - C), & \alpha'_z &= m' (B_z - C), \end{aligned}$$

und darf oft die kleine Grösse C neben B vernachlässigt werden.

Selbstverständlich geht das gesammte System derselben für $B_x = B_y = B_z$ in das der isotropen Medien über, und bildet

1) Ketteler, Wied. Ann. **46**. p. 572. 1892 und Wied. Ann. **49**. p. 382. 1893.

umgekehrt jenes den Ausgangspunkt für seine hier stehende Erweiterung. Begreiflicherwise kann es sich an diesem Orte nur um die Correctheit der vorgenommenen Erweiterung handeln, und da genüge vorläufig die Bemerkung, dass, sofern man aus theoretisch-mechanischen wie aus experimentell-praktischen Gründen die Unabhängigkeit der Constanten ϵ' von der Orientirung einmal zugibt, der Grundsatz der Incompressibilität des Aethers in Verbindung mit der an sich *plausiblen Annahme eines Parallelismus der Aether- und Molecülschwingungen* sofort zu der weiteren Feststellung führt, dass auch die kleine Grösse C eine absolute Constante ist.

5. *Zweierlei Wellebenen.* Dies angenommen, soll der eigentliche Inhalt vorstehender Gleichungen durch eine Reihe von Bemerkungen klargestellt werden, die wir im wesentlichen an die Integration derselben anknüpfen. Ich werde hierbei zur leichteren Vergleichung mit dem darüber in meiner Optik p. 295—297 Gesagten, die obere, ältere Form der Gleichungen verwerthen.

Das vorausgesetzte Medium denke man sich als ein ausserordentlich feines, den Raum fast stetig erfüllendes elastisches Substrat, welchem in regelmässiger, aber discreter Anordnung eine Vielheit von verhältnissmässig massigen, mit inneren Kräften begabten sogenannten Molecülen eingefügt sei. Durch irgend einen Punkt 0 desselben mögen zur Zeit $t = 0$ zwei Wellebenen hindurchgehen, die resp. durch die Ausdrücke:

$$(9) \left\{ \begin{aligned} \varrho &= A_s \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{u_s x + v_s y + w_s z}{l_s} \right) = A_s \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta_s}{l_s} \right) \\ \varrho' &= A'_n \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{u_n x + v_n y + w_n z}{l_n} \right) = A'_n \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta_n}{l_n} \right) \end{aligned} \right.$$

dargestellt werden, und die miteinander irgend einen Winkel ϑ bilden. Beide Wellebenen werden sich mit den bezüglichen Geschwindigkeiten, resp. Wellenlängen ω_s, l_s und ω_n, l_n in der Richtung der δ_s, δ_n verschieben und nach Verlauf der Zeiteinheit in die resp. Lage kommen $\delta_s = \omega_s, \delta_n = \omega_n$. Wir verfolgen bei dieser Verschiebung insbesondere das Voranschreiten des Durchschnittspunktes beider Wellebenen, dessen Coordinaten x, y, z die Gleichungen beider Ebenen gemeinsam befriedigen.

Auf nebenstehender Figur sind die beiden Normalen als ON und OS bezeichnet; die parallelen punktierten Linien mögen sich auf zeitlich äquidistante Lagen des Wellensystemes ϱ' , die kurzen ausgezogenen Linien auf die entsprechenden des Systems ϱ beziehen. Es ist dann

zugleich OS der geometrische Ort der Durchschnittpunkte r, η, ζ , und wollen wir insbesondere die in der Richtung OS gelegene Molecülreihe ins Auge fassen.

Identificiren wir nun die beiden in den Differentialgleichungen 7 vorkommenden Schwingungsausschläge mit den vorstehend charakterisirten ϱ, ϱ' , so ist klar, dass nur Vorgänge in Betracht kommen, die sich in nächster Nähe der Molecülreihe OS abspielen. Dieselbe heiße

fortan die Strahlrichtung. Und wenn wir weiter den Ausschlag ϱ auf den incompressiblen Aether beziehen, so lässt sich sonach sagen, dass die Aethertheilchen transversal schwingen zur Strahlrichtung als ihrer Wellennormale, entsprechend den Gleichungen:

$$(10) \quad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0, \quad U_s u_s + V_s v_s + W_s w_s = 0.$$

Beziehen wir ebenso die Schwingungsausschläge ϱ' auf die Molecüle, so ist ON die Normale der Molecülwelle. Nun verlangt aber die schon oben erwähnte Annahme des Parallelismus der Ausschläge der Aether- und Körpertheilchen, dass die Schwingungen der letzteren schräg stehen auf ON, dagegen senkrecht auf OS. Bezüglich der Molecüle gelten also die Gleichungen:

$$(11) \quad \frac{d\xi'}{dx} + \frac{d\eta'}{dy} + \frac{d\zeta'}{dz} = \Theta, \quad U'_s u_n + V'_s v_n + W'_s w_n = \varepsilon,$$

so dass folglich die Molecüle abwechselnd Compressionen und Dilatationen erfahren. Andererseits verlangt aber jener Parallelismus die Beziehungen:

$$(12) \quad \begin{aligned} U'_s &= U_s, \quad V'_s = V_s, \quad W'_s = W_s, \\ U'_s u_s + V'_s v_s + W'_s w_s &= 0. \end{aligned}$$

Was jetzt schliesslich die Componenten X , Y , Z des bezüglichen resultirenden Vectors R betrifft, so soll gesetzt werden (für $x = r$, $y = \eta$, $z = \zeta$):

$$(13) \quad R = K \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{u_s x + v_s y + w_s z}{l_s} \right) = K \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta_s}{l_s} \right),$$

dabei aber die Richtung und Grösse der Vectoramplitude K vorläufig unbestimmt bleiben.

6. *Die Ausführung der Integration.* Führen wir nunmehr die Componenten sämtlicher Ausschläge entweder in der längeren oder kürzeren der Formen (9) beispielsweise in die erste der Differentialgleichungen (7) ein, so erhält dieselbe die Gestalt:

$$\begin{aligned} & -m \frac{4\pi^2}{T^2} A_s U_s \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta_s}{l_s} \right) + m' \frac{4\pi^2}{T^2} A_s' U_s' C \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta_n}{l_n} \right) \\ & = -e \frac{4\pi^2}{\lambda^2} n_s^2 K_x \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta_s}{l_s} \right) + B_x m' \epsilon A_s' U_s' \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta_n}{l_n} \right). \end{aligned}$$

Darin ist $\lambda = v T = (\sqrt{e/m}) T$ die dem $l = \omega T$ entsprechende Wellenlänge im Weltäther und $n_s = (v/\omega_s)$ gesetzt.

Sofern vorstehende Integrationsbedingung für alle Zeiten t bestehen soll, so zerfällt sie unter Berücksichtigung der Relationen (12) in die beiden folgenden Einzelgleichungen:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\delta_n}{l_n} = \frac{\delta_s}{l_s} \\ & \frac{m}{T^2} A_s U_s - \frac{m'}{T^2} A_s' U_s' C = \frac{e}{v^2 T^2} n_s^2 K_x - B_x \frac{m'}{T^2} A_s' U_s'. \end{aligned} \right.$$

Der ersteren zufolge ist:

$$(15) \quad \omega_n = \omega_s \frac{\delta_n}{\delta_s} = \omega_s \cos \vartheta.$$

Und was die zweite betrifft, so soll jetzt zuvörderst die Amplitude K senkrecht und parallel zur Strahlrichtung in Componenten zerlegt werden; die erste derselben wird keine andere sein, als diejenige, welche sich bezüglich der Beschleunigungen senkrecht zu OS als einzig wirksame erweist, nämlich A_s . Bezeichnen wir die zweite Componente als A_t , und den Winkel zwischen K und A_s durch ϑ' , so hat man sonach:

$$(16) \quad K = \sqrt{A_s^2 + A_t^2}, \quad A_t / A_s = \operatorname{tg} \vartheta'.$$

Demnach lässt sich weiter setzen:

$$\begin{aligned} K_x &= A_x^s + A_x^l = A_s U_s + A_l u_s \\ K_y &= A_y^s + A_y^l = A_s V_s + A_l v_s \\ K_z &= A_z^s + A_z^l = A_s W_s + A_l w_s. \end{aligned}$$

Substituirt man diesen Werth von K_x in der zweiten der obigen Bedingungsgleichungen (14), so geht dieselbe über in:

$$(17) \quad [m' A_s' \left(B_x \frac{T_s^2}{T_m^2} - C \right) - m A_s (n_s^2 - 1)] U_s = m A_l u_s n_s^2.$$

Behandelt man nunmehr in ähnlicher Weise die erste der Differentialgleichungen (8), so erhält dieselbe bei Substitution der Schwingungsausdrücke ϱ , ϱ' die Form:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi^2}{T_s^2} C A_s \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta_s}{l_s} \right) + \frac{4\pi^2}{T_s^2} A_s' \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta_n}{l_n} \right) \\ = \frac{4\pi^2}{T_m^2} A_s' \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta_n}{l_n} \right). \end{aligned}$$

Sie zerfällt gleichfalls in zwei Einzelgleichungen; und man erhält schliesslich:

$$(18) \quad \frac{A_s'}{A_s} = \frac{T_s^2}{T_m^2 - 1} C.$$

Durch Einführung des so gewonnenen Amplitudenverhältnisses lässt sich dann ersichtlich die vorhergehende Gleichung (17) auf die bekannte Gestalt bringen:

$$(19) \quad \begin{cases} (n_x^2 - n_s^2) U_s = n_s^2 \operatorname{tg} \vartheta' u_s \\ (n_y^2 - n_s^2) V_s = n_s^2 \operatorname{tg} \vartheta' v_s \\ (n_z^2 - n_s^2) W_s = n_s^2 \operatorname{tg} \vartheta' w_s \end{cases}$$

und so ergibt sich, sofern gleich die beiden übrigen analogen Gleichungen hinzugefügt werden, das vorstehende System.

Multiplicirt man dieselben der Reihe nach mit u_s , v_s , w_s und addirt, dann kommt:

$$(20) \quad \operatorname{tg} \vartheta' = \frac{n_x^2 U_s u_s + n_y^2 V_s v_s + n_z^2 W_s w_s}{n_s^2}$$

Nun werde um unseren Ausgangspunkt O die Strahlenfläche construirt. Irgend ein Radius Vector derselben sei unsere Molecülreihe OS als Normalrichtung der auf ihr transversalen Aetherwellen. Legt man dann an den Berührungs-

punkt eine Tangentialebene, fällt auf dieselbe von O aus ein Perpendikel und berechnet analytisch den Winkel zwischen ihm und der Richtung OS, so findet man denselben $= \vartheta'$. Andererseits ist jene Tangentialebene erfahrungsmässig diejenige Ebene gleicher Phasen, welche für das Sinusgesetz der Brechungswinkel in Betracht kommt. Identificiren wir dieselbe mit unserer Ebene der Molecülwelle, so wird $\vartheta' = \vartheta$, gleich dem Winkel zwischen der Strahlrichtung OS und der ihr zugeordneten Normale ON der Molecüle, so dass sich folglich schreibt:

$$(21) \quad \frac{A_i}{A_s} = \operatorname{tg} \vartheta, \quad K = \frac{A_s}{\cos \vartheta}.$$

Aus letzterem Ausdruck schliesst man, dass die *volle Amplitude* K der treibenden Aetherkraft den *Molecülwellen parallel* ist, während für die *wirkliche* Bewegung der *Aetherwellen* nur der *transversale Antheil* A_s verwerthet wird. Zu den Componenten jener vollen Aetherkraft treten eben gewisse Reactionskräfte hinzu, und diese zwingen zunächst die Molecüle, aus ihrer Wellebene herauszuschwingen.

Wie ich weiter unten zeigen werde, lässt sich andererseits der erstere Ausdruck sofort auch auf absorbirende Medien übertragen.

7. *Einige Folgerungen.* Fassen wir jetzt das Ergebniss unserer Erörterung nochmals zusammen, so haben wir die Strahlrichtung, d. h. diejenige, längs welcher die Lichtenergie sich fortpflanzt und erhält, als eine Richtung charakterisirt, längs welcher zunächst die massigen Molecüle und mit ihnen dann auch die nächste Aetherumgebung senkrecht hin- und herschwingt. Breiten wir nun fort und fort neue Molecülfäden neben einander aus, so bilden sich in denselben endlich ausgedehnte Wellebenen mit quasitransversalen Schwingungen, während jeder einzelne dieser Fäden innerhalb einer um ihn herumgelegten sehr engen Röhre transversale Aetherwellen aufweist. Es sind sonach bei der Lichtverbreitung im Inneren der ponderablen Medien die *Molecüle* das *wesentlich bestimmende Element*, wohingegen die Aethertheilchen in eine mehr secundäre Rolle zurücktreten. Ebenso functioniren in der Trennungsfläche selbst nur die *Molecüle* als *elementare Wellencentra*, wobei

dann die *Aetherelasticität* den Lichtübergang in je zwei dort *zusammenstossenden Röhren* vermittelt.

Vergleicht man schliesslich das betrachtete, wie mir scheint, in der Natur selbst vorkommende krystallinische Medium mit dem durch blossе Abstraction gewonnenen anisotropen Ideal-äther Fresnel's und Neumann's, so wird es begreiflich, dass von diesem aus der Dualismus zwischen Strahl und Normale und zwischen Schwingungen senkrecht und parallel zur Polarisationsebene unmöglich verstanden werden konnte. Welche Interpretation schliesslich speciell die Neumann'schen Gleichungen erfahren werden, mag der Zukunft vorbehalten bleiben; möglicher Weise finden sie auf Zustände Anwendung, bei welchen gar keine Absorption statt hat.

Wenn ich diesmal — allerdings erst nach einem mehrmaligen, bisher nie völlig geglückten Anlauf — die Hoffnung hege, die vorgetragene Theorie, welche es ersichtlich mit äusserst verwickelten Vorgängen zu thun hat, ohne wesentlichen Fehler zur Darstellung zu bringen, so mag zum besseren Verständniss des Ganzen noch Folgendes hervorgehoben werden. Zwar sind in meinem Buche genau die gleichen Endgleichungen entwickelt worden wie hier, indess habe ich p. 295 den Fehler begangen, statt *einer* zwei Incompressibilitätsgleichungen aufzustellen, nämlich unter der Annahme eines Parallelismus nicht nur der Schwingungen, sondern auch der Wellebenen simultan zu setzen:

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0, \quad \frac{d\xi'}{dx} + \frac{d\eta'}{dy} + \frac{d\zeta'}{dz} = 0.$$

Haben so zwar beide zu richtigen Resultaten geführt, so ist doch die letztere, wie oben gezeigt, unzulässig, und hat dieselbe den eigentlichen Kernpunkt der Theorie der Doppelbrechung, nämlich *die Feststellung der sogenannten Wellennormale als der Normale selbständiger, endlich ausgedehnter quasitransversaler Moleculwellen*, nicht gefördert, sondern vielmehr verdeckt.

Die Gesetze der Lichtbewegung in absorbirenden Krystallen.

8. *Einleitende Bemerkung.* Fällt eine linear polarisirte Welle auf die ebene Trennungsfläche eines absorbirenden Krystalles, so zerfällt dieselbe im allgemeinen in eine elliptisch polarisirte gespiegelte und in zwei elliptisch polarisirte ge-

brochene Wellen. Dabei hat man zunächst holoeidrische und hemieidrische Krystalle zu unterscheiden. Während bei letzteren der Charakter der elliptischen Polarisirung des durchgehenden Lichtes, also Amplitudenverhältniss und Phasenunterschied der Componenten, in gewisser Weise an die bestimmte Krystallrichtung gebunden erscheint, ist das bei den holoeidrischen Krystallen ebensowenig der Fall wie bei den gewöhnlichen isotropen Medien. In beiden sind längs einer gegebenen Strahlrichtung und Schwingungsebene je nach der äusseren Anregung alle denkbaren Uebergänge zwischen linearer und circularer Polarisirung möglich.

Gibt man diese Unterstellung zu, so folgt sofort, dass Phasendifferenzen zwischen den Strahlcomponenten weder in den Bewegungsgleichungen der absorbirenden holoeidrischen Krystalle noch auch in den mittelst der Integralausdrücke aus ihnen ableitbaren Bedingungsgleichungen vorkommen, sondern dass dieselben ausschliesslich in den Grenz- oder Uebergangsbedingungen die ihnen eigenthümliche Rolle spielen. Die genannten Bedingungsgleichungen werden daher ausser Winkeln nur noch Brechungs- und Extinctionscoefficienten enthalten können. Complexe Beziehungen werden somit überflüssig und noch weniger erscheint zur Ableitung der Einzelgesetze die Heranziehung eines sechsdimensionalen Raumes ¹⁾ als erforderlich.

Endlich ist zu beachten, dass eine Theorie der doppelten Brechung erst dann auf Vollständigkeit Anspruch hat, wenn sie nicht blos Rechenschaft gibt von der durch sie bewirkten Drehung der Wellennormalen, sondern auch den Weg zu bestimmen vermag, auf welchem sich die strahlende Energie durch den Krystall hindurch fortpflanzt.

In diesem Sinne gibt es meines Wissens für absorbirende Krystalle ausser der in meinem Buche p. 300—328 aufgestellten bis heute keine andere, und hat gerade das Bestreben, die Beziehungen zwischen Strahl und Normale in reeller Form zu gestalten, den Ausgangspunkt der Speculation gebildet.

1) Vgl. Drude, Wied. Ann. **32**. p. 599. 1887. — Hr. Liebisch, welcher über sämtliche bisherige Bearbeitungen dieser Materie den Stab bricht, gibt gleichwohl in seiner Krystallographie eine Darstellung der Voigt'schen Formeln. Auffallender Weise ist die anomale Dispersion in dem ganzen Werke ignoriert.

Obwohl ich die dort gegebenen Entwicklungen ganz und voll aufrecht erhalte, so komme ich an dieser Stelle um so lieber darauf zurück, als von meinen vormaligen Gegnern die Durchführbarkeit derselben bezweifelt ist, und als die vorstehende schärfere Präcisirung der Theorie der durchsichtigen Krystalle gerade auch den absorbirenden zu gute kommen wird.

9. *Die Bewegungsgleichungen und ihre Integration.* Was zunächst die Bewegungsgleichungen derselben betrifft, so erhält man dieselben ohne weiteres aus den Gleichungen (7) und (8), wenn man in letzteren (8) überall die Glieder $-\mathfrak{k}\xi' \dots$ durch:

$$-\mathfrak{k}\xi' - g \frac{d\xi'}{dt} \dots$$

ersetzt.

Behufs Integration derselben zerlegen wir die bisher auf der Strahlrichtung senkrechten beschleunigenden Kräfte der Aether- und Körpertheilchen, resp. die ihnen entsprechenden Schwingungsausdrücke (9) in drei axiale Componenten, fügen aber letzterem ausser dem gemeinsamen Absorptionsfactor eine axial verschiedene Verzögerung hinzu, sodass wir erhalten:

$$(22) \left\{ \begin{aligned} \xi &= A_x e^{-\frac{2\pi}{\lambda} \kappa (u'x + v'y + w'z)} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{u_s x + v_s y + w_s z}{l_s} - \psi_x \right) \dots \\ \xi' &= A_x' e^{-\frac{2\pi}{\lambda} \kappa (u'x + v'y + w'z)} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{u_n x + v_n y + w_n z}{l_n} - \psi_x - \Delta_x \right) \dots \end{aligned} \right.$$

unter u', v', w' die Richtungscosinus des Einfallslotthes als der Extinctionsrichtung verstanden.

Aus dem Prinzip des Parallelismus der Aether- und Molecülschwingungen lässt sich dann sofort die Folgerung ziehen, dass:

$$(23) \quad \mathfrak{A}_x' / \mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}_y' / \mathfrak{A}_y = \mathfrak{A}_z' / \mathfrak{A}_z, \quad \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z$$

sein muss, und so lassen sich dann diese axialen Amplituden auffassen als die Componenten sogenannter restaurirter Schwingungen $\mathfrak{A}_s$ und $\mathfrak{A}_s'$, deren gemeinsame Richtung durch die Cosinus $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ dargestellt werden soll.

Was sodann die frühere Amplitude K der in die Ebene der Molecülwellen fallenden treibenden Kraft $\Delta_2 R$, (Gleichung 13) betrifft, so treten an die Stelle derselben zunächst wieder zwei Einzelamplituden, die jedoch nicht, wie früher, senkrecht

und parallel zur Strahlrichtung (u_s, v_s, w_s) , sondern zu einer sich dem Strahle zuordnenden neuen Richtung (u, v, w) , genommen werden sollen, deren Bedeutung weiter unten zur Sprache kommen wird. Und werden schliesslich beide Kräfte unter Hinzufügung axialer Verzögerungen durch axiale Einzelkräfte ersetzt, so lässt sich beispielsweise schreiben:

$$(24) \left\{ \begin{aligned} X &= e^{-\frac{2\pi}{\lambda} \kappa(u'x + v'y + w'z)} \left[\mathfrak{A} u \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{u_s x + v_s y + w_s z}{l_s} - \psi_x \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathfrak{A}_l u \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{u_s x + v_s y + w_s z}{l_s} - \psi_x - l_x \right) \right] \dots \end{aligned} \right.$$

und es erscheint $\mathfrak{A}_l$ als eine gewisse restaurierte Longitudinalamplitude.

Bevor wir vorstehende Ausdrücke in die entsprechenden Differentialgleichungen einführen, mögen noch zur Vereinfachung, ganz wie für isotrope Medien, und in Uebereinstimmung mit der electromagnetischen Dispersionstheorie¹⁾ folgende Abkürzungen eingeführt werden. Es soll, sofern $T_m / T = \lambda_m / \lambda$ ist, gesetzt werden:

$$(25) \left\{ \begin{aligned} v_s^2 - \kappa_s^2 &= 1 + p D, & 2 v_s \kappa_s \cos r &= q D \\ p &= \frac{1 - \frac{\lambda_m^2}{\lambda^2}}{\left(1 - \frac{\lambda_m^2}{\lambda^2}\right)^2 + G^2 \frac{\lambda_m^2}{\lambda^2}}, & q &= \frac{G \frac{\lambda_m^2}{\lambda}}{\left(1 - \frac{\lambda_m^2}{\lambda^2}\right)^2 + G^2 \frac{\lambda_m^2}{\lambda^2}} \end{aligned} \right.$$

wo also λ_m die ungefähre Wellenlänge des Absorptionsmaximums, G die Absorptionsconstante und D eine Variable bedeutet, welche speciell für $\lambda = \infty$, ($\kappa = q = 0$) mit der brechenden Kraft ($v_\infty^2 - 1$) zusammenfällt. r endlich ist der Winkel zwischen Strahlrichtung und Einfallslot und daher definirt durch die Beziehung:

$$(25b) \quad \cos r = u_s u' + v_s v' + w_s w'.$$

10. *Resultate.* Wie sich die Einführung der Schwingungsausdrücke in die Differentialgleichungen gestaltet, habe ich in meinem Buche p. 309 und ff. im Einzelnen gezeigt. Hier mag der Hinweis genügen, dass sich sämtliche axiale Verzögerungen, von denen insbesondere l_x, l_y, l_z einander gleich werden, aus denselben eliminiren lassen. Die Bedingungs-

1) Ketteler, Wied. Ann. 49. p. 382. 1893.

gleichungen der Integration erhalten so schliesslich die übersichtliche Form:

$$(26) \begin{cases} \sqrt{p^2 + q^2} (D_x - D) u = \operatorname{tg} \vartheta \sqrt{(v^2 - x^2)^2 + 4 v^2 x^2 \cos^2 r} \cdot u \\ \sqrt{p^2 + q^2} (D_y - D) v = \operatorname{tg} \vartheta \sqrt{(v^2 - x^2)^2 + 4 v^2 x^2 \cos^2 r} \cdot v \\ \sqrt{p^2 + q^2} (D_z - D) w = \operatorname{tg} \vartheta \sqrt{(v^2 - x^2)^2 + 4 v^2 x^2 \cos^2 r} \cdot w \end{cases}$$

Gleichungen, die völlig denen der durchsichtigen Medien, (Gleichungen 19), analog sind und für $x = G = 0$ in diese übergehen.

Zu denselben tritt noch als Ergänzung die aus der Incompressibilitätsbedingung ableitbare Gleichung

$$(26b) \quad u u + v v + w w = 0$$

hinzu, der zufolge die restaurirte Amplitude $\mathfrak{U}$ auf der Hilfsstrahlenrichtung (u, v, w) senkrecht steht.

Unter Benutzung derselben ergeben die Gleichungen (26) in bekannter Weise leicht:

$$(27) \quad \begin{cases} D = D_x u^2 + D_y v^2 + D_z w^2 \\ \frac{u^2}{D_x - D} + \frac{v^2}{D_y - D} + \frac{w^2}{D_z - D} = 0, \end{cases}$$

von welchen Relationen die erstere dem Plücker'schen Elasticitätsellipsoid und die zweite der Wellenfläche entspricht. Analog erhält man daher für den halben Winkel der optischen Axen den Ausdruck:

$$\operatorname{tang} \theta = \sqrt{\frac{D_y - D_z}{D_x - D_y}}$$

und für den ordinären und extraordinären Strahl gesondert die ebenfalls ihrer Form nach bekannten Beziehungen:

$$D' = D_x + (D_z - D_x) \sin^2 \frac{\chi - \chi'}{2}$$

$$D'' = D_x + (D_z - D_x) \sin^2 \frac{\chi + \chi'}{2}.$$

Auch der Winkel ϑ zwischen den Richtungen (u_n, v_n, w_n) und (u, v, w) lässt sich in mannigfacher Weise ausdrücken. Begnügt man sich mit der einfachsten dieser Formeln, so leitet sich beispielsweise direct ab:

$$(28) \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sqrt{p^2 + q^2} (D_x u u + D_y v v + D_z w w)}{\sqrt{(1 + p D)^2 + (q D)^2}},$$

und die Ebene, in welcher $\mathcal{S}$ an u, v, w anzulegen ist, um u_n, v_n, w_n zu erhalten, ist ebenfalls durch bekannte Construction, resp. Symmetriebetrachtungen zu gewinnen. Repräsentirt aber schliesslich v_s die reciproke Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Richtung des Strahles, v_n in der Richtung der Normalen, so folgt nothwendig:

$$(29a) \quad v_n = \frac{v_s}{u_n u_s + v_n v_s + w_n w_s}.$$

Und was den dieser Normalen zukommenden Brechungswinkel r_n , bez. den zugehörigen äusseren Einfallswinkel e betrifft, so hat man:

$$(29b) \quad \begin{aligned} \cos r_n &= u_n u' + v_n v' + w_n w' \\ \sin e &= v_n \sin r_n. \end{aligned}$$

Wäre nun ausser D_x, D_y, D_z ; p, q eine bestimmte Strahlrichtung (u_s, v_s, w_s) und Extinctionsrichtung (u', v', w') als Einfallslloth gegeben, so würde man mittelst der vorstehenden Formeln leicht zu den Grössen D, v_s, κ_s und sodann weiter zu $\mathcal{S}$ sowie zur Normalrichtung (u_n, v_n, w_n) und den ihr entsprechenden Werthen v_n, r_n, e fortschreiten können, vorausgesetzt, dass die Beziehung zwischen den Richtungen u_s, v_s, w_s und u, v, w eine einfache wäre, oder dass gar beide Richtungen mit einander identificirt werden könnten. Dem ist aber leider im allgemeinen nicht so.

11. *Das Incompressibilitätsprincip.* Die practische Verwerthung unserer Formeln wird nämlich in hohem Grade dadurch erschwert, dass die Incompressibilität des Aethers einem jeden Strahle einen Hilfsstrahl zuordnet, dessen Richtung einmal selber vom Refractions- und Extinctionscoefficienten abhängt, dann aber auch im allgemeinen mit den Phasendifferenzen der äusseren Anregung variirt.¹⁾ Am leichtesten lassen sich diese Verhältnisse übersehen, wenn man den von aussen in den Krystall eintretenden Strahl auf ein erstes Coordinatensystem (I) bezieht, dessen ZX -Ebene zugleich das Einfallslloth enthält, so dass also in den Schwingungsausdrücken für ξ, η, ζ sowohl $v_1^s = 0$ als $v_1' = 0$ wird. Für dieses spezielle System erhält man mittelst der Gleichung:

1) Ketteler, l. c. p. 268 u. 301.

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0$$

die folgenden Beziehungen:

$$\mathfrak{U}_1 u_1 + \mathfrak{V}_1 v_1 + \mathfrak{W}_1 w_1 = 0$$

$$(30) \quad u_1 = \sqrt{\frac{\nu^2 u_1'^2 + x^2 u_1'^2}{\nu^2 + x^2}}, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = \sqrt{\frac{\nu^2 w_1'^2 + x^2 w_1'^2}{\nu^2 + x^2}}.$$

Demnach folgt, dass die Richtung u, v, w stets in der durch Strahl und Loth gelegten Ebene liegt. Geht man sodann von diesem ersten Coordinatensystem zu einem zweiten über, welches mit den Symmetrieaxen des Krystalles zusammenfällt, so lassen sich $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{V}_1, \mathfrak{W}_1; u_1, v_1, w_1; u_1', v_1', w_1'$ durch die entsprechenden $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ etc. ausdrücken. Ohne hier auf derartige langwierige Rechnungen einzugehen, beschränke ich mich auf die Erörterung der drei practisch wichtigsten Einzelfälle.

I) Für *senkrechten* Eintritt in den Krystall wird $u_1 = u_1', w_1 = w_1'$ und daher nicht bloss $u_1 = u_1, w_1 = w_1$ sondern auch allgemein:

$$(30) \quad u = u, \quad v = v, \quad w = w,$$

d. h. *Strahlrichtung und Hilfsrichtung fallen zusammen*.

II) Der Krystall habe ein solches Absorptionsvermögen, dass zwar die zweiten Potenzen von x/ν beizubehalten sind, die *vierten* aber bereits vernachlässigt werden dürfen. In diesem Falle gehen die Ausdrücke (30) über in:

$$(31) \quad u_1 = u_1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{\nu^2} \left(\frac{w_1'^2}{u_1'^2} - 1 \right)}, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = w_1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{\nu^2} \left(\frac{w_1'^2}{w_1'^2} - 1 \right)}$$

Lässt man nun bei den Versuchen vom senkrechten Eintritt an den Strahlenbrechungswinkel r nur soweit ansteigen, dass die innerhalb der Radicanden vorkommenden Producte noch gerade eben vernachlässigt werden können, so fallen wieder *näherungsweise* Strahl und Hilfsstrahl zusammen.

In beiden Fällen I und II lassen sich also in sämtlichen obigen Formeln die u, v, w durch die u, v, w ersetzen, und so hat es für sie nicht die mindeste Schwierigkeit, von einem gegebenen Strahle zu der ihm entsprechenden Normale und dem zugehörigen äusseren Einfallswinkel zu gelangen. Damit dürfte aber wohl allen practisch-experimentellen Anforderungen genügt sein.

III. Der Krystall habe ein beliebig starkes Absorptionsvermögen, aber die Lichtbewegung gehe vor sich in einem *Hauptschnitte*. In diesem Fall genügt das Coordinatensystem (I), und wenn wir fortan die angehängten *s* fortlassen, so geben die Gleichungen 25, 27 und 30:

$$\begin{aligned} \nu^2 - \kappa^2 - 1 &= p \left(D_x \frac{\nu^2 w^2 + \kappa^2 w'^2}{\nu^2 + \kappa^2} + D_z \frac{\nu^2 u^2 + \kappa^2 u'^2}{\nu^2 + \kappa^2} \right) \\ 2 \nu \kappa \cos r &= q \left(D_x \frac{\nu^2 w^2 + \kappa^2 w'^2}{\nu^2 + \kappa^2} + D_z \frac{\nu^2 u^2 + \kappa^2 u'^2}{\nu^2 + \kappa^2} \right). \end{aligned}$$

Man leitet daraus ab:

$$\nu^4 - \kappa^4 - \nu^2 A - \kappa^2 B = 0$$

$$\nu^2 - \kappa^2 - 1 - 2 \nu \kappa C = 0,$$

in welchen Gleichungen *A*, *B*, *C* die Bedeutung haben:

$$A = p (D_x w^2 + D_z u^2), \quad B = p (D_x w'^2 + D_z u'^2)$$

$$C = \frac{p \cos r}{q}.$$

Eliminirt man aus ihnen den Brechungsindex ν , so ergibt sich der Extinctionsindex κ durch Auflösung der folgenden Gleichung:

$$(32) \quad \kappa^8 a + \kappa^6 b + \kappa^4 c + \kappa^2 d + e = 0$$

mit den Coefficienten:

$$a = -16 C^2 (1 + C^2)$$

$$b = -16 C^2 [1 + B(1 + C^2)]$$

$$c = 4(1 + 2 C^2) [2 B(1 - \frac{1}{2} A) - A(1 + \frac{1}{2} B)]$$

$$d = 2(1 - \frac{1}{2} A) [2(1 - \frac{1}{2} A)(1 - \frac{1}{2} B) - A(1 - \frac{3}{2} A)(1 + 2 C^2)]$$

$$e = (1 - \frac{1}{2} A)^2 [(1 - \frac{1}{2} A)^2 - A^2].$$

Ist aber so κ gefunden, so ergeben sich dann auch ν sowie die Cosinus *u* und *w*.

Die obige biquadratische Gleichung reducirt sich unter der Bedingung $u = u'$, $w = w'$; $A = B$ auf eine Gleichung zweiten Grades. Für diesen Fall, identisch mit Specialfall I, erhält man ohne weiteres aus den Ausdrücken 25 und 27:

$$\nu^2 = \frac{1}{2} [\sqrt{(1 + p D)^2 + q^2 D^2} + (1 + p D)]$$

$$\kappa^2 = \frac{1}{2} [\sqrt{(1 + p D)^2 + q^2 D^2} - (1 + p D)]$$

$$D = D_x w^2 + D_z u^2$$

12. *Schlussbemerkung.* Die vorstehende Theorie der absorbirenden Krystalle glaube ich im Gegensatz zu der sechsdimensionalen Theorie der Hrn. Voigt und Drude als eine physikalische bezeichnen zu dürfen. Sie gibt die sämtlichen Einzelgesetze des Lichtdurchganges für die Specialfälle I und II mit nahezu derselben Leichtigkeit und für den Fall, dass bereits die zweiten Potenzen von κ , q und G vernachlässigt werden dürfen, mit gleicher Leichtigkeit und Eleganz wie für den Fall der ideell durchsichtigen Krystalle.

Hiernach hat auch die in meiner Optik p. 355—372 vorgetragene Theorie des Ueberganges des Lichtes in absorbirende anisotrope Medien in den vorerwähnten drei Fällen keine Schwierigkeit mehr. In das bezügliche Formelsystem tritt überhaupt der Normalbegriff nur insoweit ein, als er den dem Strahlenbrechungswinkel r , entsprechenden äusseren Einfallswinkel e zu berechnen gestattet.

Bezüglich der Theorie zusammengesetzter Krystalle, sowie insbesondere der Dispersion der Symmetrieaxen gelten die Abschnitte p. 319—328 des Buches.

Münster i. W., im April 1893.