ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o 3337-8.

Band 140.

I-2.

Ueber den Einfluss der Sternvertheilung auf die Bestimmung des Sonnenapex nach der Bessel'schen Methode.

Von Dr. E. Anding.

Die Erfahrung hat gezeigt, dass die Bessel'sche Methode zur Bestimmung der Richtung der Sonnenbewegung ein anderes Resultat gab, als wenn auf dasselbe Material von Sternen eine der anderen Methoden angewandt wurde, und man hat zunächst mehrfach die Vermuthung geäußert, dass die Ursache dieses Zwiespaltes in dem systematischen Charakter der Vertheilung der Eigenbewegungen zu suchen sei.

Diese Frage zur Entscheidung zu bringen, hat der Verfasser des gegenwärtigen Artikels in einer vor beinahe Jahresfrist erschienenen Schrift »Beziehungen zwischen den Methoden von Bessel und Argelander zur Bestimmung des Sonnenapex« den Gegenstand theoretisch untersucht, wobei sich ein zweifaches Resultat herausstellte, welches am Schluss jener Abhandlung ausdrücklich als solches festgestellt wurde:

Erstens ergab sich, dass hinsichtlich der Vertheilung der Eigenbewegungen (also der »motus peculiare«) die Resultate einerseits der Argelander'schen, andererseits der Bessel'schen Methode im Allgemeinen nichts miteinander zu thun haben, da beide Resultate im Allgemeinen von verschiedenen Gliedern abhängen. Dieses Ergebniss ist nichts anderes, als der mathematisch erwiesene und präcisirte Ausdruck für dasselbe, was früher schon vermuthet worden war.

Zweitens aber ergab sich nun auch, dass die Vertheilung der benutzten Sterne, also die Sterndichtigkeit, verschieden einwirkt auf das Resultat der Bessel'schen als auf das Resultat der Argelander'schen Methode.

Diese beiden Resultate wurden an einigen Beispielen illustriert, zuerst indem nur zweierlei partielle Eigenbewegungen betrachtet wurden (zu Resultat 1), ferner indem die Sterne auf einen beschränkten Theil des Himmels vertheilt angenommen wurden (zu Resultat 2), endlich indem die Sterne so angenommen wurden, wie sie Herr Kobold bei seinen Rechnungen muthmaasslich verwendet haben konnte (zu Resultat 2). Ich wählte nämlich, da Herrn Kobold's definitive Abhandlung »Untersuchung der Eigenbewegungen des Auwers-Bradley-Catalogs nach der Bessel'schen Methode« damals noch nicht erschienen war, diejenigen Sterne des Bradley'schen Catalogs, welche Herr Hecker (»Ueber die Darstellung der Eigenbewegungen der Fixsterne und die Bewegung des Sonnensystems«) verwendet hatte, dessen Resultat übrigens mit dem Kobold'schen die meiste Aehnlichkeit besitzt.

Speciell das zweite der obigen Resultate wurde näher präcisirt: Entwickelt man nämlich die Sterndichtigkeiten nach Potenzen der Coordinaten, so zeigte sich, dass die

Glieder erster Ordnung keinen Einfluss auf die Lage des berechneten Apex haben, wohl aber die Glieder zweiter Ordnung. Es hätten sich an jener Stelle auch die allgemeinen Ausdrücke für beliebige Ordnungen hinschreiben lassen, um so mehr, da alle Hülfsmittel bereit gestellt sind; doch zog ich es vor, nur von den zwei ersten Ordnungen zu reden, weil einerseits sofort zu sehen war, dass bei Weiterentwicklung nichts principiell neues hinzutritt, andererseits, weil ich die Darstellung möglichst übersichtlich halten wollte. Ich hätte dann übrigens von geraden und ungeraden Gliedern sprechen müssen.

Soviel über die Resultate meiner Abhandlung. Gegen diese Abhandlung wendet sich nun Herr Kobold in einem Artikel »Ueber die Vertheilung der Sterne mit merklicher Eigenbewegung« (Astr. Nachr. Nr. 3317). In den ersten Worten dieses Artikels wird mitgetheilt, dass in meiner Abhandlung der Einfluss einer ungleichen Vertheilung der Sterne auf die Bestimmung des Zielpunktes der Sonnenbewegung untersucht sei und dass ich hierdurch zu den Schlüssen gelangte, dass die »Bessel'sche Methode bei Voraussetzung einer gleichförmigen Vertheilung der Sterne über eine zwischen den Parallelkreisen von -30° und $+60^{\circ}$ enthaltene Zone nothwendiger Weise zu einer sehr kleinen Declination führen müsse und dass zweitens bei ungleichförmiger Vertheilung der Sterne im Sinne der Rectascension dieselbe Methode den Zielpunkt mit dem Dichtigkeitsmaximum der Sterne zusammenfallend ergeben müsse«. Diese beiden Sätze sind es, welche nun des Weiteren besprochen werden, und zwar mit der Absicht der Widerlegung.

Da es nach diesen Worten scheint, dass in diesen Sätzen das Ergebniss meiner Abhandlung enthalten sei, und da auch im weiteren Verlauf, wenn von meinen Folgerungen die Rede ist, lediglich diese beiden Sätze, niemals aber die oben von mir angeführten allgemeinen Resultate verstanden sind, so musste ich mit einigen Worten auf den Inhalt meiner Abhandlung eingehen. Wie man sieht, haben diese beiden Sätze ihren Platz im Rahmen des dritten der oben genannten Beispiele.

Was aber die Sätze selbst betrifft, so sind sie weder in dieser Form noch in dieser Zusammenstellung in meiner Abhandlung ausgesprochen worden. Das Letztere schon deshalb nicht, weil hier zwei verschiedene Momente coordinirt erscheinen. Hinsichtlich der Form aber sind im

vorliegenden Citat alle diejenigen Bedingungen weggelassen, unter denen die fraglichen Sätze abgeleitet und ausgesprochen sind.

Wenn nun auch die Untersuchung des Herrn Kobold sich nur mit diesen Sätzen beschäftigt, so ist die Tendenz seiner Untersuchung dennoch eine allgemeinere, denn er sagt, dass er eine nähere Prüfung nicht unterlassen durfte, »da jene beiden Behauptungen, wenn sie begründet wären, jedenfalls einen schweren Vorwurf für die Bessel'sche Methode in sich bergen würden«. Welches dieser Vorwurf sei, ist nicht gesagt. Ich nehme also an, er bestehe darin, dass der berechnete Apex von der Vertheilung der benutzten Sterne abhängig sei. Dies käme darauf hinaus, dass das zweite der oben von mir genannten allgemeinen Resultate der Abhandlung widerlegt werden soll.

Nach dieser Orientirung über den Artikel des Herrn Kobold schreite ich zur Beantwortung desselben.

I.

Wenn der Beweis vorliegt, dass das Resultat der Bessel'schen Methode im Allgemeinen von der Vertheilung der benutzten Sterne abhängig sei, so kann eine Widerlegung dieses Beweises, so weit ich sehe, auf drei Wegen herbeigeführt werden:

1. Man weist im Gange des Beweises denjenigen Punkt nach, an welchem ein Fehler begangen ist. Diesen Weg, welcher unter allen der sicherste und bequemste ist, hat Herr Kobold nicht eingeschlagen.

2. Man könnte auch, obwohl dies weit umständlicher wäre, numerisch vorgehen und aus einem gegebenen System von Sternen das eine Mal diese, das andere Mal jene Gruppen ausscheiden. Indem man denn je aus der restirenden Gruppierung den Apex bestimmt, erhält man, wenn diese beiden Resultate verschieden ausfallen, sofort die Bestätigung der allgemeinen Behauptung von Einfluss der Stern-dichtigkeiten, anderenfalls aber, nämlich wenn beide Resultate gleich sind, ergibt sich noch nicht eine Widerlegung, denn aus der Thatsache einer Uebereinstimmung zweier Fälle kann noch nicht auf die Uebereinstimmung in allen Fällen geschlossen werden. Es wären also möglichst viele solcher Gruppierungen herzustellen. — Herr Kobold hat thatsächlich den numerischen Weg eingeschlagen: aber er hat nicht möglichst viele Gruppierungen durch verschiedenartige Ausscheidungen aus dem Bradley-Auwers'schen Catalog hergestellt, auch nicht etwa bloss zwei Gruppierungen mit einander verglichen, sondern er vergleicht überhaupt keine Resultate und bespricht lediglich diejenige Vertheilung, welche seinen Rechnungen zu Grunde lag. Man sieht schon hieraus, dass damit ein wesentlicher Beitrag zur Frage nicht geleistet werden kann.

3. Endlich könnte man das Resultat der Bessel'schen Methode mit Resultaten vergleichen, die auf dasselbe Material, dagegen auf verschiedene Methoden gegründet sind. Man weiss, dass diese Resultate verschieden ausgefallen sind, aber man kann zunächst nicht sagen, ob diese Verschiedenheit in der Vertheilung der Eigenbewegungen oder der Sterne begründet sei. Dieser Weg ist also vollständig unbrauchbar.

II.

Genau genommen lassen sich also die Kobold'schen Erörterungen keiner dieser Formen einer möglichen Widerlegung unterordnen. Bevor ich aber frage, was dann jene Erörterungen eigentlich besagen, will ich denjenigen Satz, dessen Bekämpfung Herr Kobold sich vorsetzt, nun auch auf anderem Wege beweisen. In meiner Abhandlung kam es darauf an, die Behandlung der Bessel'schen Methode in Contact zu halten mit der Behandlung der schwerer tractablen Argelander'schen Methode, wodurch die Einführung von Hilfsmitteln erforderlich wurde, welche hier, wo es sich lediglich um die Bessel'sche Methode handelt, entbehrlich sind.

Seien also α, δ die Coordinaten des Sterns, A, D die des gesuchten Apex; seien ferner ψ, χ Positionswinkel und Distanz des entsprechenden Antiapex gegen den Stern, so dass also beide Grössen am, bezw. vom Stern gemessen sind; sei endlich ψ' der Positionswinkel der Richtung, in welcher sich der Stern thatsächlich bewegt. Dann wird die Bedingungsgleichung der Bessel'schen Methode

$$\Sigma \int \sin^2 \chi \sin^2 (\psi' - \psi) \cdot d\sigma d\psi' = \text{Minimum.} \quad (1)$$

Hierbei sei $d\sigma$ des Flächenelement, welchem der Stern angehört, und es beziehe sich das Zeichen Σ auf die Integration nach den Sternen, $\int$ auf die Integration nach den Eigenbewegungen.

Wenn nun gar keine Bewegung der Sonne vorhanden ist, sondern alle möglichen Eigenbewegungen gleichmässig auftreten, so wird $\int \sin^2 (\psi' - \psi) d\psi'$ ein constanter Factor, also wird die Bedingungsgleichung reducirt auf

$$\Sigma \sin^2 \chi d\sigma = \text{Minimum.}$$

Die Methode giebt also auch in diesem Fall noch ein Resultat, und zwar ein solches, welches lediglich von den Positionen der Sterne abhängig ist. Nimmt man also beispielsweise an, die Sterne seien auf der Kugelfläche auf eine ziemlich kleine Calotte beschränkt, so folgt durch Anwendung des Kobold'schen Rechenverfahrens ein Apex, der in dieser Calotte liegt. Dieser specielle Fall reicht schon hin, zu beweisen, dass das Resultat der Bessel'schen Methode im Allgemeinen von der Dichtigkeitsvertheilung der Sterne abhängig ist.

Dieser Beweis ist unter allen mir zur Verfügung stehenden der einfachste.

III.

Man denke sich die verschiedenen Eigenbewegungen der Sterne dadurch zu Stande gekommen, dass die räumliche Bewegung jedes Sterns nach einem gewissen partiellen Antiapex gerichtet sei, und es sei A' der Bogen zwischen diesem partiellen und dem gesuchten Antiapex. Wenn dann die Sterne auf die ganze Himmelskugel gleichmässig vertheilt sind, so kommt die Bedingungsgleichung der Bessel'schen Methode darauf hinaus, dass der Gleichung

$$\Sigma \sin^2 A' = \text{Minimum} \quad (2)$$

genügt werden muss, d. h. es gilt nach der Integration nach den Sternen dieselbe Bedingung für die partiellen Antiapices und den gesuchten Antiapex, welche von vornherein für die

Pole der Eigenbewegungen und den parallaktischen Aequator galt. Diesen Satz habe ich in der Abhandlung nur angeführt, aber nicht weiter verfolgt. Ich werde ihn hier von Neuem und zwar allgemeiner beweisen, weil sich dann ein zweiter Beweis für den von Herrn Kobold angegriffenen Satz ergibt.

Seien also ψ' χ' Positionswinkel und Distanz eines partiellen Antiapex von den Coordinaten $180^\circ + A'$, $-D'$ gegen den Stern von den Coordinaten α , δ ; seien ferner ϑ , A' Positionswinkel und Distanz des gesuchten Antiapex gegen den partiellen Antiapex, und sei ϑ' der Positionswinkel, welchen der Kreis vom Stern zum partiellen Anti-

apex in seiner Fortsetzung am Sterne bildet. Dann kann man die Variablen in (1) durch bequemere ersetzen. Es ist nämlich

$$\sin \chi \sin (\psi' - \psi) = \sin A' \sin (\vartheta' - \vartheta) \\ = \sin A' \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta' - \sin A' \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta'$$

da aber

$$\sin A' \sin \vartheta = \cos D \sin (A - A') \\ \sin A' \cos \vartheta = -\sin D \cos D' + \cos D \sin D' \cos (A - A')$$

so wird die in (1) auftretende Grösse

$$\sin \chi \sin (\psi' - \psi) = -\sin D \cdot \cos D' \sin \vartheta' + \cos D \cos (A - A') \cdot \sin D' \sin \vartheta' - \cos D \sin (A - A') \cdot \cos \vartheta' \quad (3)$$

Statt der Coordinaten α , δ des Sternes sind also jetzt die Coordinaten χ' , ϑ' eingeführt, von denen übrigens hier nur die eine auftritt. Die Sterncoordinaten α , δ treten aber auch in der Dichtigkeitsfunction der Sternvertheilung auf. Um sie auch hier durch diese neuen Coordinaten zu ersetzen, werden die drei Gleichungen dienen:

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta \cos \alpha &= +\cos D' \cos A' \cdot \cos \chi' + \sin A' \cdot \sin \chi' \sin \vartheta' - \sin D' \cos A' \cdot \sin \chi' \cos \vartheta' \\ \cos \delta \sin \alpha &= +\cos D' \sin A' \cdot \cos \chi' - \cos A' \cdot \sin \chi' \sin \vartheta' - \sin D' \sin A' \cdot \sin \chi' \cos \vartheta' \\ \sin \delta &= -\sin D' \cdot \cos \chi' - \cos D' \cdot \sin \chi' \cos \vartheta' \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Wenn nun $F(A', D')$ $d\Sigma$ die Menge der partiellen Antiapices im Flächenelement $d\Sigma$, ferner $f(\alpha, \delta)$ $d\sigma$ die Menge der Sterne im Flächenelement $d\sigma$ bedeutet, so schreibt sich die Gleichung (1) jetzt folgendermaassen:

$$\Sigma F(A', D') d\Sigma f \sin^2 \chi \sin^2 (\psi' - \psi) f(\alpha, \delta) d\sigma = \text{Minimum} \quad (5)$$

und hier ist $\sin \chi \sin (\psi' - \psi)$ durch seinen Werth (3), α und δ durch ihre Werthe in (4), $d\sigma$ durch seinen Werth $\sin \chi' d\chi' d\vartheta'$ zu ersetzen. Der explicite Ausdruck der linken Seite wird dann erhalten, wenn man hinsichtlich der partiellen Antiapices nach A' , D' , hinsichtlich der Sterne nach χ' , ϑ' integrirt.

So könnte man verfahren, wenn man die linke Seite entwickeln wollte. Unsere Absicht ist es aber, A' einzuführen. Nehmen wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, an, es handle sich lediglich um Dichtigkeitsungleichheiten in Declination: dann kann man statt des Quadrats von (3) schreiben

$$\sin^2 D \cos^2 D' \sin^2 \vartheta' + \cos^2 D \cos^2 (A - A') \sin^2 D' \sin^2 \vartheta' \\ + \cos^2 D \sin^2 (A - A') \cos^2 \vartheta' - 2 \sin D \cos D \cos (A - A') \sin D' \cos D' \sin^2 \vartheta'$$

da die zwei weggelassenen Glieder bei der Integration nach ϑ' verschwinden, wenn man die Function f nach Potenzen von $\sin \delta$ geordnet hat. Wir schreiben nun

$$\begin{aligned} \text{statt des ersten Gliedes: } (1 - \sin^2 D \sin^2 D') \sin^2 \vartheta' &= -\cos^2 D \sin^2 \vartheta' \\ \text{statt des zweiten Gliedes: } -\cos^2 D \cos^2 D' \cos^2 (A - A') \sin^2 \vartheta' &= +\cos^2 D \cos^2 (A - A') \sin^2 \vartheta' \\ \text{statt des dritten Gliedes: } &= +\cos^2 D \sin^2 (A - A') \cos^2 \vartheta' \\ \text{statt des vierten Gliedes: } -2 \sin D \sin D' \cos D \cos D' \cos (A - A') \sin^2 \vartheta' & \end{aligned}$$

und hier ist die erste Verticalcolumnne

$$= [1 - (\sin D \sin D' + \cos D \cos D' \cos (A - A'))^2] \sin^2 \vartheta' = [1 - \cos^2 A'] \sin^2 \vartheta' = \sin^2 A' \sin^2 \vartheta'$$

und die zweite Verticalcolumnne

$$\cos^2 D \cdot [\sin^2 \vartheta' (-1 + \cos^2 (A - A')) + \cos^2 \vartheta' \sin^2 (A - A')] = \cos^2 D \sin^2 (A - A') \cos 2 \vartheta'.$$

Setzt man die Summe der beiden erhaltenen Ausdrücke statt $\sin^2 \chi \sin^2 (\psi' - \psi)$ in die Grundgleichung (5) ein, so folgt

$$\Sigma \sin^2 A' f \sin^2 \vartheta' f(\delta) d\sigma + \cos^2 D \Sigma \sin^2 (A - A') f \cos 2 \vartheta' f(\delta) d\sigma = \text{Minimum} \quad (6)$$

wo unter Σ der selbstverständliche Factor $F d\Sigma$ nicht mehr geschrieben ist.

Diese eben gefundene Gleichung ist diejenige, welche der Gleichung (2) entspricht. Die Gleichung (2) bezog sich auf den Fall gleichmässiger Sterndichtigkeiten, die gegenwärtige Gleichung auf ungleiche Dichtigkeiten. Da

beide Gleichungen nicht identisch sind, so folgt, dass im Falle ungleichmässiger Sterndichtigkeiten ein anderes Resultat erhalten wird als bei gleichmässigen.

Die neue Gleichung enthält die frühere als speciellen

Fall in sich. Denn für $f(\delta) = \text{Const.}$ wird das Integral des zweiten Gliedes = Null und das Integral des ersten Gliedes = einer Constanten. Die Gleichung wird also

$$\Sigma \sin^2 \delta' = \text{Minimum}$$

was mit der Gleichung (2) übereinstimmt.

Betrachten wir die Gleichung (6) noch etwas näher.

$$c_i \cdot \sin^i \delta = c_i \cdot [D_0 \cdot \sin^i \chi' \cos^i \vartheta' + D_1 \cdot \sin^{i-1} \chi' \cos^{i-1} \vartheta' \cdot \cos \chi' + \dots]$$

so verschwindet bei der Integration nach χ' die Hälfte der Klammerglieder, und es bleiben nur die Glieder mit den Coefficienten $D_0, D_2, D_4 \dots$ übrig. Man weiss aber ferner, dass die Entwicklungsformen gelten:

$$\begin{aligned} \cos^i \vartheta' &= E_0 \cos i \vartheta' + E_2 \cos (i-2) \vartheta' + E_4 \cos (i-4) \vartheta' + \dots \\ \cos^{(i-2)} \vartheta' &= F_0 \cos (i-2) \vartheta' + F_2 \cos (i-4) \vartheta' + \dots \\ \cos^{(i-4)} \vartheta' &= G_0 \cos (i-4) \vartheta' + \dots \end{aligned}$$

Hieraus folgt aber, dass in der Klammer nur Winkelfunctionen der Form

$$\cos i \vartheta', \quad \cos (i-2) \vartheta', \quad \cos (i-4) \vartheta', \quad \dots$$

auftreten. Nun soll, wie die Gleichung (6) verlangt, die Function f , also auch die Klammer, also auch die eben hingeschriebenen Winkelfunctionen mit den expliciten Grössen $\cos 0 \vartheta'$ und $\cos 2 \vartheta'$ multiplicirt und integrirt werden: diese Integrale verschwinden aber nur dann nicht, wenn $\cos 0 \vartheta'$ und $\cos 2 \vartheta'$ auch unter jenen Winkelfunctionen auftreten, und das findet statt bei geradem i . Hiermit haben wir den obigen Satz näher präcisirt: Auf den Ort des berechneten Apex haben nur die geraden Glieder der Dichtigkeiten, nicht aber die ungeraden, einen Einfluss.

Dies ist der Satz, der in der Einleitung des gegenwärtigen Artikels erwähnt wurde und der in meiner Abhandlung mit aller Schärfe betont worden ist. Die vorliegende Ableitung desselben ist vollkommen unabhängig und, wenn man so will, etwas allgemeiner. Ich werde auf diesen Satz zurückkommen.

Alle diese Schlüsse gelten fort, wenn man auch die Dichtigkeitsänderungen in Rectascension berücksichtigt, indem man die zwei ersten der Gleichungen (4) zuzieht.

IV.

Es ist nicht überflüssig, den angegriffenen Satz noch auf eine dritte Art zu beweisen, so nämlich, dass die den Einfluss ausübenden Glieder explicit und rechnerisch verwendbar auftreten.

Ich nehme hierzu an, der wahre Apex habe die Coordinaten $A_0 D_0$ und es sei vom entsprechenden wahren

Explicit kommt ϑ' vor in

$$\sin^2 \vartheta' = 1/2 - 1/2 \cos 2 \vartheta' \text{ und in } \cos 2 \vartheta'$$

implicit aber im Factor f . Sei nun

$$f = c_0 + c_1 \cdot \sin \delta + c_2 \cdot \sin^2 \delta + c_3 \cdot \sin^3 \delta + \dots$$

und ersetzt man $\sin \delta$ durch seinen Werth aus der letzten der Gleichungen (4), also indem man beispielsweise schreibt:

Antiapex der berechnete Antiapex um den Bogen R , ein beliebiger partieller Antiapex um den Bogen R' entfernt.

Bezüglich der Vertheilung der Bewegungsrichtungen machen wir die vereinfachende Annahme, dass die Häufigkeit eines beliebigen partiellen Antiapex proportional sei der Function

$$F(A', D') = C_0 + C_1 \cdot \cos R' + C_2 \cdot \cos^2 R' + \dots \quad (7)$$

d. h. also, dass die Azimuthe der partiellen Antiapices nicht auftreten. Diese Gleichung definiert einerseits den jetzt eingeführten Begriff des wahren Antiapex, andererseits die früher benutzte Function F .

Die Häufigkeit der Sterne sei wieder, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, proportional zu

$$f(\delta) = c_0 + c_1 \cdot \sin \delta + c_2 \cdot \sin^2 \delta + \dots \quad (8)$$

Diese Ausdrücke (7) und (8) wären in die Bedingungengleichung (5) einzusetzen. Im gegenwärtigen Falle aber werde ich andere Variablen benutzen als bisher. Zunächst heisse $-\Phi$ der Positionswinkel des berechneten Antiapex am wahren Antiapex und $-\varphi$ der Positionswinkel des Sterns am wahren Antiapex, ferner heisse der Bogen vom Stern bis zum wahren Antiapex χ_0 und endlich sei x der Winkel zwischen den Bogen χ' und χ_0 . Sofern nun nach den partiellen Antiapices integrirt wird, sollen x und χ' als Variablen gelten, sofern man aber dann nach den Sternen integrirt, seien φ und χ_0 die Variablen.

Um diese Variablen einzuführen, schreiben wir zunächst in (5)

$$\sin \chi \sin (\psi' - \psi) = \sin \chi \sin [(\psi_0 - \psi) - (\psi_0 - \psi')]$$

oder

$$\sin \chi \sin (\psi' - \psi) = \sin \chi \sin (\psi_0 - \psi) \cdot \cos x - \sin \chi \cos (\psi_0 - \psi) \cdot \sin x \quad (a)$$

und hier sind, wenn man zuerst nach den partiellen Antiapices integrirt, die Factoren von $\cos x$ und $\sin x$ constant. Dagegen enthält auch das in F auftretende $\cos R'$ die Variablen x und χ' , da nämlich

$$\cos R' = \cos \chi_0 \cos \chi' + \sin \chi_0 \sin \chi' \cos x \quad (b)$$

Abgesehen also von der Vertheilung der Sterne wird jetzt der Ausdruck (5) in der Form

$$[C_0 + C_1 \cos R' + C_2 \cos^2 R' + \dots] \sin^2 \chi \sin^2 (\psi' - \psi) \cdot \sin \chi' d\chi' \cdot dx$$

nach χ' und x zu integrieren sein, nachdem man zuvor $\sin \chi \sin (\psi' - \psi)$ durch seinen Werth (a) und $\cos R'$ durch

seinen Werth (b) ersetzt hat. Diese Integration liefert

für die Glieder der nullten Ordnung den Beitrag $C_0 \cdot \sin^2 \chi \cdot 2 \cdot \pi$

für die Glieder der ersten Ordnung den Beitrag 0

für die Glieder der zweiten Ordnung den Beitrag

$$C_2 \text{ mal } \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 \chi \sin^2 (\psi_0 - \psi) \cdot \cos^2 \chi_0 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \\ + \sin^2 \chi \cos^2 (\psi_0 - \psi) \cdot \cos^2 \chi_0 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \\ + \sin^2 \chi \sin^2 (\psi_0 - \psi) \cdot \sin^2 \chi_0 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \pi \\ + \sin^2 \chi \cos^2 (\psi_0 - \psi) \cdot \sin^2 \chi_0 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \pi \end{array} \right.$$

Für die Glieder dritter Ordnung folgt wieder der Beitrag Null, wie überhaupt für alle Glieder ungerader Ordnung. Die Gesamtheit der hier berechneten Glieder, nämlich

$$2 \pi \cdot C_0 \cdot \sin^2 \chi + \frac{2}{3} \pi C_2 \cdot \sin^2 \chi \cos^2 \chi_0 + C_2 \pi \cdot \sin^2 \chi \sin^2 (\psi_0 - \psi) \sin^2 \chi_0 \\ + \frac{1}{3} C_2 \pi \cdot \sin^2 \chi \cos^2 (\psi_0 - \psi) \sin^2 \chi_0$$

schreiben wir etwas anders, indem wir

$$\text{im vorletzten Gliede } C_2 = \frac{2}{3} C_2 + \frac{1}{3} C_2$$

$$\text{im letzten Gliede } \frac{1}{3} C_2 = \frac{2}{3} C_2 - \frac{1}{3} C_2$$

setzen. Dann erhält man

$$(2 \pi C_0 + \frac{2}{3} \pi C_2) \sin^2 \chi + \frac{1}{3} \pi C_2 \cdot \sin^2 \chi_0 \cdot [\sin^2 \chi \sin^2 (\psi_0 - \psi) - \sin^2 \chi \cos^2 (\psi_0 - \psi)] \quad (9)$$

Die Entwicklung weiter zu treiben, als bis zu den Gliedern zweiter Ordnung, hat gar keinen Werth. Dagegen werde ich sie bei $f(\delta)$ bis zur vierten Ordnung inclusive fortführen. Diese Grenzen entsprechen sich gewissermassen. Dass nämlich hier die Glieder C_1 verschwinden, ist lediglich eine Eigenthümlichkeit der Bessel'schen Methode, und zwar eine recht wesentliche, denn dies sind die Glieder, wodurch sich Apex und Antiapex unterscheiden. Dagegen ist das Verschwinden der ungeraden Ordnungen in den Dichtig-

keiten auch den anderen Methoden eigen, wie ich freilich hier nicht beweisen kann.

Um jetzt auch die Integration nach den Sternen auszuführen und hierbei auf die Vertheilung der Sterne Rücksicht zu nehmen, multipliciren wir den Ausdruck (9) mit $f(\delta)$ und führen statt der verschiedenen Variablen diejenigen zwei Grössen φ und χ_0 ein, welche wir als Integrationsvariablen verwenden wollen. Dies geschieht hinsichtlich der in (9) auftretenden Grössen durch die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos \chi &= \cos R \cos \chi_0 + \sin R \sin \chi_0 \cos (\varphi - \Phi) \\ \sin \chi \sin (\psi_0 - \psi) &= \sin R \sin (\varphi - \Phi) \\ \sin \chi \cos (\psi_0 - \psi) &= \cos R \sin \chi_0 - \sin R \cos \chi_0 \cos (\varphi - \Phi) \end{aligned}$$

die man zur directen Verwendung umgestalten wird in

$$\sin^2 \chi = 1 - \cos^2 R \cos^2 \chi_0 - 2 \sin R \cos R \sin \chi_0 \cos \chi_0 \cos (\varphi - \Phi) - \sin^2 R \sin^2 \chi_0 \cos^2 (\varphi - \Phi) \quad (c)$$

und

$$\begin{aligned} \sin^2 \chi \sin^2 (\psi_0 - \psi) - \sin^2 \chi \cos^2 (\psi_0 - \psi) &= \sin^2 R \sin^2 (\varphi - \Phi) - \cos^2 R \sin^2 \chi_0 \\ &+ 2 \sin R \cos R \sin \chi_0 \cos \chi_0 \cos (\varphi - \Phi) - \sin^2 R \cos^2 \chi_0 \cos^2 (\varphi - \Phi). \quad (d) \end{aligned}$$

Die Variable δ dagegen ersetzen wir vermitteltst

$$\sin \delta = - \sin D_0 \cos \chi_0 + \cos D_0 \sin \chi_0 \cos \varphi. \quad (e)$$

Man wird also in der Gleichung

$$[(c_0 + c_1 \sin \delta + c_2 \sin^2 \delta + c_3 \sin^3 \delta + c_4 \sin^4 \delta) \text{ mal} \\ (2 \pi C_0 + \frac{2}{3} \pi C_2) \sin^2 \chi + \frac{1}{3} \pi C_2 \cdot \sin^2 \chi_0 \cdot (\sin^2 \chi \sin^2 (\psi_0 - \psi) - \sin^2 \chi \cos^2 (\psi_0 - \psi))] = \text{Min.} \quad (10)$$

im ersten Factor den Werth (e), im zweiten Factor die Werthe (c) und (d) substituiren und nach Multiplication mit $\sin \chi_0 d\chi_0 d\varphi$ die Integration ausführen. Zur besseren Uebersicht dieser etwas verwickelten Rechnung — es sind im Ganzen 72, allerdings sehr leichte Doppelintegrale ein-

zuführen — schreibe ich die numerischen Coefficienten durch einen Punkt derart in zwei Factoren getrennt, dass der erste Factor durch die Integration nach χ_0 , der zweite Factor durch die Integration nach φ entstanden ist.

Es ergibt das Glied c_0 den Beitrag:

$$\begin{aligned} (2 \pi C_0 + \frac{2}{3} \pi C_2) \cdot [2 \cdot 2 \pi - \cos^2 R \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \pi - \sin^2 R \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi] \\ + \frac{1}{3} \pi C_2 \cdot [\sin^2 R \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi - \cos^2 R \cdot \frac{16}{15} \cdot 2 \pi - \sin^2 R \cdot \frac{4}{15} \cdot \pi] \end{aligned}$$

Das Glied c_1 ergibt keinen Beitrag; dagegen liefert das Glied c_2 :

$$\begin{aligned}
& (2 \pi C_0 + \frac{2}{3} \pi C_2) \cdot [+ \sin^2 D_0 \cdot (\frac{2}{3} \cdot 2 \pi - \cos^2 R \cdot \frac{2}{5} \cdot 2 \pi - \sin^2 R \cdot \frac{4}{15} \cdot \pi) \\
& \quad - 2 \sin D_0 \cos D_0 \cdot (- 2 \sin R \cos R \cdot \frac{4}{15} \cdot \pi \cos \Phi) \\
& \quad + \cos^2 D_0 \cdot (\frac{4}{3} \cdot \pi - \cos^2 R \cdot \frac{4}{15} \cdot \pi - \sin^2 R \cdot \frac{16}{15} \cdot \pi (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos 2 \Phi))] \\
& + \frac{1}{3} \pi C_2 \cdot [+ \sin^2 D_0 \cdot (\sin^2 R \cdot \frac{4}{15} \cdot \pi - \cos^2 R \cdot \frac{16}{105} \cdot 2 \pi - \sin^2 R \cdot \frac{4}{35} \cdot \pi) \\
& \quad - 2 \sin D_0 \cos D_0 \cdot (+ 2 \sin R \cos R \cdot \frac{16}{105} \cdot \pi \cos \Phi) \\
& \quad + \cos^2 D_0 \cdot (\sin^2 R \cdot \frac{16}{15} \cdot \pi (\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos 2 \Phi) - \cos^2 R \cdot \frac{32}{35} \cdot \pi - \sin^2 R \cdot \frac{16}{105} \cdot \pi (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos 2 \Phi))]
\end{aligned}$$

Das Glied c_3 ergibt wieder keinen Beitrag; dagegen liefert das Glied c_4 :

$$\begin{aligned}
& (2 \pi C_0 + \frac{2}{3} \pi C_2) \cdot [+ \sin^4 D_0 \cdot (\frac{2}{5} \cdot 2 \pi - \cos^2 R \cdot \frac{2}{7} \cdot 2 \pi - \sin^2 R \cdot \frac{4}{35} \cdot \pi) \\
& \quad - 4 \sin^3 D_0 \cos D_0 \cdot (- 2 \sin R \cos R \cdot \frac{4}{35} \cdot \pi \cos \Phi) \\
& \quad + 6 \sin^2 D_0 \cos^2 D_0 \cdot (\frac{4}{15} \cdot \pi - \cos^2 R \cdot \frac{4}{35} \cdot \pi - \sin^2 R \cdot \frac{16}{105} \cdot \pi (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos 2 \Phi)) \\
& \quad - 4 \sin D_0 \cos^3 D_0 \cdot (- 2 \sin R \cos R \cdot \frac{16}{105} \cdot \frac{3}{4} \pi \cos \Phi) \\
& \quad + \cos^4 D_0 \cdot (\frac{16}{15} \cdot \frac{3}{4} \pi - \cos^2 R \cdot \frac{16}{105} \cdot \frac{3}{4} \pi - \sin^2 R \cdot \frac{32}{35} \cdot \pi (\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos 2 \Phi))] \\
& + \frac{1}{3} \pi C_2 \cdot [+ \sin^4 D_0 \cdot (\sin^2 R \cdot \frac{4}{35} \cdot \pi - \cos^2 R \cdot \frac{16}{315} \cdot 2 \pi - \sin^2 R \cdot \frac{4}{63} \cdot \pi) \\
& \quad - 4 \sin^3 D_0 \cos D_0 \cdot (+ 2 \sin R \cos R \cdot \frac{16}{315} \cdot \pi \cos \Phi) \\
& \quad + 6 \sin^2 D_0 \cos^2 D_0 \cdot (\sin^2 R \cdot \frac{16}{105} \cdot \pi (\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos 2 \Phi) - \cos^2 R \cdot \frac{32}{315} \cdot \pi - \sin^2 R \cdot \frac{16}{315} \cdot \pi (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos 2 \Phi)) \\
& \quad - 4 \sin D_0 \cos^3 D_0 \cdot (+ 2 \sin R \cos R \cdot \frac{32}{315} \cdot \frac{3}{4} \pi \cos \Phi) \\
& \quad + \cos^4 D_0 \cdot (\sin^2 R \cdot \frac{32}{35} \cdot \pi (\frac{3}{8} - \frac{1}{4} \cos 2 \Phi) - \cos^2 R \cdot \frac{256}{315} \cdot \frac{3}{4} \pi - \sin^2 R \cdot \frac{32}{315} \cdot \pi (\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos 2 \Phi))]
\end{aligned}$$

und die Glieder c_5 würden wieder, wie alle ungeraden Glieder, keinen Beitrag liefern.

Schon aus diesen Ausdrücken, welche wie gesagt noch nicht im mindesten gekürzt sind, würde man das Resultat ablesen können. Da nämlich Φ nur in $\cos \Phi$ und in $\cos 2 \Phi$ auftritt, so ist die Bedingung des Minimums erfüllt für $\sin \Phi = 0$: d. h. der berechnete Apex liegt im Meridian des wahren Apex.

Wenn nun auch R nur in der Form $\sin^2 R$ und $\cos^2 R$ vorkäme, deren Differentialquotient den Factor $\sin R$ besitzt,

so würde auch $R = 0$ der Bedingung des Minimums genügen, d. h. der berechnete Apex mit dem wahren Apex zusammenfallen. Dies ist aber nicht der Fall, da R noch in der Form $\sin R \cos R$ vorkommt, deren Differentialquotient $= \cos 2 R$ ist.

Wir ziehen jetzt die gefundenen Ausdrücke zusammen. Dies geschieht, indem wir durchgängig 1. den gefundenen Werth $\Phi = 0$ einsetzen, 2. den gemeinsamen Factor π^2 weglassen, 3. die absoluten Glieder weglassen. Dann folgt:

Im Gliede c_0 erhält die erste eckige Klammer den Werth: 0

$$\begin{aligned}
& \text{» » } c_0 \text{ » » zweite » » » » : } - \frac{48}{15} \cos^2 R \\
& \text{» » } c_2 \text{ » » erste » » » » : } - \frac{8}{15} \sin^2 (D_0 - R) \\
& \text{» » } c_2 \text{ » » zweite » » » » zunächst den Werth:}
\end{aligned}$$

$$+ \sin^2 D_0 \cdot (- \frac{48}{105} \cos^2 R) - 2 \sin D_0 \cos D_0 \cdot (+ \frac{32}{105} \sin R \cos R) + \cos^2 D_0 \cdot (- \frac{112}{105} \cos^2 R)$$

und wenn man

$$\text{im ersten Glied } \sin^2 D_0 \frac{80}{105} \cos^2 R, \quad \text{im letzten Glied } \cos^2 D_0 \frac{80}{105} \cos^2 R$$

addirt u. s. w., so folgt

$$\begin{aligned}
& \frac{32}{105} \cos R (- \cos 2 D_0 \cos R - \sin 2 D_0 \sin R) - \frac{80}{105} \cos^2 R \\
& = - \frac{32}{105} \cos R \cos (2 D_0 - R) - \frac{80}{105} \cos^2 R \\
& = - \frac{16}{105} \cos 2 (D_0 - R) - \frac{80}{105} \cos^2 R
\end{aligned}$$

wo wieder eine constante Grösse weggelassen ist, und wo sich das letzte Glied mit einem ähnlichen in c_0 vereinigen lässt.

Im Gliede c_4 wird die erste eckige Klammer zunächst:

$$\begin{aligned}
& + \sin^4 D_0 \cdot (- \frac{16}{35} \cos^2 R) - 4 \sin^3 D_0 \cos D_0 \cdot (- \frac{8}{35} \sin R \cos R) \\
& \quad - 4 \sin D_0 \cos^2 D_0 \cdot (- \frac{8}{35} \sin R \cos R) + \cos^4 D_0 \cdot (+ \frac{16}{35} \cos^2 R)
\end{aligned}$$

und da

$$\cos^4 D_0 - \sin^4 D_0 = \cos^2 D_0 - \sin^2 D_0 = \cos 2 D_0$$

u. s. w. wie im vorigen, so erhält man schliesslich

$$+ \frac{8}{35} \cos 2 (D_0 - R).$$

Die zweite eckige Klammer im Gliede c_4 , nämlich

$$\begin{aligned}
& \sin^4 D_0 \cdot (- \frac{48}{315} \cos^2 R) - 4 \sin^3 D_0 \cos D_0 \cdot (\frac{32}{315} \sin R \cos R) + 6 \sin^2 D_0 \cos^2 D_0 \cdot (- \frac{32}{315} \cos^2 R) \\
& \quad - 4 \sin D_0 \cos^3 D_0 \cdot (\frac{48}{315} \sin R \cos R) + \cos^4 D_0 \cdot (- \frac{208}{315} \cos^2 R)
\end{aligned}$$

werde ich nicht weiter zusammenziehen und auch nicht verwenden, da hier c_4 mit C_2 multiplicirt auftritt.

Multipliciren wir dieser Glieder mit den Factoren der

$$- C_2 \cdot ({}^{16/15} c_0 + {}^{16/63} c_2) \cos^2 R + C_0 \cdot 2 ({}^{8/15} c_2 + {}^{16/35} c_4) \cos 2 (D_0 - R) + {}^{16/63} C_2 c_2 \cdot \cos 2 (D_0 - R) = \text{Min.} \quad (11)$$

Bei gleichmässiger Dichtigkeit ist nun $c_0 = \text{const.}$, $c_2 = c_4 = \dots = 0$, mithin reducirt sich die linke Seite auf das erste Glied, und dieses wird ein Minimum, wenn $R = 0$ ist, d. h. der berechnete Apex fällt mit dem wahren

$$C_2 \cdot ({}^{16/15} c_0 + {}^{16/63} c_2) \sin 2 R + C_0 \cdot 2 ({}^{8/15} c_2 + {}^{16/35} c_4) \cdot \sin 2 (D_0 - R) + {}^{16/63} C_2 c_2 \cdot \sin 2 (D_0 - R) = 0$$

und diese Gleichung wird nicht befriedigt durch $R = 0$, d. h. der berechnete Apex fällt nothwendiger Weise ausserhalb des wahren Apex. Q. e. d.

V.

Nachdem unser Satz ein erstes Mal in der Abhandlung, auf drei weiteren Wegen nunmehr auch hier bewiesen ist (unter diesen war übrigens der Beweis in II in der Abhandlung schon angedeutet), gehen wir auf Nr. I zurück und fragen, welches denn die Argumente sind, mit Hülfe deren Herr Kobold den so gestützten Satz bestreitet.

Dass Herrn Kobold's Beweisgang ein numerischer ist, wurde schon in I erwähnt. Dort haben wir auch allgemein gesehen, dass er den Bedingungen einer möglichen numerischen Widerlegung nicht genügt. Speciell ist nun der Beweisgang folgender:

Die Himmelskugel wird durch eine Reihe aequidistanter Parallelkreise und Meridiane in viereckige Felder zerlegt, es werden für jedes dieser Felder die Anzahlen der Sterne abgezählt, welche Herr Kobold bei seinen Rechnungen benutzt hat, und diese Anzahlen werden auf inhaltsgleiche Flächen reducirt. Dann zeigen sich zwei Thatsachen: 1. dass die von mir vorausgesetzte Vertheilung der Sterne in Declination nicht vorhanden ist, 2. dass der Ort des Apex hinsichtlich der Rectascension nicht mit dem Dichtigkeitsmaximum der Sterne zusammenfällt, sondern gerade in der Gegend des Dichtigkeitsminimums liegt.

Vorher geht noch ein anderer Beweis: Die Himmelskugel wird in eine Reihe von Zonen zerlegt, welche mit dem berechneten Apex concentrisch sind. Auch hier werden die Sterne abgezählt und auf inhaltsgleiche Zonen reducirt und wieder zeigt sich, dass es gerade die sternärmsten Gegenden sind, wo die beiden parallaktischen Pole liegen.

Wir fragen zuerst, in wiefern diese Ergebnisse geeignet sind, die Bessel'sche Methode von dem Vorwurf des Einflusses der Sterndichtigkeiten zu befreien, d. h. unseren obigen Satz in Frage zu stellen. Wenn wirklich der berechnete Apex in so deutlich ausgesprochener Weise in das Minimum der Sterndichtigkeit fällt, so könnte sich von vornherein im Gegentheil eher die Vermuthung aufdrängen, dass die Sterndichtigkeit bei der rechnerischen Bestimmung des Apex ihre Rolle gespielt habe. »Die Vermuthung« sage ich — nicht »der Beweis«. Und wäre auch der berechnete Apex an einer anderen, nicht ausgezeichneten Stelle des Himmels gefunden worden, so folgt aus unserem Satz doch immer wieder, dass er dennoch vom wahren Apex verschieden gefunden worden ist.

entsprechenden eckigen Klammern S. 11 und fügen wir auch die Factoren c_0, c_2, c_4 hinzu, so erhält man statt der Gleichung (10) jetzt die Endgleichung:

Apex zusammen. Sind aber die Dichtigkeiten der Sterne ungleichmässig, verschwinden also $c_2, c_4 \dots$ nicht, so wird der Differentialquotient von (11):

VI.

Also das behauptete Resultat bezüglich der Bessel'schen Methode bleibt unberührt.

Aber es scheint, dass die beiden Specialsätze, an welche Herr Kobold anknüpft, und welche ich als Beispiele abgeleitet habe, widerlegt sind; nämlich dass unter der Voraussetzung, es seien beide Polarcalotten ausgeschlossen, der berechnete Apex in den Aequator oder in seine Nähe fällt, und ferner, dass er hinsichtlich der Rectascension in das Dichtigkeitsmaximum falle (vergl. oben, S. 2.)

Hierzu nehmen wir die Gleichung (11) wieder vor. Dann gilt der erste dieser Sätze genau, wenn $C_2, C_4 \dots = 0$ sind, angenähert aber, wenn diese Grössen genügend klein sind. Als zweite Bedingung ist erforderlich, dass der Factor von C_0 negativ sei. Unter diesen Bedingungen reducirt sich die linke Seite in der That dann auf ihr Minimum, nämlich

$$2 C_0 ({}^{8/15} c_2 + {}^{16/35} c_4)$$

wenn $R = D_0$ oder wenn der Apex im Aequator liegt.

Dieses Verhalten ist der Bessel'schen Methode eigenenthümlich, weil bei ihr C_1 nicht in die Bedingungsgleichung eingeht.

Die genannten zwei Bedingungen nun sind in der Abhandlung dort deutlich ausgesprochen, wo ich den Satz ausspreche (S. 21). Ob die eine dieser Bedingungen, nämlich hinsichtlich der C , erfüllt sei, darüber habe ich nichts entschieden und ich bemerke, dass sich in der Gegenwart auch nichts darüber sagen lässt, obwohl man einiges, aber sehr wenig, Allgemeine über die C aussagen kann, was mir freilich bei dieser Gelegenheit zu beweisen fern liegt. Dies ist der Grund, weshalb ich dem Satz noch eine andere Fassung gab, »seien die Eigenbewegungen überhaupt ganz regellos vertheilt«, so wird der Apex im Aequator liegen. Dann nämlich sind $C_2 = C_4 = \dots = 0$.

Aehnliches gilt nun auch hinsichtlich der Rectascensionen, obwohl die Gleichung (11) nur für Declinationen abgeleitet ist. Es zeigt nämlich der Bau der Gleichungen (4), dass bei den Rectascensionen kein neues Moment auftritt. Entwickelt man also auch hier, so wird sich wieder finden, dass die $c_1, c_3 \dots$ nicht auftreten, ferner dass auch C_1 nicht in die Lösung eingeht, mithin auch, dass bei endlichem C_1 , aber verschwindenden $C_2, C_3 \dots$ die Argelander'sche Methode ein von C_1 abhängiges Resultat giebt, dagegen das Resultat der Bessel'schen Methode lediglich von der Vertheilung der Sterne abhängt. Ausdrücklich hebe ich auch hier hervor, dass man eigentlich Rectascensionen und

Declinationen gar nicht trennen dürfe, sondern dass dies nur geschehen ist, weil hierher gehörige Untersuchungen noch nicht vorliegen und weil dieses Verfahren hinreichend ist, den allgemeinen Satz zu illustriren.

Bezüglich der Constanten C habe ich also weder in der Abhandlung noch hier etwas Bestimmtes ausgesagt. Dagegen kann man die c bestimmen und dann lässt sich unter Voraussetzungen über die C etwas über den resultirenden Apex aussagen.

Man wird also erwarten, dass Herr Kobold beispielsweise die Declinationen nach Potenzen von $\sin \delta$ entwickelt habe, und dass er dann zeigte, die thatsächlich von ihm benutzten Sterne genügen nicht der Bedingung

$${}^{8/15}c_2 + {}^{16/35}c_4 = \text{negativ}.$$

Dies ist aber nicht der Fall. Er zeigt an seinen Abzählungen lediglich die Thatsache, dass die Nord-Polar-Calotte nicht ausgeschlossen ist, woraus an sich noch nichts über die Sache gesagt ist.

Aehnliches gilt für die Behauptung über die Rectascensionen. Man hätte genau genommen nach Potenzen entwickeln, dann die Glieder ungerader Ordnung ausscheiden und dann zeigen müssen, dass der berechnete Apex nicht in das Dichtigkeitsmaximum der dann übrigbleibenden Function fällt. Dass die Glieder ungerader Ordnung nicht eingehen, war in der Abhandlung S. 20, 21 und auch oben (S. 7) genügend betont, doch sind hier die numerischen Verhältnisse so gelagert, dass sie ohne Rechnung zu übersehen sind.

Was endlich noch die Abzählung nach concentrischen Zonen betrifft, so liegen diese Zonen zum Theil in dem Gebiete, in welchem Herr Kobold überhaupt keine Sterne benutzen konnte, weil der Bradley'sche Catalog nicht weiter

geht, als bis etwa -30° Declination. Reducirt man also die Sterne der Zonen auf inhaltsgleiche Flächen, so werden solche Zonen, welche zum Theil in die sternenleere Südcapotte fallen, relativ weniger Sterne aufweisen können. Nun hat aber Herr Kobold bei der Reduction auf inhaltsgleiche Flächen nicht die ganze Zone als Inhalt betrachtet, sondern nur den nördlich von -30° liegenden Theil und er führt, um von den betreffenden Zonen das Südstück abzuschneiden, eine eingehende »mathematische Deduction« aus. Mit anderen Worten: er betrachtet die Sterndichtigkeit südlich von -30° nicht als $= 0$, sondern er betrachtet die Südcapotte überhaupt als nicht vorhanden. Dann freilich kommt dieselbe nicht mehr als sternenleere Fläche in Betracht. Ohne diese Reduction wären die Zahlen verwendbar gewesen, aber nicht, wie Herr Kobold meint, indem man das Dichtigkeitsmaximum oder Minimum aufsucht, sondern nach den obigen Vorschriften für die Declinationen, indem man unter δ jetzt Abstände vom parallaktischen Aequator versteht.

VII.

Es wurde oben (S. 1) schon erwähnt, wie ich auf die Vermuthung kam, Herr Kobold habe in seiner damals noch nicht erschienenen definitiven Abhandlung auch die Nordpolarcalotte ausgeschlossen. Da dies nun nicht der Fall ist, so folgt nur, dass mein Beispiel für den Einfluss der Vertheilung durch ein anderes ersetzt werden kann. Obwohl ich einem solchen Beispiel keinen Werth beimesse, ist es doch nicht uninteressant, die von Herrn Kobold S. 71 in Nr. 3317 mitgetheilten Zahlen für die relativen Dichtigkeiten vorzunehmen, um seinen Beweisgang an seinem eigenen Materiale zu vervollständigen. Herr Kobold fand

Declination:	+85°	+75	+65	+55	+45	+35	+25	+15	+5	-5	-15	-25	-35
Relative Sternenzahl:	229	182	125	145	134	143	207	224	176	164	145	97	20

Ich vereinige je 2 benachbarte Werthe (so dass also nur die Argumente 80° , 60° , $40^\circ \dots$ auftreten) und stelle, wie es erforderlich ist, diese Zahlen durch eine Formel

$$\text{Dichtigkeit} = c_0 + c_1 \cdot \sin \delta + c_2 \cdot \sin^2 \delta + c_3 \cdot \sin^3 \delta + c_4 \cdot \sin^4 \delta$$

nach der Methode der kleinsten Quadrate dar. Die Normalgleichungen spalten sich in solche für die Glieder gerader und ungerader Ordnung, und es sind die ersteren

$$\begin{aligned} +9 \cdot c_0 + 4.5000 \cdot c_2 + 3.3750 \cdot c_4 &= +199.1 \\ +4.5000 \cdot c_0 + 3.3750 \cdot c_2 + 2.8125 \cdot c_4 &= +802.6 \\ +3.3750 \cdot c_0 + 2.8125 \cdot c_2 + 2.4609 \cdot c_4 &= +598.4 \end{aligned}$$

$$c_0 = +386.4 \quad c_1 = +239.8 \quad c_2 = -807.3 \quad c_3 = -58.9 \quad c_4 = +635.9$$

und die Darstellung wird dann

Declination:	+80°	+60	+40	+20	0	-20	-40	-60	-80
Direct:	411	270	277	431	340	242	20	0	0
Rechnung:	381	308	300	380	386	221	23	-31	22

Man hätte diese Darstellung noch verbessern können, wenn man die Glieder fünfter Ordnung mitnahm, ohne dass die Glieder gerader Ordnung verändert worden wären.

Dagegen würden wir die Normalgleichungen ungerader Ordnung gar nicht brauchen, doch habe ich sie gebildet, nämlich

$$\begin{aligned} +4.4500 \cdot c_1 + 3.3750 \cdot c_3 &= 868.4 \\ +3.3750 \cdot c_1 + 2.8125 \cdot c_3 &= 643.7 \end{aligned}$$

um später die Darstellung durch die Formel übersehen zu können. Die Auflösung ergibt

Hiermit bilden wir jetzt den Factor von C_0 in Gleichung (11) und es folgt

$$^{8/15}c_2 + ^{16/35}c_4 = -140$$

also negativ. Es ergibt sich also wie in der Abhandlung: Sind die $C_2 \dots$ hinreichend klein, so muss auch speciell bei dem von Herrn Kobold benutzten Sternenmaterial der Apex in die Nähe des Aequators fallen. Es ist also nicht einmal nöthig, dass die Nordpolarcalotte direct sternenleer sei.

Würde man, wie ich es in der Abhandlung gethan habe, die Dichtigkeiten lediglich durch

$$c_0 + c_1 \cdot \sin \delta + c_2 \cdot \sin^2 \delta$$

dargestellt haben, so wäre die Darstellung weit ungünstiger geworden, aber trotzdem hätte sich c_2 , wie ich angenommen hatte, negativ gefunden. Es folgt nämlich

$$c_0 = +307.0 \quad c_1 = +195.1 \quad c_2 = -171.5.$$

Hinsichtlich der Rectascensionen habe ich eine entsprechende Rechnung nicht ausgeführt. Eine doppelte Periodicität ist durch die von Herrn Kobold gefundenen Zahlen ausgesprochen, wenn auch die Ungleichheiten des Verlaufs nicht so deutlich sind als in Declination.

Es kommt aber ein anderes Moment hinzu, das von Interesse ist. Es zeigt nämlich auch die Gesamtheit der Bradley'schen Sterne in Rectascension eine doppelte Periodicität. Aber es besteht der Unterschied, dass die Maxima der stärker bewegten Sterne mit den Minima der Gesamtheit der Sterne zusammenfallen; und zwar fällt der berechnete Apex in ein Minimum der Kobold'schen Auswahl, also in ein Maximum der Bradley'schen Gesamtheit. Obwohl ich in der Abhandlung (S. 24) ausdrücklich sage, dass ich nicht im Entferntesten behaupten wolle, das Kobold'sche Resultat sei lediglich ein Ausdruck der Vertheilung der

Sterne, womit ich also den numerischen Ergebnissen keinen allgemeinen Werth beilege, muss ich doch erwähnen, dass Herr Kobold dort, wo er von meinem Resultat über die Lage des Apex spricht, zwar das sagt, dass der berechnete Apex in das Minimum seiner Sternenauswahl fällt, dass er aber dort zu sagen unterlässt, dass der berechnete Apex im Dichtigkeitsmaximum der Gesamtheit des Bradley'schen Catalogs liegt.

Kaum ist nöthig zu bemerken, dass jetzt die directen Maxima und Minima verwendbar sind, weil es sich um eine doppelte Periodicität handelt.

Auf die Ursachen der vorerwähnten Erscheinung kann ich hier nicht eingehen. Die betreffende Erörterung nimmt in der Art meiner Abhandlung, also nicht in der Breite des gegenwärtigen Artikels dargestellt, mehr als den Raum jener Abhandlung ein. Der Gegenstand ist seit bald einem Jahr schon ausgearbeitet und wird publicirt werden in einer zum weitaus grössten Theil schon druckfertig vorliegenden Schrift »Kritische Untersuchungen über die Bewegung der Sonne durch den Weltraum«, in welcher ich auch die anderen zur Apexbestimmung angewandten Methoden und die hierauf bezüglichen Fragen zur Erörterung bringen werde. Bis zum Erscheinen dieser Abhandlung muss ich die Beweise für einige hier nicht bewiesenen Behauptungen verschieben. Ich bemerke übrigens, dass der im gegenwärtigen Artikel besprochene Einfluss der Sterndichtigkeiten nicht einen Vorwurf gegen die Bessel-Kobold'sche Methode in sich birgt, weil ich zeigen werde, dass dieser Umstand mehr oder minder bei allen Methoden gilt. Speciell haben gerade die von Herrn Kobold abgeleiteten Zahlen eine eigenartige Bedeutung, aber sie liegt in anderer Richtung, als wo sie gesucht worden ist.

München 1896 Jan. 3.

E. Anding.

Spectrographische Untersuchungen über δ Cephei

am 30 Zöller der Pulkowaer Sternwarte im Jahre 1895 von A. Belopolsky.

Das wenig günstige Wetter im Herbst 1895 und auch der Umstand, dass ich gleichzeitig den veränderlichen Stern η Aquilae zu untersuchen begonnen hatte, erlaubten nur wenige Spectrogramme von δ Cephei zu erhalten. Die Lage der beiden Sterne gestattet bei der jetzigen Einrichtung am Thurm des 30 Zöllers kaum beide Sterne an einem und demselben Abend zu beobachten.

Es wurde derselbe Spectrograph wie 1894 dazu angewandt, nur erlaubten einige Verbesserungen, das Spectrum weiter ins Violet hinein zu benutzen. Deswegen wurde seit dem 9. September das Prisma im Minimum der Ablenkung für die Gegend $\lambda = 431\mu\mu$ eingestellt und die Messungen erstreckten sich in den günstigsten Fällen von $\lambda = 443\mu\mu$ bis $420\mu\mu$, während diejenigen im vorigen Jahr nur in den Grenzen $445\mu\mu$ bis $432\mu\mu$ gemacht wurden.

Es wurden nur die künstlichen Linien des Eisenspectrums benutzt, welches um die Mitte der Exposition photographirt wurde. Die Einrichtung für das Verdecken desjenigen Theils des Spalts, auf welchem sich das Sternbild

projicirte, ist geändert und jetzt wird eine Zunge von 0.2 mm Breite mittelst eines Hebels eingeschoben, wodurch auf den Collimator jetzt jeder Druck vermieden ist.

Meistens ist nur eine Aufnahme dieses Sterns an einem und demselben Abend gemacht worden.

Die Reductionen der Messungen wurden mittelst dreier Spectrogramme der Sonne gemacht, welche am 26. August und am 9. und 16. September erhalten wurden (auf Thomas'schen Diapositiv-Trockenplatten).

Trotz der allgemeinen Aehnlichkeit des Sonnen- und Sternspectrums sind doch merkliche Unterschiede im Aussehen einiger Linien zu bemerken, worauf ich schon im vorigen Jahre hindeutete. Es kommen nämlich Linien vor, welche im Sternspectrum sehr markirt sind, während im Sonnenspectrum an diesem Platze nur schwache Linien zu sehen sind. Die Eisenlinien befinden sich, was Intensität betrifft, nicht unter den genannten Linien. Z. B. sind die Eisenlinien $\lambda = 430.8\mu\mu$, $438.4\mu\mu$, $440.5\mu\mu$ und $441.5\mu\mu$ schwächer als sie gewöhnlich in den Sternen dieses Typus