IV.

Ueber

*die Ausdehnung des Eisens durch die
Wärme,*

von

GUST. GABR. HÄLLSTRÖM,
Prof. der Physik zu Åbo *).

Die Kenntniß von der Ausdehnung der Körper durch die Wärme ist noch nicht zu der Vollkommenheit gebracht, wie sie es in mehrerer Hinsicht verdient. Die Ursache liegt theils in dem Mangel sicherer Instrumente, um diese Ausdehnung zu messen, welche oft so klein ist, daß sie sich nicht beobachten läßt, theils auch in der ohne Grund angenommenen Hypothese, daß die Ausdehnungen geschehen im geraden Verhältnisse der Grade der wirkenden Wärme nach der Thermometerscale. In der Vermuthung, daß dieser Satz wahr sey, hat man die Ausdehnung bloß zwischen zwei Wärmegraden am Thermometer gemessen, und darnach durch eine einfache Proportionsrechnung die Ausdehnungen für alle andern Grade berechnet. Fand man z. B. die Ausdehnung zwischen m und μ Graden der Wärme $= a$, so glaubte man, daß die Ausdehnung für *einen* Grad der Wärme

*) Aus den *Kongl. Svenska Vet. Acad. Nya Handl.* 1805, p. 253 f. übersetzt vom Hütten-Inspector Dr. Blumhof zu Ludwigshütte im Großherzogth. Hessen.

auf jeder beliebigen Stelle der Thermometerscale
 $= \frac{a}{m - \mu}$, und für n Grade $= \frac{na}{m - \mu}$ sey.

Weil man hierbei etwas voraussetzt, was dem richtigen Gesetze der Ausdehnung dieser Körper durch die Wärme nicht gemäß ist, so sind alle durch Rechnung bestimmten Zahlen für die Ausdehnungen *falsch*, und müssen corrigirt werden. Nach dieser Correction würde der Ausdruck für die Ausdehnung seyn $= \frac{na}{m - \mu} + x$, wenn $n > m$, und $= \frac{na}{m - \mu} - x$, wenn $n < m$ ist; wo x eine solche Function von a und n bedeutet, daß $x = 0$ ist, sowohl für $n = m$, als auch für $n = \mu$.

Schon der Umstand läßt uns auf die Unrichtigkeit der angenommenen Hypothese schließen, daß verschiedene Beobachter, welche mit untadelhaften Instrumenten versehen waren, so ungleiche Ausdehnungen bei einerlei Art Körpern für eine Erwärmung vom Frost- bis zum Siedepunkte des Wassers gefunden haben, indem sie nicht einerlei Werthe für m und μ angenommen hatten. Man hat hieraus die Nothwendigkeit einer Correction einsehen gelernt, und es folgt zugleich daraus, daß die Hypothese von den mit den Thermometergraden im arithmetischen Verhältnisse stehenden Ausdehnungen falsch ist.

Wenn man die Angaben mehrerer Physiker von der Ausdehnung des Eisens vergleicht, so findet man obige Bemerkungen auf sie anwendbar.

Diese Angaben sind sehr ungleich, und erfordern Correctionen nach einem noch nicht bekannten Ausdehnungsgesetze. Aber auch selbst durch eine solche Correction lassen sie sich nicht einmahl mit einander in Uebereinstimmung bringen. Die Ungleichheit zwischen ihnen muß auch größtentheils von der Art, wie sie gefunden sind, und von der mindern Zuverlässigkeit der dabei gebrauchten Instrumente hergeleitet werden. Und wenn man dieses überlegt, so sind es nur sehr wenige, auf die man sich mit einiger Sicherheit verlassen kann.

Herr Prof. Fischer *) führt folgende Veränderungen in der Länge des Eisens von 0° , wo die Länge = 1 ist, bis zu 100° C. Wärme an, so wie sich solche bei verschiedenen Schriftstellern finden, als:

Condamine	0,00106.
Bouguer	0,00055.
Juan	0,00092.
Ellicott	0,00060.
Lowitz	0,00080.
Smeaton	0,00125 **).
Muffchenbroek	0,00075.
Herbert	0,00107.

*) In dessen physikalischem Wörterbuche, Göttingen 1801 Th. 4. Art. *Pyrometer*. S. 58. H.

**) Dieses Resultat gilt wirklich für die Ausdehnung in der Länge und nicht im Volumen, wie Gren in seinem Grundrisse der Naturlehre, Halle 1801. 4. Ausg. S. 337. und nach ihm Langsdorf in seinen physisch-mathematischen Abhandlungen über Gegenstände der Wärmelehre, Marburg 1796. S. 198. angenommen haben. H.

Von Condamine's und Herbért's Angaben habe ich nichts zu bemerken, weil mir die Methode, wonach solche gefunden worden, unbekannt ist.

Bouguer's Resultat ist fehlerhaft, sowohl weil sein Pyrometer ziemlich unvollkommen war, als auch wegen der Art, wie er solches gebraucht hat. Die Eisenstange, deren Ausdehnungen beobachtet werden sollten, wirkte nicht immer auf den Zeiger unter gleichem Winkel, wodurch eine unrichtige Anzeige entstehen mußte. Sie wurde in Schnee abgekühlt, dann aus ihm herausgezogen und an das Pyrometer gebracht, mittelst dessen Bouguer ihre Ausdehnung beobachtete, während sie allmählig die temperirte Wärme der umher befindlichen Luft annahm. Das Eisen gehört aber unter die besten Wärmeleiter; die Eisenstange mußte folglich, ehe die Beobachtungen anfangen, schon etwas wärmer geworden seyn, als sie im Schnee war, und umgekehrt mußte das Pyrometer, welches ebenfalls aus Eisen bestand, durch die Stange abgekühlt werden. Das Entgegengesetzte fand Statt, als die Eisenstange in siedend heißem Wasser erwärmt, herausgenommen und an das Pyrometer gebracht wurde, um ihre Zusammenziehung, während sie sich abkühlte und die mittlere Wärme der Luft annahm, zu beobachten. Sie war sicher nicht mehr 100° C. warm, als die Beobachtung anfang, und sie erwärmte nachher das Pyrometer selbst. Die Resultate aus diesen bei-

den Beobachtungen zusammen genommen zeigen also wahrscheinlich nicht die richtige Ausdehnung des Eisens zwischen 0° und 100° C. Wärme, und ich glaube, daß man in dieser Hinsicht dem Bouguer'schen Resultate nicht viel Zutrauen schenken müsse *).

Don Juan maafs Eisenstangen im Schatten in mittlerer Wärme, stellte solche nachher nebst einem Thermometer in die Sonne, und maafs sie von neuem, nachdem solche daselbst wärmer geworden waren. Er fand alsdann, daß eine 6 par. Fuß lange Stange sich um $26\frac{1}{2}$ Hunderttheilchen einer Linie verlängert hatte, wenn das Reaumur'sche Thermometer 10° Wärmeveränderung zeigte, von der mittlern Wärme 13° an gerechnet **). Wie Lambert, dem Hr. Fischer gefolgt ist, daraus die vorhin angeführte Ausdehnungszahl zwischen 0° und 100° C. berechnet habe, weiß ich nicht. Nach dem bloßen arithmetischen Verhältnisse finde ich solche viel zu groß, nämlich $= 0,00245$. Wenn man weiß, daß es bei Erwärmung der Körper durch das Sonnenlicht sehr auf die ungleiche Materie, die Farbe, den Glanz u. s. f. derselben ankommt, so muß man mit Recht Don Juan's Art, zu experimentiren, für so un-

*) *Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences de Paris*, 1745. p. 333 etc. H.

**) *Voyage historique de l'Amerique meridionale, par Don George Juan et par Don Antoine de Ulloa, Amsterdam*. 1752. 4. T. II, Part. II, livre IV. p. 86 etc. H.

vollkommen halten, daß kein Resultat daraus eine Anführung verdient.

Ellicott's Pyrometer war zwar untadelhaft, aber die, welche behaupten, daß er die Ausdehnung einer 1 Fuß langen Eisenstange zwischen 0° und $100^{\circ} = 0,00060$ gefunden habe, gründen sich auf eine Muthmaßung, welche unzulässig, wenigstens unzulänglich ist. Er selbst gab nur eine Vergleichung zwischen der Ausdehnung mehrerer Metalle für gleiche Wärmeveränderung, sagt aber nicht, wie viele Grade diese ausmacht, und in dieser Vergleichungsreihe findet sich die Zahl 60 für die Ausdehnung des Eisens. Hieraus läßt sich aber nicht auf die absolute Ausdehnung des Eisens für sich schließen *).

Lowitz's Versuch, woraus Lambert die Ausdehnung des Eisens zu 0,0008 berechnet hat, ist nichts weniger als zuverlässig. Eine 20 Fuß lange Eisenstange wurde im Sonnenscheine erwärmt, und die Veränderung der Wärme an einem Fahrenheit'schen Thermometer mit größter Eintheilung beobachtet. Lambert begnügte sich damit, die Wärmeänderung zu haben, und berechnet die Ausdehnung darnach. Auf dieses Resultat kann man keinen großen Werth legen **).

*) *Philosophical Transactions*, Vol. XLVII. for the years 1751, 1752. p. 485. H.

**) *Lambert's Pyrometrie*. Berlin 1779. 4. 219. S. 121. H.

Smeaton's Pyrometer war ohne Tadel, und deshalb gehören auch seine pyrometrischen Angaben unter die zuverlässigsten. Er beobachtete die Ausdehnung des Eisens für eine Wärmeveränderung zwischen 40 und 210° Fahrenheit oder 4 $\frac{2}{3}$ und 98 $\frac{2}{3}$ schwed. Graden (nach Celsius Thermometer mit hunderttheiliger Scale), und berechnete nach der gleichen Ausdehnungshypothese sein Resultat für die Veränderung des Eisens zwischen 0° und 100°. Die hier nöthige Correction, wenn diese Hypothese unrichtig ist, muß klein seyn, weil die Thermometergrade, welche seiner Beobachtung zum Grunde liegen, nicht viel von 0° und 100° verschieden sind *).

Muffchenbroek's Resultat gründet sich auf Versuche, welche er mit seinem ältern Pyrometer angestellt hat. Er beobachtete wirklich die Veränderung zwischen 0° und 100°, und fand, daß das Eisen sich dazwischen um $\frac{1}{1387} = 0,00073$ seiner Länge verlängerte **). An diesem Pyrometer mußte er aber Fehler bemerkt haben, denn er war nicht zufrieden damit und erdachte ein anderes. Mit diesem fand er, daß ein 6 rheinl. Zoll langer Eisendrath in kochendem Wasser sich so ausdehnte, daß das Pyrometer 75 Grad Aenderung zeigte ***). Aber was bedeuten diese

*) *Philosoph. Transact.* Vol. 48. P. 2. p. 598. H.

**) *Tentamina experimentorum naturalium captor. in Acad. del Cimento. Lugd. Bat.* 1731. 4. P. II. p. 22. H.

***) *Introd. ad Philos. naturalem, Lugd. Bat.* 1762. Tom. II. p. 610 etc. H.

Grade? An seinem ältern Pyrometer zeigte jeder Grad $\frac{1}{12\frac{1}{2}80}$ eines rheinl. Zolles. Sollten die Grade an dem neuern eben so viel bedeuten, welches er nicht ausdrücklich sagt, so wäre die Ausdehnung des Eisens bis zur Siedehitze des Wassers $= 0,00097$. Aber von wo an rechnet man diese Ausdehnung? Vermuthlich von der mittlern Wärme des Zimmers, wo der Versuch gemacht wurde? Hierzu dürfte alsdann noch die Ausdehnung vom Gefrierpunkte bis zur Mittelwärme zugelegt werden müssen, um die Ausdehnung für die Wärmeänderungen zwischen 0° und 100° zu finden. Man ist also nach Musschenbroek's Versuchen über die Ausdehnung des Eisens ungewiss. Auch scheinen seine Bemühungen mehr auf die Bestimmung des Verhältnisses der Ausdehnungen mehrerer Metalle in einerlei Temperatur, als auf das absolute Maass derselben für irgend ein Metall an sich, gerichtet gewesen zu seyn.

Aus diesen Bemerkungen folgt, daß die in obiger Vergleichungstafel am meisten von einander abweichenden Resultate wenig oder keine Rücksicht verdienen. Die nicht verwerflichen Angaben kommen zwar etwas mit einander überein. Doch läßt sich daraus schwerlich mit Sicherheit auf ihre Zuverlässigkeit schließen.

Wie die Ausdehnung für die einzelnen zwischen 0° und 100° befindlichen Thermometergrade beschaffen ist, weiß man noch nicht, und ohne diese Kenntniß kann man von den bisher

angestellten Versuchen wenig oder gar keinen Gebrauch machen. Aus dem Vorbergehenden dürfte schon die Nothwendigkeit einer Correction bei dem arithmetischen Zuwachse der Eisenlängen für arithmetisch wachsende Wärmegrade erhellen. Aber ist diese Correction additiv? Wenn ich von der Gleichheit mit einigen andern Körpern *) schliessen wollte, so würde ich schon im Voraus urtheilen, daß auch die Ausdehnung des Eisens für höhere Wärmegrade gröfser, und für geringere Temperatur, bei einerlei Menge von Graden, kleiner sey. Aber auch hier entsteht die Frage: nach welchem Gesetze dieser Zuwachs geschehen muß. Hier können blofs Versuche entscheiden. In der Ueberzeugung, daß diese nützlich, und die Resultate derselben bei mehrern genauen Correctionen von Beobachtungen unentbehrlich sind, habe ich mich mit Anstellung derselben beschäftigt, und bin so frei, solche der königl. Akademie der Wissenschaften zu weiterer Forschung vorzulegen.

Die Zuverlässigkeit meiner Versuche beruht grofsentheils auf der Beschaffenheit des Instruments, mit dem ich sie angestellt habe; ich fange

*) Z. B. Glas, dessen Ausdehnungsgesetz nach de Luc's Versuchen in den *Philos. Transact.* 1778. p. 478. folgendes ist: die Länge eines Stück Glases bei 0° verhält sich zu dessen Länge bei n° Wärme, nach Celsius Scale, wie $1 : 1 + 0,0000052 \cdot n + 0,00000032 \cdot n^2$. Vergl. *Diff. de dilatatione vitri calidioris*. Aboae 1781. (und diese *Annalen*, J. 1803. B. 14. S. 299. und B. 20. S. 387.). H.

daher mit einer Beschreibung desselben an. Es besteht im Wesentlichen aus einem mit einem Mikrometer versehenen Mikroskope, womit ein Punkt betrachtet wird, der sich an dem einen Ende einer Eisenstange befindet, deren anderes Ende unbeweglich befestigt ist. *ABC* (Taf. II. Fig. 1.) ist das von Dollond in London gemachte Mikroskop. Es enthält zwei convexe Gläser und bei *B* zwei parallele Mikrometerfäden, von denen der eine unbeweglich ist, der andere aber mittelst der Schraube *D* diesem parallel genähert oder von ihm entfernt werden kann. Der Zeiger *E*, welcher an der Schraube *D* fest ist, und mit ihr zugleich umgedreht wird, zeigt auf der Scheibe *F* die größern oder kleinern Verrückungen des Mikrometerfadens; der Umkreis dieser Scheibe ist in 40 gleiche Theile eingetheilt. Eine unter der Scheibe *F* befindliche kleinere Scheibe, die man durch ein Loch in der größern sieht, zeigt, wie viele Revolutionen die Schraube *D* und der Zeiger *E* gemacht haben. Der Tubus *AC* ruht vertikal auf einem festen hölzernen Gerüste *GHK*, welches auf einer dicken horizontal liegenden Tannen Diele *LMN* befestigt ist. Auf dieser Diele ruht zugleich der horizontale hölzerne Trog *OPQ*, in dessen Axe die gerade Eisenstange *SR* mit messingenen Fäden, so wie bei *T*, befestigt ist. Das Ende *S* dieser Stange geht durch das Ende des Trogs, und der ganze Trog wird gegen den Ständer *UZ* so fest gestützt, daß das Ende des

Eisendraths auf einer in dem Ständer befestigten messingenen Scheibe ruht. Der Trog *OPQ* ist mit Nägeln *a*, *b* gehörig auf dem Brette *LMN* befestigt. In *c*, in der verlängerten Axe des Tubus, ist an der Eisenstange ein kleiner Bügel von Messingdrath angebracht, welcher einen sehr feinen horizontalen und mit der Länge der Eisenstange winkelrechten messingenen Drath trägt, auf welchen man während der Beobachtung durch das Mikroskop sieht. Die Säule *HK* kann in der Oeffnung *de* rechts oder links gerückt werden, um den Bügel *c* gehörig in das Feld des Tubus zu bringen, wobei *HK* mit der Schraube *X* angezogen wird. Ausserdem gewährt die Verrückung der Mikrometerfäden eine genauere Justirung. Mittelft der Schraube *f* können die Mikrometerfäden mit dem Drathe am Bügel *c* parallel gestellt werden.

Um nun zu wissen, wie viel Verrückung am Bügel *c* einem Grade entsprechen, um den der Zeiger *E* sich fortbewegt, stellte ich bei *c* eine in halbe geometrische Linien eingetheilte messingene Scale, und beobachtete, wie oft die Schraube *D* umgedreht werden mußte, um den Mikrometerfaden von einer Theilungslinie zur andern zu rücken. Durch die Messung mehrerer Abtheilungen überzeugte ich mich, daß dazu 4 Revolutionen erforderlich waren; und da jede Revolution in 40 Grade eingetheilt ist, so ist die Verrückung des

Bügels *c* für jeden Mikrometergrad = $\frac{1}{3108}$ eines schwedischen Decimalzollens.

Hierauf füllte ich den Trog *OPQ* mit aufthauendem Schnee, welcher den Eisendrath auf allen Seiten umgab, und schrob den beweglichen Mikrometerfaden hervor, so daß er gerade über dem Drath am Bügel *c* stand, als der Eisendrath bis 0° abgekühlt war, welches mit einem Thermometer, dessen Kugel in dem Troge *OPQ* stand, und die Eisenstange, aber nicht den Trog berührte, beobachtet wurde. Nachdem ich die Mikrometergrade aufgezeichnet hatte, goß ich heißes Wasser in den Trog, um den Schnee ohne weitere Bewegung wegzuschaffen; und nachdem dieser geschmolzen und der Trog etwas erwärmt war, ließ ich das Wasser durch einen Heber heraus. Hierauf wurde der Trog wieder mit kochendem Wasser gefüllt, so daß die Eisenstange allenthalben damit umgeben war. Das Thermometer zeigte zwar in kurzer Zeit 100°, es fiel aber bald wieder, weshalb ich auf die dabei gemachte Beobachtung nicht viel rechne. Während das Wasser sich allmählig abkühlte, wurde die Stellung des beweglichen Mikrometerfadens über dem Bügel *c* für jeden fünften Wärmegrad am Thermometer beobachtet und aufgezeichnet, wo jedes Mahl eine sehr merkliche Veränderung Statt fand. Nachdem die Stange bis 20° abgekühlt war, so daß eben noch eine Beobachtung gemacht werden konnte, wurde im Troge wieder Schnee

zugefetzt, und das flüssige Wasser durch den Heber herausgezapft. Bemerkte ich nun, daß der Bügel *c* an eben der Stelle, wie vorher, im Schnee stand, so wußte ich auch, daß sich weder die Eisenstange noch das Mikrometer verrückt hatten. Dieser Schnee schmolz von der Wärme im Zimmer, und das Wasser wurde allmählig bis 20° erwärmt, so daß ich selbst Beobachtungen zwischen 0° und $+ 20^{\circ}$ machen konnte. Während des Versuchs veränderte sich die Wärme der Luft im Zimmer nicht, weshalb auch die Länge des Brettes *LMN*, und folglich auch der Abstand des Tubus von der Säule *UZ* oder von dem Ende *S* der Eisenstange unverändert war. Weil ich nun auch den Abstand des Bügels *c* von *S* zu 4 Fuß oder 40 Decimalzoll gemessen hatte, so kannte ich alle Elemente, die zu meiner Rechnung von der Ausdehnung dieser Eisenstange in ungleicher Wärme nöthig waren.

Folgende Vergleichungstafel enthält die zur Bestimmung des Ausdehnungs-Gesetzes nöthigen Beobachtungen.

Thermometergrade n. d. Cent. Sc.	Mikrometer- Umdrehungen.	Grade.	Ausdehn. des Eisens in 3200 Th. ein. Zolls.	Abbsolute Längen der Eisen- stange.
0	2	0	0	1,000000
+ 20	2	27	27	1,000211
+ 40	3	18	58	1,000453
+ 60	4	14	94	1,000734
+ 80	5	16	136	1,001063

Hier-

Hieraus sieht man gleich, daß die Ausdehnungen des Eisens nicht in demselben Verhältnisse, wie die Thermometergrade, sondern für grössere Wärmegrade mehr als für kleinere, zunehmen. Nach welchem Gesetze dieser Zuwachs erfolgt, muß aus diesen Versuchen bestimmt werden können. Es ist klar, daß wenn die in der dritten Columne stehenden Zahlen mit u bezeichnet werden, die dazu gehörigen absoluten Längen in der vierten Columne $= 1 + \frac{u}{40.3200}$ sind. Würste man daher nur, wie die Grösse u von dem dazu gehörigen Thermometergrade abhängt, so würde man die absoluten Längen des Eisens für jeden beliebigen Wärmegrad leicht finden können. Diese Abhängigkeit der Grösse u ist es also, welche ich hier zu untersuchen, und, wo möglich, zu bestimmen habe, um das Gesetz der absoluten Ausdehnungen des Eisens durch die Wärme aufzufinden.

Daß u keine annehmliche ganze algebraische Function des Wärmegrades ist, sieht man gleich daraus, daß weder die ersten, noch die zweiten oder dritten Differenzen der in der dritten Columne gegebenen Zahlen constant sind. Statt nun deshalb zu meinem Behufe eine andere mehr zusammengesetzte algebraische Function zu brauchen, werde ich die folgende transcendente annehmen :

$$u = A'a^x + B'b^x + C';$$

wo x die zu u gehörigen Thermometergrade be-

deutet, und A' , a , B' , b , C' constante Größen sind, welche aus den fünf in der vorhergehenden Tafel gegebenen Werthen bestimmt werden können. Ich wähle diese Function zur Bestimmung des Gesetzes für die Ausdehnung des Eisens, weil sie nur aus wenigen Gliedern besteht, auf fünf durch Versuche gefundenen Größen beruht, und mit Hülfe der Logarithmen sehr bequem zu berechnen ist.

Aus den in der Tafel angegebenen zusammen gehörigen Werthen von x und u erhält man folgende fünf Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= A' + B' + C'; \\ 27 &= A'a^{20} + B'b^{20} + C'; \\ 58 &= A'a^{40} + B'b^{40} + C'; \\ 94 &= A'a^{60} + B'b^{60} + C'; \\ 136 &= A'a^{80} + B'b^{80} + C'. \end{aligned}$$

Durch Subtraction jeder vorhergehenden von der folgenden, entspringen daraus diese vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} 27 &= A'(a^{20} - 1) + B'(b^{20} - 1); \\ 31 &= A'a^{20}(a^{20} - 1) + B'b^{20}(b^{20} - 1); \\ 36 &= A'a^{40}(a^{20} - 1) + B'b^{40}(b^{20} - 1); \\ 42 &= A'a^{60}(a^{20} - 1) + B'b^{60}(b^{20} - 1). \end{aligned}$$

Um A' heraus zu schaffen, multiplicire man jede dieser Gleichungen mit a^{20} , und ziehe sie von der folgenden ab, so entstehen folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} 31 - 27a^{20} &= B'(b^{20} - a^{20})(b^{20} - 1); \\ 36 - 31a^{20} &= B'b^{20}(b^{20} - a^{20})(b^{20} - 1); \\ 42 - 36a^{20} &= B'b^{40}(b^{20} - a^{20})(b^{20} - 1). \end{aligned}$$

Hieraus findet man endlich:

$$b^{20}(31 - 27a^{20}) = 36 - 31a^{20};$$

$$b^{20}(36 - 31a^{20}) = 42 - 36a^{20};$$

$$\text{und} \quad \frac{36 - 31a^{20}}{31 - 27a^{20}} = \frac{42 - 36a^{20}}{36 - 31a^{20}};$$

$$\text{oder} \quad a^{40} - \frac{18}{11}a^{20} + \frac{6}{11} = 0.$$

Und daraus ergibt sich

$$a^{20} = \frac{9 + \sqrt{15}}{11} = 1,1702712,$$

$$b^{20} = \frac{9 - \sqrt{15}}{11} = 0,4660925,$$

$$\text{und} \quad a = 1,0078927; \quad \text{Log } a = 0,0034143;$$

$$b = 0,9625506; \quad \text{Log } b = 0,9834236 - 1;$$

$$B' = -1,588766; \quad \text{Log } B' = 0,2010549;$$

$$A' = 153,588745; \quad \text{Log } A' = 2,1863594;$$

$$\text{und} \quad C' = -151,999979.$$

Bezeichnet man nun mit y die absoluten Längen des Eisens für die Thermometergrade x , und macht

$$A = \frac{A'}{40 \cdot 3200} = 0,0011999; \quad \text{Log } A = 0,0791494 - 3.$$

$$B = \frac{-B'}{40 \cdot 3200} = 0,0000124; \quad \text{Log } B = 0,0938499 - 5,$$

$$\text{und} \quad C = 1 + \frac{C'}{40 \cdot 3200} = 0,9988125;$$

$$\text{so ist} \quad y = Aa^x - Bb^x + C.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung ist folgende Tafel berechnet, welche leicht für jeden Thermometergrad vervollständigt werden kann. Die Versuche, worauf sie sich gründet, sind zwar alle bloß innerhalb der Wärmegrade von 0° bis 80° C. gemacht worden; weil aber das Eisen bei einer Tem-

peratur zwischen -40° und $+100^{\circ}$ sehr weit von seiner Schmelzhitze entfernt ist, und eben so wenig eine andere Veränderung in dessen Aggregationsform Statt findet, wobei gewöhnlich unregelmäßige Ausdehnungen oder Zusammenziehungen merkbar sind: so glaube ich, daß sich das gefundene Ausdehnungsgesetz mit Recht auf alle Grade der Kälte anwenden läßt, welche bei unsern Versuchen vorkommen können. Eben so glaube ich, daß es mit gleichem Grunde ohne merklichen Fehler bei noch viel höhern Graden der Wärme gebraucht werden kann.

Thermometer Cent.-Scale.	Länge des Eisens.
— 40°	0,999632
— 30	0,999721
— 20	0,999811
— 10	0,999904
0	1,000000
+ 10	1,000102
20	1,000211
30	1,000328
40	1,000453
50	1,000588
60	1,000734
70	1,000892
80	1,001063
90	1,001247
100	1,001446

Hieraus ergibt sich, daß ich die Ausdehnung des Eisens schon bei 80° Wärme so groß gefunden habe, als Condamine und Herbert bey 100°, wenn sie anders nach Reaumur's Thermometer beobachtet haben, und bei 90° so groß, als Smeaton bei 100°. Aber es folgt auch daraus, daß, wenn man bisher die Ausdehnungen für geringere Grade, bloß durch einfache Proportionirung der Thermometergrade nach Smeaton's Versuchen bestimmte, man für alle Grade von 0° bis 40° zu große Zahlen erhalten habe.

Ich wünschte nun auch zu wissen, ob das gefundene Ausdehnungsgesetz für die Länge des Eisens ein *Größtes* oder *Kleinstes* bei irgend einem Grade der Wärme oder Kälte anzeigen würde. Ich verfuhr deshalb nach der gewöhnlichen Methode, welche giebt

$$\frac{dy}{dx} = Aa^x \cdot \text{hyp. Log. } a - Bb^x \cdot \text{hyp. Log. } b = 0,$$

und daraus findet sich

$$x = \frac{\text{Log.}(B \text{ Log. } b) - \text{Log.}(A \text{ Log. } a)}{\text{Log. } a - \text{Log. } b}.$$

Da B positiv und $\text{Log. } b$ negativ ist, so muß der $\text{Log.}(B \text{ Log. } b)$ imaginär seyn, und also wird y niemahls ein Größtes oder Kleinstes, sondern wird unaufhörlich größer, wenn der Wärmegrad zunimmt, und umgekehrt, so weit sich dieses Ausdehnungsgesetz auf beide Seiten erstrecken kann.

Auch hier findet man, was ich bereits vorher erwähnt habe, daß nicht einmahl die dritten Differenzen der gefundenen Angaben beständig sind. Nimmt man indess eine Mittelzahl zwischen ihnen an, so kann man, wenn man die gefundene transcendente Formel des Ausdehnungsgesetzes für unbequem hält, sie in folgende algebraische umgestalten:

$$y = 1 + 0,000102 \cdot \frac{x}{10} + 0,000003 \cdot \frac{x}{10} \left(\frac{x}{10} - 1 \right) + 0,0000002 \cdot \frac{x}{10} \left(\frac{x}{10} - 1 \right) \left(\frac{x}{10} - 2 \right),$$

oder

$$y = 1 + 0,0000994x + 0,00000024x^2 + 0,000000002x^3.$$

Diese algebraische Formel weicht zwischen -40° und $+100^\circ$ bloß um einige Einheiten in der siebenten Decimalstelle von der transcendenten ab, und läßt sich besonders dann mit Bequemlichkeit statt dieser gebrauchen, wenn x nicht groß ist, z. B. zwischen $+20^\circ$ und -20° , wo man das letzte Glied derselben weglassen kann. Wenn x zwischen $+10^\circ$ und -10° fällt, können die beiden letzten Glieder ohne merklichen Fehler weggelassen werden.

Auch darin kommt diese algebraische Gleichung mit der vorigen transcendenten überein, daß sie für y weder ein *Maximum* noch ein *Minimum* giebt. Man erhält aus ihr zwar

$$\frac{dy}{dx} = 0,0000994 + 0,00000048x + 0,000000006x^2 = 0$$

daraus aber findet sich

$$x = -40 \pm \sqrt{-14966\frac{1}{2}}.$$

Z u f a s s.

Die zu den Versuchen gebrauchte Eisenstange war ein Eisendrath von beinahe 0,1 Decimall Zoll Durchmesser. Sein specifisches Gewicht bey 19° C. Wärme war = 7,737; das absolute Gewicht eines Stücks desselben war nämlich in freier Luft = 5532, und der Gewichtsverlust desselben im destillirten Wasser von 19° Wärme war = 715. Ich will dieses specifische Gewicht auf 0° reduciren, um die Vergleichung mit andern Eisenarten sicherer zu machen. Wenn sich die Wasserfäule nicht durch die Wärme veränderte, so wäre das gesuchte specifische Gewicht bei 0° = 7,737 ($Aa^{19} - Bb^{19} + C$)³ = 7,7417; weil aber das Wasservolumen nicht unveränderlich ist, so ergiebt sich hieraus nichts weiter, als daß das Gewicht des 19° warmen Wassers sich zum Gewichte des 0° warmen Eisens verhält wie 1:7,7417. Um die richtige Reduction auf 0° Wärme zu erhalten, nehme ich daher an:

das specifische Gewicht des Eisens in Beziehung auf Wasser von n° Wärme = V ;

dasselbe in Beziehung auf Wasser von 0° Wärme = V' ;

das Verhältniß der Voluminum des Wassers bei 0° und n° Wärme 1 : γ ;

das Verhältniß der Voluminum des Eisens bei 0° und n° Wärme 1 : δ .

Wäre das Volumen des Eisens in ungleicher Wärme nicht verschieden, so würde $\gamma : 1 = V : V'$ seyn; und wenn das Wasservolumen unveränderlich, und bloß das Volumen des Eisens veränderlich wäre, so würde $1 : \delta = V : V'$ seyn. Also muß, wenn beides veränderlich ist, $\gamma : \delta = V : V'$, und das richtige specifische Gewicht des Eisens bei 0° Wärme und in Hinſicht auf 0° warmes Wasser als Einheit: $V' = \frac{\delta}{\gamma} \cdot V$ seyn. Aus dem Vorhergehenden findet man $\delta = (Aa^n + Bb^n + C)^3$; auch habe ich für destillirtes Wasser zwischen 0° und $+20^\circ$ Wärme gefunden:

$$\gamma = (A''\alpha^n + B''\beta^n + C'')^3,$$

wenn

$$\text{Log. } A'' = 0,0036145 - 3; \text{ Log. } B'' = 0,8544320 - 4,$$

$$\text{Log. } \alpha = 0,0205076; \text{ Log. } \beta = 0,8725456 - 1,$$

und

$$C'' = 0,9982765.$$

(Vergl. *Annalen der Physik*, von Gilbert. Halle 1805. 8. Stück.) Wenn ich alsdann $n = 19$ setze, so finde ich

$$V' = \left(\frac{Aa^{19} + Bb^{19} + C}{A''\alpha^{19} + B''\beta^{19} + C''} \right)^3 \times 7,737 = 7,7243,$$

welches kleiner ist als das specifische Gewicht bei 19° Wärme.

Man irrt sich also, wenn man glaubt, daß das specifische Gewicht des Eisens bei 0° Wärme größer sey, als bei irgend einer andern höhern

willkührlichen Wärme, nämlich wenn das Gewicht des Wassers, welches mit dem Eisen gleich warm ist, zur Einheit angenommen wird. Eben diese Beschaffenheit dürfte es auch mit andern Körpern haben, und da nach der gewöhnlichen Lehre das specifische Gewicht der Körper zunimmt, je kälter und folglich je dichter sie werden, so muß dieses nur blofs in Vergleichung mit Wasser von einer gewissen unveränderten Temperatur verstanden werden.