VIII. *Theorie des Lichtes für vollkommen durchsichtige Media; von W. Voigt.*

Der Zweck der folgenden Untersuchungen ist, nachzuweisen, in wie weit die Elasticitätstheorie bei grösster zulässiger Erweiterung die Gesetze der optischen Erscheinungen abzuleiten vermag.

Eine solche Untersuchung scheint mir geboten, nachdem in einer Reihe von Arbeiten optische Theorien auf Gleichungssystemen erbaut worden sind, welche mit den gebräuchlichen Elasticitätsgleichungen im Widerspruch stehen. Ich halte ein solches Verfahren für sehr bedenklich, nachdem die durch die Elasticitätslehre gelieferten Gesetze durch Beobachtungen, welche viel directer sind, als die in der Optik möglichen, so vielfach geprüft und bestätigt worden sind. Eine Theorie, welche mit diesen Beobachtungsergebnissen in Widerspruch tritt, scheint mir ein Aufgeben des Zusammenhanges zwischen den optischen und den gewöhnlichen elastischen Phänomenen zu enthalten. Ich werde zeigen, dass die strenge Elasticitätstheorie selbst noch eine Reihe von Hilfsmitteln bietet, optische Erscheinungen zu erklären, welche bisher nicht benutzt und von jenem Bedenken frei sind.

Freilich alle optischen Vorgänge, welche von Absorption begleitet sind, kann ihrer ganzen Grundlage nach die Elasticitätstheorie in ihrem gegenwärtigen Zustand noch nicht erklären, da sie keinerlei Schwingungen zulässt, die wir als Wärmeschwingungen deuten können. Ehe aber solche nicht theoretisch erklärt sind, wird jede Theorie der Absorptionserscheinungen im weitesten Sinne des Wortes (Eigenfarben der Körper, Dichroismus, anomale Dispersion, Fluorescenz u. dergl.) das Wesen der Sache nicht treffen.

Bedenkt man, wie sehr gewisse optische Erscheinungen (z. B. die Dispersion) mit Absorptionsphänomenen zusammenhängen, so möchte man zunächst glauben, dass, wenn für die Absorption gegenwärtig eine strenge Theorie unmöglich ist, dasselbe für alle Gebiete der Optik gelten müsste. Indessen kennen wir Körper mit so geringer Absorption und so aus-

geprägter Dispersion, Doppelbrechung und dergleichen, dass bei ihnen unmöglich das eine als eine Vorbedingung des anderen anzusehen ist, und man gewiss berechtigt ist, jene Spur von Absorption vollständig zu ignoriren, ohne damit etwas für das Zustandekommen der genannten Erscheinungen Wesentliches zu vernachlässigen. Als Aufgabe der Elasticitätstheorie, also überhaupt einer strengen Theorie, sehe ich gegenwärtig nur die optischen Erscheinungen in vollkommen durchsichtigen Medien an, — d. h. solchen, für deren Schwingungen das Princip der Energie gilt — seien sie isotrop oder anisotrop, elliptisch polarisirend oder nicht.

Ich beginne mit der Untersuchung, in welcher Hinsicht eine Erweiterung der Grundgleichungen der Optik innerhalb der hierdurch gezogenen Grenzen möglich ist.

Für ein Medium, welches gleichmässig aus Moleculen von Aether und ponderabler Materie gemischt ist, sind die Bewegungsgleichungen für den in einem Volumenelement befindlichen Aether:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= X' + X + A \\ m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= Y' + Y + B \\ m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= Z' + Z + C, \end{aligned} \right\} \quad \text{I}_a$$

für die ponderable Materie:

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \Xi' + \Xi + A \\ \mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= H' + H + B \\ \mu \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= Z' + Z + \Gamma. \end{aligned} \right\} \quad \text{I}_b$$

Hierin sind für Aether und Materie: u, v, w und U, V, W die Verschiebungscomponenten, m und μ die Dichtigkeiten, X', Y', Z' und Ξ', H', Z' , die Componenten der von aussen wirkenden Kräfte, X, Y, Z und Ξ, H, Z , die der inneren elastischen Kräfte, A, B, C und A, B, Γ die der Wechselwirkungen zwischen Materie und Aether. Sämmtliche Kräfte sind auf die Volumeneinheit bezogen und aufzufassen als die

Differenz der im ursprünglichen und im verschobenen Zustande wirkenden, z. B. $X = (X)_1 - (X)_0$ u. s. f.

Die X', Y', Z' und Ξ', H', Z' werden in der Optik gleich Null gesetzt. Die X, Y, Z und Ξ, H, Z sind durch ältere Theorien in einer Form gegeben, welche durch die Beobachtung gewöhnlicher elastischer Erscheinungen und der optischen Phänomene im (nahezu) von Materie freien Raume so vollständig bestätigt worden sind, dass hier keine Aenderung zu wagen ist. Wir behalten also bei, dass:

$$-X = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \quad -\Xi = \frac{\partial \Xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Xi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Xi_z}{\partial z} \text{ etc.}$$

ist und nach dem Princip der Energie die Arbeit dieser Kräfte sich in der Form eines vollständigen Differentialquotienten nach der Zeit schreiben lassen muss.

Bezeichnet man wie gewöhnlich:

$$X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) = X_n,$$

$$\Xi_x \cos(n, x) + \Xi_y \cos(n, y) + \Xi_z \cos(n, z) = \Xi_n,$$

u. s. f., so lässt sich bekanntlich für ein beliebiges System zusammenhängender Körper die Arbeit der elastischen Kräfte schreiben¹⁾:

$$S_i = \sum_h \int dr_h \left(X \frac{\partial u}{\partial t} + Y \frac{\partial v}{\partial t} + Z \frac{\partial w}{\partial t} + \Xi \frac{\partial U}{\partial t} + H \frac{\partial V}{\partial t} + Z \frac{\partial W}{\partial t} \right)_h \\ + \sum_{hk} \int do_{hk} \left[\left(\bar{X}_n \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \dots + \bar{\Xi}_n \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \dots \right)_h + \left(\bar{X}_n \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \dots + \bar{\Xi}_n \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \dots \right)_k \right],$$

wo sich die erste Summe auf alle von homogener Masse erfüllten Räume, die zweite auf alle Grenzflächen bezieht. Damit dies ein Differentialquotient nach der Zeit sei, ist nöthig, dass die Componenten $X_x \dots$ und $\Xi_x \dots$ ein Potential F , resp. Φ haben, nämlich definirt sind durch die Gleichungen:

$$X_x = \frac{\partial F}{\partial x_x} \text{ etc.}, \quad \Xi_x = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_x} \text{ etc.},$$

wo in bekannter Weise bezeichnet:

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x_y = y_x = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x_z = z_x = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \text{ etc.}$$

$$\xi_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \xi_y = \eta_x = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \xi_z = \zeta_x = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}, \text{ etc.}$$

1) Vgl. W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 701. 1883.

Dabei sind F und Φ homogene Functionen zweiten Grades der je sechs Argumente $x_x \dots$ und $\xi_x \dots$, mit im allgemeinsten Falle 21 Constanten.

Während man an diese Werthe X, Y, Z und Ξ, H, Z gebunden ist, hat man über die A, B, C und A, B, Γ freiere Verfügung. Man setzt gewöhnlich $A = -A, B = -B, C = -\Gamma$, indem man die Wirkungssphäre der Molecularkräfte gegen die Grösse des betrachteten Volumenelementes so klein annimmt, dass man die Wirkung, die der Aether in demselben erfährt, als nur von der Materie desselben Elementes herrührend betrachten kann. Man überzeugt sich auch auf dem im Folgenden eingeschlagenen Wege leicht, dass, wenn man setzen wollte: $A = A_1 + A_2, A = -A_1 + A_2$ etc. der letztere Theil physikalisch unmöglich werden würde, da er nur eine Function von $u + U, v + V, w + W$ sein könnte, also bei gemeinsamen Verschiebungen von Aether und Materie einen Werth erhalten würde.

Weitere Bedingungen für die Werthe A, B, C liefert das Princip der Energie. Dasselbe verlangt, dass die Arbeit der Wechselwirkungen sich auf die Form eines vollständigen Differentialquotienten nach der Zeit bringen lasse. Die betreffende Arbeit, gebildet für ein System zusammenhängender Körper, schreibe ich¹⁾:

$$\begin{aligned} S_j &= \sum_h \int dr_h \left(A \frac{\partial (u - U)}{\partial t} + B \frac{\partial (v - V)}{\partial t} + C \frac{\partial (w - W)}{\partial t} \right)_h \\ &\quad + \sum_{hk} \int do_{hk} (S_{hk}) \\ &= J_r + J_o. \end{aligned}$$

Hier ist, wie in S_i , die erste Summe über alle von homogener Masse erfüllten Räume, die zweite über alle Grenzflächen zu erstrecken und bezeichnet (S_{hk}) die an denjenigen Aether- und Körpertheilchen, welche an dem Element der Grenzfläche do_{hk} anliegen, von den Wechselwirkungen zwischen Aether und Materie geleisteten Arbeit, bezogen auf die Einheiten der Zeit und Fläche.

Ich stelle mir zuerst die Frage: welche Werthe sind

1) Vgl. W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 701. 1883.

für A, B, C denkbar, die das Raumintegral J_r für sich allein zu einem Differentialquotienten nach der Zeit machen, d. h. erfüllen:

$$J_r = \frac{df}{dt} \quad \Bigg| \quad F.$$

Vier, und zwar nur vier Verfügungen sind möglich.

1) Können A, B, C die partiellen Differentialquotienten derselben Function f_1 von $(u - U), (v - V), (w - W)$ sein, d. h.:

$$A_1 = \frac{\partial f_1}{\partial(u-U)}, \quad B_1 = \frac{\partial f_1}{\partial(v-V)}, \quad C_1 = \frac{\partial f_1}{\partial(w-W)}.$$

Hierbei wird, um die Integration möglich zu machen und um Uebereinstimmung mit den Beobachtungen zu erhalten, welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von den Schwingungsamplituden unabhängig ergeben, für f_1 eine Function zweiten Grades zu setzen sein, die im allgemeinsten Falle lauten wird:

$$-f_1 = \frac{1}{2} [n_1(u-U)^2 + n_2(v-V)^2 + n_3(w-W)^2] \\ + o_1(v-V)(w-W) + o_2(w-W)(u-U) + o_3(u-U)(v-V);$$

hieraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} -A_1 &= n_1(u-U) + o_3(v-V) + o_2(w-W) \\ -B_1 &= o_3(u-U) + n_2(v-V) + o_1(w-W) \\ -C_1 &= o_2(u-U) + o_1(v-V) + n_3(w-W).^{1)} \end{aligned} \right| \quad 1.$$

2) Kann man $f = \text{Const.}$ machen durch die Verfügung:

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= p_3 \frac{\partial(v-V)}{\partial t} - p_2 \frac{\partial(w-W)}{\partial t} \\ B_2 &= p_1 \frac{\partial(w-W)}{\partial t} - p_3 \frac{\partial(u-U)}{\partial t} \\ C_2 &= p_2 \frac{\partial(u-U)}{\partial t} - p_1 \frac{\partial(v-V)}{\partial t}. \end{aligned} \right| \quad 2.$$

3) Ist eine zulässige Annahme:

$$-f_3 = \frac{1}{2} \left[r_1 \left(\frac{\partial(u-U)}{\partial t} \right)^2 + r_2 \left(\frac{\partial(v-V)}{\partial t} \right)^2 + r_3 \left(\frac{\partial(w-W)}{\partial t} \right)^2 \right] \\ + s_1 \frac{\partial(v-V)}{\partial t} \frac{\partial(w-W)}{\partial t} + s_2 \frac{\partial(w-W)}{\partial t} \frac{\partial(u-U)}{\partial t} + s_3 \frac{\partial(u-U)}{\partial t} \frac{\partial(v-V)}{\partial t},$$

wodurch wird:

1) Componenten dieser Form hat zuerst Hr. F. Neumann in seinen Vorlesungen zur Erklärung der Dispersion benutzt; sie sind später vielfach auch von anderen eingeführt. Vgl. z. B. C. Neumann, Math. Ann. 1. p. 325. 1869.

$$\begin{aligned}
 -A_3 &= r_1 \frac{\partial^2(u-U)}{\partial t^2} + s_3 \frac{\partial^2(v-V)}{\partial t^2} + s_2 \frac{\partial^2(w-W)}{\partial t^2} \\
 -B_3 &= s_3 \frac{\partial^2(u-U)}{\partial t^2} + r_2 \frac{\partial^2(v-V)}{\partial t^2} + s_1 \frac{\partial^2(w-W)}{\partial t^2} \\
 -C_3 &= s_2 \frac{\partial^2(u-U)}{\partial t^2} + s_1 \frac{\partial^2(v-V)}{\partial t^2} + r_3 \frac{\partial^2(w-W)}{\partial t^2}
 \end{aligned} \quad 3.$$

Die erste Annahme macht die Wechselwirkung zwischen Aether und Materie von der gegenseitigen Lage der beiderseitigen Molecüle abhängig, die zweite von ihrer relativen Geschwindigkeit, die dritte von ihrer relativen Beschleunigung; für alle diese Annahmen finden sich in anderen Gebieten der Physik Analogien. Es ist aber bemerkenswerth, dass noch eine vierte Verfügung mit der gestellten Bedingung vereinbar ist, für welche sich in anderen Gebieten keine Analogie findet.

4) Setzt man nämlich:

$$\begin{aligned}
 f_4 &= \left(q_3 \frac{\partial^2(v-V)}{\partial t^2} - q_2 \frac{\partial^2(w-W)}{\partial t^2} \right) \frac{\partial(u-U)}{\partial t} \\
 &+ \left(q_1 \frac{\partial^2(w-W)}{\partial t^2} - q_3 \frac{\partial^2(u-U)}{\partial t^2} \right) \frac{\partial(v-V)}{\partial t} \\
 &+ \left(q_2 \frac{\partial^2(u-U)}{\partial t^2} - q_1 \frac{\partial^2(v-V)}{\partial t^2} \right) \frac{\partial(w-W)}{\partial t}
 \end{aligned}$$

so wird:

$$\begin{aligned}
 A_4 &= q_3 \frac{\partial^3(v-V)}{\partial t^3} - q_2 \frac{\partial^3(w-W)}{\partial t^3} \\
 B_4 &= q_1 \frac{\partial^3(w-W)}{\partial t^3} - q_3 \frac{\partial^3(u-U)}{\partial t^3} \\
 C_4 &= q_2 \frac{\partial^3(u-U)}{\partial t^3} - q_1 \frac{\partial^3(v-V)}{\partial t^3}.
 \end{aligned} \quad 4.$$

Diese vier Werthe zusammengenommen stellen die allgemeinsten Ausdrücke dar, welche die Bedingung F erfüllen.

Wie man sieht, enthalten sie sämmtlich nur die Differentialquotienten der Verschiebungen nach der Zeit und nicht nach den Coordinaten; sie wären also zu erhalten aus den einzelnen Wechselwirkungen aller Aether- und Körpermolecüle des betrachteten Volumenelementes durch eine Summation, bei welcher man die gegenseitigen Verschiebungen derselben in dem Volumenelement entweder constant annimmt oder in der Entwicklung derselben nach der Taylor'schen Reihe mit dem Gliede erster Ordnung abbricht. Da man aber bei der Betrachtung

der inneren elastischen Kräfte des Aethers und der Materie in dieser Entwicklung bis zu den Gliedern dritter Ordnung geht, so scheint dasselbe hier auch geboten zu sein, und um so mehr, da sich zeigen wird, dass nach den Beobachtungen die bisher eingeführten Kräfte nur sehr kleine Werthe haben können, ja vielleicht völlig verschwindend sind. Schon der Umstand, dass die Bewegung eines Körpers als Ganzes im Aether äusserst geringen Widerstand erfährt, lässt darauf schliessen, wenngleich zu bedenken ist, dass die bei den Lichtvibrationen vorkommenden grossen Geschwindigkeiten einen Schluss der Art unsicher erscheinen lassen.

Wir gehen demnach dazu über, eine zweite Gruppe von Werthen der Componenten A , B , C aufzusuchen, welche zweite Differentialquotienten der Verschiebungen nach den Coordinaten enthalten und mit dem Princip der Energie vereinbar sind.

Damit das letztere statffinde, müssen in dem Oberflächenintegral J_o (p. 876) Glieder vorhanden sein, die das Raumintegral J_r zu einem vollständigen Differentialquotienten nach der Zeit ergänzen, denn für sich allein kann jenes dies nicht sein. Die neue Gruppe Componenten kommt dadurch in vollständige Analogie zu den oben discutirten Componenten der inneren Kräfte X , Y , Z und Ξ , H , Z , und ich setze demgemäss:

$$\begin{aligned} -A &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, & -B &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}, \\ -C &= \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}, \end{aligned}$$

und auch kurz:

$$\begin{aligned} A_n &= A_x \cos(n, x) + A_y \cos(n, y) + A_z \cos(n, z) \\ B_n &= B_x \cos(n, x) + B_y \cos(n, y) + B_z \cos(n, z) \\ C_n &= C_x \cos(n, x) + C_y \cos(n, y) + C_z \cos(n, z), \end{aligned}$$

ohne dass mit den Buchstaben $A_x \dots$ gerade dieselbe physikalische Bedeutung von Oberflächendruckkräften zu verbinden wäre, wie mit den $X_x \dots$; es findet z. B. auch nicht die Relation statt $A_y = B_x$ u. s. f.

Um J_r zu einem vollständigen Differentialquotienten nach der Zeit zu ergänzen, sondre ich aus der Arbeit (S_{hk}) Glieder der Form:

$$\begin{aligned} & \left(\bar{A}_n \frac{\partial(u-U)}{\partial t} + \bar{B}_n \frac{\partial(v-V)}{\partial t} + \bar{C}_n \frac{\partial(w-W)}{\partial t} \right)_h \\ & + \left(\bar{A}_n \frac{\partial(u-U)}{\partial t} + \bar{B}_n \frac{\partial(v-V)}{\partial t} + \bar{C}_n \frac{\partial(w-W)}{\partial t} \right)_k \end{aligned}$$

aus, d. h. solche, welche die Arbeit von auf die Grenzelemente wirkenden Kräften zwischen Materie und Aether desselben Körpers darstellen, und fasse sie mit J_r zusammen.

Setze ich (S_{hk}) um die oben vermerkten Glieder vermindert gleich S_{hk} , so wird sich jetzt die gesammte Arbeit der Wechselwirkungen schreiben lassen:

$$\begin{aligned} S_j = \sum_h \int dr_h & \left[A_x \frac{\partial^2(u-U)}{\partial t \partial x} + A_y \frac{\partial^2(u-U)}{\partial t \partial y} + A_z \frac{\partial^2(u-U)}{\partial t \partial z} \right. \\ & + B_x \frac{\partial^2(v-V)}{\partial t \partial x} + B_y \frac{\partial^2(v-V)}{\partial t \partial y} + B_z \frac{\partial^2(v-V)}{\partial t \partial z} \\ & + C_x \frac{\partial^2(w-W)}{\partial t \partial x} + C_y \frac{\partial^2(w-W)}{\partial t \partial y} + C_z \frac{\partial^2(w-W)}{\partial t \partial z} \Big]_h \\ & + \sum_{hk} \int do_{hk} S_{hk} \\ & = J_r + J_o, \end{aligned}$$

und es handelt sich darum, durch passende Verfügungen über $A_x \dots$ zu erfüllen die Bedingung:

$$J_r = \frac{df'}{dt} \quad \Big| \quad F'.$$

Auch hier bieten sich vier verschiedenen Möglichkeiten, die in der oben (p. 879) angegebenen Weise die Ergänzung der Verfügungen 1) bis 4) bilden, nämlich zu deuten sind als die Wirkungen von Kräften, die zwischen den einzelnen Moleculen des Aethers und der Materie proportional mit den gegenseitigen Verschiebungscomponenten derselben und deren ersten drei Differentialquotienten nach der Zeit, stattfinden und durch die Berücksichtigung der Aenderung dieser Verschiebungscomponenten innerhalb des Volumenelementes erhalten werden.

Für die Bestimmung der sich hiernach bietenden Formen von f' ist aber zu berücksichtigen, dass die Wechselwirkungen nicht nothwendig nur Functionen der sechs Differentialausdrücke:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(u-U)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(v-V)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(w-W)}{\partial z}, \quad \frac{\partial(u-U)}{\partial y} + \frac{\partial(v-V)}{\partial x}, \\ & \frac{\partial(v-V)}{\partial z} + \frac{\partial(w-W)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(w-W)}{\partial x} + \frac{\partial(u-U)}{\partial z} \end{aligned}$$

sein müssen, sondern alle neun Differentialquotienten einzeln enthalten können. Bei einfachen Körpern kommen dieselben bekanntlich im Grunde deshalb nur in jenen sechs Verbindungen vor, weil eine Drehung eines Theiles des elastischen Körpers als Ganzen elastische Kräfte in demselben nicht erregt, — bei dem aus Aether und ponderabler Materie gemischten Medium kann das aber der Fall sein. Wir fassen demgemäss in den für df'/dt weiter möglichen Formen den Coëfficienten von:

$$\frac{\partial^2(u-U)}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial^2(u-U)}{\partial y \partial t}, \quad \frac{\partial^2(u-U)}{\partial z \partial t} \text{ etc.}$$

in J_r auf als den Ausdruck für:

$$A_x, \quad A_y, \quad A_z \text{ etc.}$$

Folgendes sind die möglichen Verfügungen:

5) Man setze f' gleich einer homogenen Function zweiten Grades der neun Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u-U)}{\partial x} &= \chi_1, & \frac{\partial(u-U)}{\partial y} &= \chi_2, & \frac{\partial(u-U)}{\partial z} &= \chi_3, \\ \frac{\partial(v-V)}{\partial x} &= \chi_4, & \frac{\partial(v-V)}{\partial y} &= \chi_5, & \frac{\partial(v-V)}{\partial z} &= \chi_6, \\ \frac{\partial(w-W)}{\partial x} &= \chi_7, & \frac{\partial(w-W)}{\partial y} &= \chi_8, & \frac{\partial(w-W)}{\partial z} &= \chi_9. \end{aligned}$$

Dann erhält man:

$$\begin{aligned} - (A_x)_s &= \frac{\partial f'_s}{\partial \chi_1} = \sum_1^9 n_{1i} \chi_i, & - (A_y)_s &= \frac{\partial f'_s}{\partial \chi_2} = \sum_1^9 n_{2i} \chi_i, \\ - (A_z)_s &= \frac{\partial f'_s}{\partial \chi_3} = \sum_1^9 n_{3i} \chi_i \text{ u. s. f., worin } n_{ii} = n_{i,i} \text{ ist,} & & 5. \\ \text{und:} & & - 2f'_s &= \sum_1^9 \sum_1^9 n_{ii} \chi_i \chi_{i_1}. \end{aligned}$$

6) Man setze für $A_x \dots$ lineare Functionen der neun Argumente $\partial \chi_1 / \partial t$, $\partial \chi_2 / \partial t$, ... und bestimme die Coëfficienten so, dass df'_6 / dt identisch verschwindet, dann ist:

$$\left. \begin{aligned} -A_x &= \sum_1^9 p_{1i} \frac{\partial \chi_i}{\partial t}, & -A_y &= \sum_1^9 p_{2i} \frac{\partial \chi_i}{\partial t}, \\ & -A_z &= \sum_1^9 p_{3i} \frac{\partial \chi_i}{\partial t} \text{ u. s. f.,} \end{aligned} \right\} 6.$$

worin: $p_{ii} = 0$ und: $p_{ii_1} = -p_{i_1i}$ ist.

7) Man wähle $A_x, \dots$ gleich lineären Functionen der neun Argumente $\partial^2 \chi_i / \partial t^2$, also:

$$\left. \begin{aligned} -A_x &= \sum_1^9 r_{1i} \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial t^2}, & -A_y &= \sum_1^9 r_{2i} \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} 7.$$

worin $r_{ii} = r_{i_1i}$ ist, und:

$$-2f'_7 = \sum_1^9 \sum_1^9 r_{ii_1} \frac{\partial \chi_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \chi_{i_1}}{\partial t} \text{ wird.}$$

8) Endlich kann man setzen:

$$\left. \begin{aligned} -A_x &= \sum_1^9 q_{1i} \frac{\partial^3 \chi_i}{\partial t^3}, & -A_y &= \sum_1^9 q_{2i} \frac{\partial^3 \chi_i}{\partial t^3}, \end{aligned} \right\} 8.$$

worin wiederum $q_{ii} = 0$ und $q_{ii_1} = -q_{i_1i}$ ist.

Hierdurch wird:

$$-f'_8 = \sum_1^9 \sum_1^9 q_{ii_1} \left(\frac{\partial^2 \chi_i}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \chi_{i_1}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \chi_{i_1}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \chi_i}{\partial t} \right).$$

Damit ist alles zusammengestellt, was für f' zu wählen möglich ist, um der Bedingung F' zu genügen. Ein physikalisches Bedenken scheint mir gegen keine der acht Einführungen vorzuliegen, auch nicht deswegen, dass sie die Wechselwirkungen von den Differentialquotienten nach der Zeit abhängig machen, während die Wirkungen zwischen Aether allein oder Materie allein durch die Beobachtung nur von den Verschiebungen selbst abhängig ergeben werden. Denn man übersieht, dass bei dem Durcheinanderschwingen der zwei Systeme von Moleculen Wirkungen sehr complicirter Art stattfinden werden, welche (ohne für die Fernwirkung zwischen zwei einzelnen verschiedenartigen Moleculen eine Abhängigkeit der Kräfte von relativen Geschwindigkeiten vorauszusetzen) in der Resultirenden für die Wechselwirkung aller in einem Volumenelement befindlichen

Massen dergleichen sehr wohl ergeben können, wie wir oben eingeführt haben. Man braucht hierzu nur an verwandte Probleme aus der Hydrodynamik zu denken.

Noch bemerke ich, dass sich später zeigen wird, dass Kräfte von der vierten und achten Art, welche die dritten Differentialquotienten nach der Zeit enthalten, zur Erklärung der bekannten Erscheinungen anzunehmen nicht nöthig sind; dies ist günstig, weil jene die einzigen sind, für welche in der Physik bisher keine Analogie existirt.

Mit den vorstehenden Verfügungen über die Gesetze der Wechselwirkungen zwischen Materie und Aether verbinde ich noch folgende Annahmen:

1. Der Aether ist bei den Schwingungsbewegungen, welche optische Erscheinungen veranlassen, merklich incompressibel.
2. Seine Dichtigkeit ist gegen die aller bekannten ponderablen Substanzen verschwindend klein.
3. Seine Dichtigkeit und Elasticität ist in allen Körpern die gleiche.

Die erste Annahme lässt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad | \quad \text{II.}$$

werden, und aus den Componenten X, Y, Z der Gleichungen (I_a) die hydrostatischen Drucke $\partial l / \partial x, \partial l / \partial y, \partial l / \partial z$ sich absondern. Die zweite lässt U, V, W neben u, v, w verschwindend klein werden, sodass sie neben jenen sowohl in den Gleichungen (I_a) als auch — was zu erweisen eine genauere Betrachtung nöthig ist — in der Gleichung der Energie vernachlässigt werden können.

Die dritte Annahme ist nur gemacht, um das Hindurchströmen des Aethers durch die ponderablen Körper wahrscheinlicher zu machen; sie ist an sich nicht nöthig, wird aber durch die Folgerungen aus unserer Theorie als zulässig erwiesen.

Unsere Grundgleichungen werden hiernach:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= X_o + A_o + \frac{\partial l}{\partial x}, & m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= Y_o + B_o + \frac{\partial l}{\partial y}, \\ m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= Z_o + C_o + \frac{\partial l}{\partial z}. \end{aligned} \right| \quad \text{I.}$$

Dabei sind X_o , Y_o , Z_o die oben definirten Componenten der inneren Kräfte des Aethers, darin $\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = 0$ genommen, d. h. also:

$$X_o = e \Delta u, \quad Y_o = e \Delta v, \quad Z_o = e \Delta w,$$

und A_o , B_o , C_o die Componenten der Wechselwirkung zwischen Aether und Materie, in den oben gefundenen Formen darin:

$$U = V = W = 0 \quad \text{und:} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{gesetzt.}$$

I. Fortpflanzung ebener Wellen in isotropen Medien.

Isotrope Körper sind solche, in denen keine Richtung vor der anderen irgendwie ausgezeichnet ist. Wir betrachten solche Körper, in welchen Kräfte der Gattung 2) 4) und 6) 8) nicht existiren — die Bedeutung dieser Annahme wird weiter unten klar werden — und haben dann, wenn wir die Wellenebene in die XY legen, also $w = 0$ und l , u und v unabhängig von x und y setzen, nach Gleichung (I):

$$\begin{aligned} (m+r) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (e+a) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a' \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - nu, \\ (m+r) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (e+a) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a' \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} - nv; \end{aligned} \quad \left| \quad 9. \right.$$

denn die Grössen s und o müssen hier gleich Null, die r und n einander gleich werden, und die Functionen f'_6 und f'_7 reduciren sich auf die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} -2f'_6 &= a[(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2}(y_x^2 + z_x^2 + x_y^2))] \\ -2f'_7 &= a' \left[\left(\frac{\partial x_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_z}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial y_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_y}{\partial t} \right)^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Unsere Formeln (9) zeigen ein gleiches Verhalten der u und v Componente der Verrückung, also transversale Schwingungen jeder Art und jeder Richtung als möglich.

Setzt man:

$$u = M \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{z}{\omega} \right), \quad \text{worin:} \quad \tau = \frac{T}{2\pi} \text{ ist,}$$

so folgt:

$$m+r = \frac{1}{\omega^2} \left[(e+a) - \frac{a'}{\tau^2} \right] + n\tau^2 \quad \text{oder:}$$

$$\omega^2 = \frac{(e+a) - \frac{a'}{\tau^2}}{m+r - n\tau^2}. \quad \left| \quad 10. \right.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω wird also von der Farbe abhängig, während sie im leeren Raum constant ist:

$$\omega_0^2 = \frac{e}{m}.$$

Setzt man den Brechungscoefficienten $= n$, so wird:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{m}{e} \cdot \frac{(e + a) - \frac{a'}{r^2}}{m + r - n^2},$$

und diese Formel stellt das allgemeinste Dispersionsgesetz dar, welches aus dem Princip der Energie, d. h. für vollkommen durchsichtige Medien zu erhalten ist.

Bezeichnet man die Wellenlänge, die der betreffenden Farbe im leeren Raum entspricht, d. h. $2\pi\tau\omega_0$ mit λ_0 , so lautet dasselbe:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\frac{m(e + a)}{e} - \frac{4a'\pi^2}{\lambda_0^2}}{m + r - \frac{n\lambda_0^2 m}{4e\pi^2}},$$

oder wenn man die Wellenlänge im Körper, $2\pi\tau\omega = \lambda$, einführt:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{e + a + \frac{nm\lambda^2}{4e\pi^2}}{m + r + \frac{4a'\pi^2}{\lambda^2}}.$$

Diese Formel wird durch die Beobachtung recht gut bestätigt.¹⁾ Abweichungen sind vollständig dadurch erklärt, dass auch die durchsichtigsten Körper, die wir kennen, doch Absorption zeigen, also die Voraussetzungen, welche die Theorie zu machen gezwungen ist, nicht streng erfüllen.

II. Fortpflanzung ebener Wellen in krystallinischen Medien.

Wir setzen auch hier zunächst solche Körper voraus, deren Theile keine Kräfte der Gattungen 2) und 4), 6) und 8) auf den Aether ausüben, und nehmen an, dass der untersuchte Krystall in Bezug auf drei zu einander normale Ebenen symmetrisch sei. Dann haben die Functionen f folgende Werthe:

$$\begin{aligned} -2f_1 &= n_1 u^2 + n_2 v^2 + n_3 w^2, \\ -2f_3 &= r_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + r_2 \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + r_3 \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2, \end{aligned}$$

1) Vgl. z. B. die Berechnung der der ersteren ähnlichen Redtenbacher'schen Formel durch Hrn. Ketteler, Pogg. Ann. 140. p. 13. 1870.

$$\begin{aligned}
-2f_6 &= a_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + a_2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + a_3 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \\
&+ 2 \left(c_1 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} + c_2 \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + c_3 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
&+ b_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + b_{13} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + b_{21} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + b_{23} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + b_{31} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + b_{32} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\
&+ 2 \left(b_1 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} + b_2 \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + b_3 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right),
\end{aligned}$$

analog $2f_7$ nur statt uvw die $\partial u/\partial t$, $\partial v/\partial t$, $\partial w/\partial t$ und statt der a , b , c die Factoren a' , b' , c' enthaltend. Es folgt hieraus z. B.:

$$\begin{aligned}
-(A_x)_6 &= a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + c_3 \frac{\partial v}{\partial y} + c_2 \frac{\partial w}{\partial z}, \\
-(A_y)_6 &= b_{12} \frac{\partial u}{\partial y} + b_3 \frac{\partial v}{\partial x}, & -(A_z)_6 &= b_{13} \frac{\partial u}{\partial z} + b_2 \frac{\partial w}{\partial x},
\end{aligned}$$

und die erste Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned}
(m + r_1) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= e \Delta u + \frac{\partial l}{\partial x} - n_1 u \\
&+ a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (c_3 + b_3) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (c_2 + b_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\
&+ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (c_3' + b_3') \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (c_2' + b_2') \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right]
\end{aligned}$$

analog die beiden anderen; hinzu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Setzt man abgekürzt: $m + r_h = m_h$,

$$\begin{aligned}
A_1 &= a_1 + b_1 + c_1 - (b_2 + b_3) - (c_2 + c_3) + e \\
A_2 &= a_2 + b_2 + c_2 - (b_3 + b_1) - (c_3 + c_1) + e \\
A_3 &= a_3 + b_3 + c_3 - (b_1 + b_2) - (c_1 + c_2) + e \\
A_1' &= a_1' + b_1' + c_1' - (b_2' + b_3') - (c_2' + c_3') \\
A_2' &= a_2' + b_2' + c_2' - (b_3' + b_1') - (c_3' + c_1') \\
A_3' &= a_3' + b_3' + c_3' - (b_1' + b_2') - (c_1' + c_2') \\
b_{hk} + e &= (b_{hk}) \quad \text{und:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &= l - \left[(b_1 + c_1) \frac{\partial u}{\partial x} + (b_2 + c_2) \frac{\partial v}{\partial y} + (b_3 + c_3) \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\
&- \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[(b_1' + c_1') \frac{\partial u}{\partial x} + (b_2' + c_2') \frac{\partial v}{\partial y} + (b_3' + c_3') \frac{\partial w}{\partial z} \right],
\end{aligned}$$

so lässt sich das System Bewegungsgleichungen schreiben:

$$\begin{aligned}
 m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left[A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (b_{12}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (b_{13}) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \\
 &+ \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left[A_1' \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_{12}' \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_{13}' \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial L}{\partial x} - n_1 u \\
 m_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \left[(b_{21}) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (b_{23}) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \\
 &+ \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left[b_{21}' \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_2' \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b_{23}' \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial L}{\partial y} - n_2 v \\
 m_3 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \left[(b_{31}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b_{32}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_3 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \\
 &+ \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left[b_{31}' \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_{32}' \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_3' \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial L}{\partial z} - n_3 w, \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Zur Integration setze ich:

$$\begin{aligned}
 u &= M \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\varrho}{\omega} \right), & v &= N \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\varrho}{\omega} \right), \\
 w &= P \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\varrho}{\omega} \right), & L &= -\frac{Q}{\tau \omega} \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\varrho}{\omega} \right),
 \end{aligned}$$

worin $\tau = T/2\pi$ und $\varrho = \mu x + \nu y + \pi z$ ist. Es folgt dann unter den Abkürzungen:

$$A_i - \frac{A_i'}{\tau^2} = A_i, \quad (b_{hk}) - \frac{b'_{hk}}{\tau^2} = B_{hk}, \quad m_i - n_i \tau^2 = \Gamma_i$$

das System:

$$\begin{aligned}
 M[A_1 \mu^2 + B_{12} \nu^2 + B_{13} \pi^2 - \Gamma_1 \omega^2] &= Q\mu \\
 N[B_{21} \mu^2 + A_2 \nu^2 + B_{23} \pi^2 - \Gamma_2 \omega^2] &= Q\nu \\
 P[B_{31} \mu^2 + B_{32} \nu^2 + A_3 \pi^2 - \Gamma_3 \omega^2] &= Q\pi \\
 M\mu + N\nu + P\pi &= 0,
 \end{aligned} \tag{12}$$

und durch Addition der drei Gleichungen, nachdem sie mit den Klammern links dividirt und resp. mit μ , ν , π multiplicirt sind:

$$\begin{aligned}
 \frac{\mu^2}{A_1 \mu^2 + B_{12} \nu^2 + B_{13} \pi^2 - \Gamma_1 \omega^2} + \frac{\nu^2}{B_{21} \mu^2 + A_2 \nu^2 + B_{23} \pi^2 - \Gamma_2 \omega^2} \\
 + \frac{\pi^2}{B_{31} \mu^2 + B_{32} \nu^2 + A_3 \pi^2 - \Gamma_3 \omega^2} = 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Hierdurch ist das Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in der durch die Cosinus μ , ν , π bestimmten Richtung der Wellennormale gegeben.

Damit dasselbe mit den Fresnel'schen Resultaten hinsichtlich Geschwindigkeit und Schwingungsrichtung übereinstimmt, muss für jede Hauptebene diejenige Welle eine constante Geschwindigkeit haben, welche senkrecht zu der betreffenden Hauptebene schwingt. Z. B. muss für $\mu = 0$, d. h. für die YZ -Ebene diejenige Welle, welche $\omega = \text{Const.}$ hat, ergeben $M = 1$.

Dies setzt voraus, dass:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma, \\ A_1 = B_{12} = B_{13}, \quad A_2 = B_{21} = B_{23}, \quad A_3 = B_{31} = B_{32}, \\ \text{während:} \quad A_1, A_2, A_3.$$

drei Constanten sind, welche laut der Beobachtung voneinander verschieden sein müssen. Dies ist an sich wohl möglich; beachtet man aber, dass die Grössen B_{12} und B_{21} , B_{23} und B_{32} , B_{31} und B_{13} einander gleich werden, wenn man oben (p. 881) die Annahme einführt, dass bei einer Drehung eines Elementes Aether ohne Dilatationen keine elastischen Kräfte erregt werden, so erscheint eine so merkbliche Verschiedenheit dieser Grössen, wie sie die Beobachtung fordert, und damit die Fresnel'sche Definition der Polarisations Ebene wenig wahrscheinlich.

Um zu der Neumann'schen Definition und dem Fresnel'schen Gesetze der Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu kommen, ist nöthig, dass:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma, \\ B_{12} = B_{21} = B_3, \quad B_{23} = B_{32} = B_1, \quad B_{31} = B_{13} = B_2, \quad \text{und:} \\ A_1 = B_2 + B_3 - B_1, \quad A_2 = B_3 + B_1 - B_2, \quad A_3 = B_1 + B_2 - B_3 \\ \text{ist}^1), \text{ — Relationen, die zwar noch der physikalischen Deutung bedürfen, aber in sich keinerlei Widersprüche enthalten. Sind sie erfüllt, so ergibt sich:}$$

$$\frac{\mu^2}{\omega^2 - \omega_x^2} + \frac{\nu^2}{\omega^2 - \omega_y^2} + \frac{\pi^2}{\omega^2 - \omega_z^2} = 0, \\ \text{worin } \omega_x^2 = \frac{B_1}{\Gamma}, \quad \omega_y^2 = \frac{B_2}{\Gamma}, \quad \omega_z^2 = \frac{B_3}{\Gamma} \text{ ist.} \quad \left. \vphantom{\frac{\mu^2}{\omega^2 - \omega_x^2}} \right\} 14.$$

Die angegebenen acht Bedingungen zerfallen, wenn sie streng für alle Farben gelten sollen, in sechzehn, da in den Con-

1) Hierin sind Γ , B_1 , B_2 , B_3 neue Constanten.

stanten A, B und Γ Glieder vorkommen, welche die Schwingungsdauer enthalten. In den ursprünglichen Constanten würden dieselben die Form erhalten:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= r_2 = r_3, & n_1 &= n_2 = n_3, \\ b_{12} &= b_{21}, & b_{23} &= b_{32}, & b_{31} &= b_{13}, \\ b_{12}' &= b_{21}', & b_{23}' &= b_{32}', & b_{31}' &= b_{13}', \\ A_1 &= b_{13} + b_{12} - b_{23}, & A_2 &= b_{21} + b_{23} - b_{13}, \\ & & A_3 &= b_{32} + b_{31} - b_{21}, \\ A_1' &= b_{13}' + b_{12}' - b_{23}', & A_2' &= b_{21}' + b_{23}' - b_{13}', \\ & & A_3' &= b_{32}' + b_{31}' - b_{21}' \end{aligned} \right| 15.$$

Dies¹⁾ wäre erforderlich, um das Fresnel'sche Gesetz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit aller Strenge für alle Farben zu erfüllen, was für einaxige Krystalle durch die Beobachtungen von Swan²⁾ am Kalkspath, für zweiaxige besonders durch die Kirchhoff'schen Messungen³⁾ der Winkel der optischen Axen im Aragonit für verschiedene Farben wahrscheinlich gemacht ist. Für diesen Winkel φ gelten die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi &= \frac{\omega_z^2 - \omega_y^2}{\omega_z^2 - \omega_x^2}, & \sin^2 \varphi &= \frac{\omega_y^2 - \omega_x^2}{\omega_z^2 - \omega_x^2}, \\ &= \frac{(b_3 - b_2) - \frac{1}{\tau^2}(b_3' - b_2')}{(b_3 - b_1) - \frac{1}{\tau^2}(b_3' - b_1')}, & &= \frac{(b_2 - b_1) - \frac{1}{\tau^2}(b_2' - b_1')}{(b_3 - b_1) - \frac{1}{\tau^2}(b_3' - b_1')}, \end{aligned}$$

er wird also durch unsere Formeln wirklich von der Farbe abhängig, obgleich, wie gesagt, die Fresnel'sche Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für jede Farbe streng gültig bleibt.

Dass, wenn man die X- und Y-Axe im Krystall unterschiedslos nimmt (quadratisches System) oder voraussetzt, dass sie durch eine Drehung um 60 oder 120° wieder in eine gleichwerthige Lage zum Krystall kommen (hexagonales und rhomboëdrisches System), sich die Huygens'schen

1) Die ersten vier Gleichungen (15) verbunden mit der Definition der Grössen n und r (p. 879) machen wahrscheinlich, dass die n und r allgemein verschwinden.

2) Swan, Edinb. Trans. 16. p. 375. 1849.

3) G. Kirchhoff, Pogg. Ann. 108. p. 567. 1859.

Gesetze für optisch einaxige Krystalle ergeben, übersieht man leicht. Ebenso, dass die Unterschiedslosigkeit aller drei Coordinatenachsen (reguläres System) auf einfache Brechung führt. Wesentlich complicirter werden die Formeln, wenn man Krystalle der letzten beiden Systeme, die wir im Anfange ausdrücklich ausgeschlossen haben, betrachtet. Sollen für diese, wie die Beobachtung zu verlangen scheint, die Fresnel'schen Gesetze streng gültig sein, so müssen zwischen den Constanten der elastischen Potentiale f u. s. w. noch weit mehr Relationen stattfinden, als oben benutzt. Da sie aber in sich keinen Widerspruch enthalten, bieten sie auch keine physikalische Schwierigkeit dar. Die neu auftretenden Relationen stellen die Bedingungen dafür dar, dass es im Krystall ein Coordinatensystem gibt, für welches derselbe in optischer Hinsicht sich zu den drei Coordinatenebenen symmetrisch verhält. Die Lage dieses Coordinatensystemes bestimmt sich durch Grössen, welche von der Farbe des Lichtes abhängig sind, d. h. es ergibt sich die Möglichkeit, dass die Mittellinie der optischen Axen für verschiedene Farben eine verschiedene Lage habe. Sonach erklären unsere Formeln auch die in den letzten beiden Krystallsystemen vorkommenden unsymmetrischen Dispersionen der optischen Axen.

III. Circulare Polarisation in isotropen Medien.

Circularpolarisirende Medien sind solche, in welchen Kräfte der Gattungen 2), 4), 6) und 8) wirken. Ich werde aber zeigen, dass die Einführung der Wirkungen 4) und 8), welche die dritten Differentialquotienten nach der Zeit enthalten und ohne Analogien in anderen Gebieten der Physik sind, nicht nöthig ist, um die bekannten Erscheinungen zu erklären.

Die Componenten A und B werden, für den Fall man eine parallel der Z -Axe sich fortpflanzende Wellenebene betrachtet und also $w = 0$ und u, v und l von x und y unabhängig nimmt, durch die Gleichungen (2) und (6) gegeben:

$$A_2 + A_6 = p \frac{\partial v}{\partial t} + p' \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial z^2}, \quad B_2 + B_6 = -p \frac{\partial u}{\partial t} - p' \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2}.$$

Es ist die Frage, wie im allgemeinen die Coëfficienten p_i und p_{ii} in den Ausdrücken (2) und (6) bestimmt werden

müssen, damit sie bei beliebiger Lage der Wellenebene die analogen Kräfte ergeben. Dies beantwortet sich, indem man die obigen Componenten auf ein beliebiges Coordinatensystem $X_1 Y_1 Z_1$ transformirt; die Coëfficienten, welche in diesen die Differentialausdrücke $\partial u_1/\partial t$, $\partial v_1/\partial t$, $\partial w_1/\partial t$, $\partial^2 u_1/\partial t \partial x_1^2$, $\partial^2 u_1/\partial t \partial x_1 \partial y_1$, $\partial^2 u_1/\partial t \partial x_1 \partial z_1$ erhalten, geben die gesuchten Werthe.

Man erhält so, falls $\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$ die Richtungscosinus der Wellennormale gegen die Coordinatenachsen bezeichnen, für die verschiedenen Componenten die folgenden Systeme von Coëfficienten:

	$P \frac{\partial u}{\partial t}$	$P \frac{\partial v}{\partial t}$	$P \frac{\partial w}{\partial t}$	
A_2	0	γ_3	$-\beta_3$	16.
B_2	$-\gamma_3$	0	α_3	
C_2	β_3	$-\alpha_3$	0	

	$P' \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$	$P' \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}$	$P' \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z}$	$P' \frac{\partial v}{\partial t \partial x}$	$P' \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial y}$	$P' \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z}$	$P' \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}$	$P' \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial y}$	$P' \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z}$	
$4x)_6$	0	0	0	$\alpha_3^2 \gamma_3$	$\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$	$\alpha_3 \gamma_3^2$	$-\alpha_3^2 \beta_3$	$-\alpha_3 \beta_3^2$	$-\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$	17
$4y)_6$	0	0	0	$\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$	$\beta_3^2 \gamma_3$	$\beta_3 \gamma_3^2$	$-\alpha_3 \beta_3^2$	$-\beta_3^3$	$-\beta_3^2 \gamma_3$	
$4z)_6$	0	0	0	$\alpha_3 \gamma_3^2$	$\beta_3 \gamma_3^2$	γ_3^3	$-\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$	$-\beta_3^2 \gamma_3$	$-\beta_3 \gamma_3^2$	
$3x)_6$	$-\alpha_3^2 \gamma_3$	$-\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$	$-\alpha_3 \gamma_3^2$	0	0	0	α_3^3	$\alpha_3^2 \beta_3$	$\alpha_3^2 \gamma_3$	
$3y)_6$	$-\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$	$-\beta_3^2 \gamma_3$	$-\beta_3 \gamma_3^2$	0	0	0	$\alpha_3^2 \beta_3$	$\alpha_3 \beta_3^2$	$\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$	
$3z)_6$	$-\alpha_3 \beta_3^2$	$-\beta_3 \gamma_3^2$	$-\gamma_3^3$	0	0	0	$\alpha_3^2 \gamma_3$	$\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$	$\alpha_3 \gamma_3^2$	
$2x)_6$	$+\alpha_3^2 \beta_3$	$+\alpha_3 \beta_3^2$	$+\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$	$-\alpha_3^2$	$-\alpha_3^2 \beta_3$	$-\alpha_3^2 \gamma_3$	0	0	0	
$2y)_6$	$+\alpha_3 \beta_3^2$	$+\beta_3^3$	$+\beta_3^2 \gamma_3$	$-\alpha_3^2 \beta_3$	$-\alpha_3 \beta_3^2$	$-\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$	0	0	0	
$2z)_6$	$+\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$	$+\beta_3^2 \gamma_3$	$+\beta_3 \gamma_3^2$	$-\alpha_3^2 \gamma_3$	$-\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$	$-\alpha_3 \gamma_3^2$	0	0	0	

Die Componenten werden also von der Lage der Wellennormalen abhängig, behalten aber für beliebige Coordinatenachsen ihre Form völlig bei. Die Möglichkeit isotroper circularpolarisirender Medien ist damit gegeben.

Wir wählen wiederum die XY -Ebene zur Wellenebene und haben nach dem I. Theil (p. 884) jetzt die zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 (m+r) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (e+a) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + a' \frac{\partial^2 u}{\partial z^2 \partial t^2} - nu + p \frac{\partial v}{\partial t} + p' \frac{\partial^2 v}{\partial z^2 \partial t} \\
 (m+r) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (e+a) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + a' \frac{\partial^2 v}{\partial z^2 \partial t^2} - nv - p \frac{\partial u}{\partial t} - p' \frac{\partial^2 u}{\partial z^2 \partial t}
 \end{aligned}
 \quad 18.$$

Zur Integration sei gesetzt:

$$u = M_1 \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{z}{\omega_1} \right) + M_2 \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{z}{\omega_2} \right)$$

$$v = N_1 \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{z}{\omega_1} \right) + N_2 \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{z}{\omega_2} \right),$$

dann müssen die Glieder mit dem Index (1) und (2) für sich die Hauptgleichungen erfüllen. Man erhält:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= N_1 \\ \frac{1}{\omega_1^2} \left(e + a - \frac{a'}{\tau^2} \right) &= m + r - n\tau^2 + \tau \left(p - \frac{p'}{\tau^2 \omega_1^2} \right) \\ M_2 &= N_2 \\ \frac{1}{\omega_2^2} \left(e + a - \frac{a'}{\tau^2} \right) &= m + r - n\tau^2 - \tau \left(p - \frac{p'}{\tau^2 \omega_2^2} \right) \end{aligned} \right\} 19.$$

Die erste Welle ist eine links-, die zweite eine rechtsrotierende, circularpolarisirte. Es folgt:

$$\left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right) \left(e + a - \frac{a'}{\tau^2} \right) = \tau \left(2p - \frac{p'}{\tau^2} \left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} \right) \right).$$

Hier kann man, gemäss der Beobachtung, dass p und p' sehr kleine Grössen sind, rechts $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ setzen. Aus demselben Grunde darf:

$$\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} = 2 \sqrt{\frac{m + r - n\tau^2}{e + a - \frac{a'}{\tau^2}}}$$

genommen werden, also:

$$\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} = \frac{\tau \left(p - \frac{p'}{\tau^2 \omega^2} \right)}{\sqrt{\left(m + r - n\tau^2 \right) \left(e + a - \frac{a'}{\tau^2} \right)}}$$

Beim Durchgange von linearpolarisirtem Licht durch eine Schicht eines circularpolarisirenden Mediums von der Dicke δ tritt bekanntlich eine Drehung der Polarisations Ebene um einen Winkel φ ein, der gegeben ist durch:

$$\varphi = \frac{\delta}{2\tau} \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right).$$

Hierfür gibt unsere Theorie den Werth:

$$\varphi = \frac{\delta \left(p - \frac{p'}{r^2 \omega^2} \right)}{2 \sqrt{\left(m + r - n r^2 \right) \left(e + a - \frac{a'}{r^2} \right)}} \quad \left| \quad 21 \right.$$

Nach dem ersten Abschnitt ist n äusserst klein, vielleicht $= 0$; die Beobachtung gibt auch a' neben $(e + a)$ klein, beschränkt man sich auf erste Ordnung, so kann man bilden:

$$\varphi = \frac{\delta}{2 \sqrt{(e + a)(m + r)}} \left(p - \frac{p'}{r^2 \omega^2} \right) \left(1 + \frac{a'}{2(e + a)r^2} \right),$$

eine Form, welche die durch Beobachtungen von Broch¹⁾, Stephan²⁾ und G. Wiedemann³⁾ wahrscheinlich gemachte:

$$\varphi = \delta \left(A - \frac{B}{r^2} \right)$$

mit umfasst. Die genannten Beobachtungen scheinen zu gestatten, dass p als sehr klein angesehen wird.

IV. Elliptische Polarisation in krystallinischen Medien.

Mit den in dem vorigen Theile näher bestimmten Componenten der Kräfte 2) und 6) sind hier diejenigen Werthe der Gattungen 1), 3), 5) und 7) zu combiniren, welche krystallinischen Medien entsprechen; wir beschränken uns auf Krystalle mit drei Symmetrieebenen und benutzen die im zweiten Theil gefundenen Relationen (15), welche die Bedingung dafür sind, dass das Fresnel'sche Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit zugleich mit der Neumann'schen Definition der Polarisationssebene besteht.

Die Bewegungsgleichungen werden dann, wenn ich ihrer, laut (16) und (17), complicirten Form wegen die Componenten der Kräfte 2) und 6) nicht ausschreibe:

1) Broch, Dove's Rep. 7. p. 113. 1850.

2) Stephan, Wien. Ber. 50. (2) p. 88. 1864. Pogg. Ann. 122. p. 631. 1864.

3) G. Wiedemann, Pogg. Ann. 82. p. 215. 1851.

$$\begin{aligned}
(m+r) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (b_{13} + b_{12} - b_{23}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
&+ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[(b_{13}' + b_{12}' - b_{23}') \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_{12}' \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_{13}' \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \\
&+ \frac{\partial L}{\partial x} - nu + A_2 + A_6,
\end{aligned}$$

analog die beiden anderen; dazu kommt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Um für die Componenten 2) und 6) einfache Formen zu erhalten, transformire ich diese Gleichungen auf ein neues Coordinatensystem $X_1 Y_1 Z_1$, dessen Z_1 -Axe die Wellennormale ist, durch die Formeln:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, & y_1 &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\
z_1 &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z.
\end{aligned}$$

Addirt man die drei Bewegungsgleichungen mit den Factorsystemen $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ und $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$, so erhält man die Formeln für die u_1 und v_1 Componenten. Setzt man, weil die $X_1 Y_1$ die Wellenebene sein soll, $w_1 = 0$ und u_1, v_1, L von x_1 und y_1 unabhängig, so erhält man folgende zwei definitive Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(m+r) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + nu_1 &= \left[(B_{11} - B) \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} + B_{12} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_1^2} \right] \\
+ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[(B_{11}' - B') \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} + B_{12}' \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_1^2} \right] &+ p \frac{\partial v_1}{\partial t} + p' \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial z_1^2} \\
(m+r) \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + nv_1 &= \left[B_{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} + (B_{22} - B) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_1^2} \right] \\
+ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[B_{12}' \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} + (B_{22}' - B') \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_1^2} \right] &- p \frac{\partial u_1}{\partial t} - p' \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial z_1^2}.
\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (m+r) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + nu_1 = \\ + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[(B_{11}' - B') \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} + B_{12}' \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_1^2} \right] \\ (m+r) \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + nv_1 = \\ + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[B_{12}' \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} + (B_{22}' - B') \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_1^2} \right] \end{aligned}} \right\} 22.$$

Hierin ist:

$$\begin{aligned}
B_{hk} &= (b_{13} + b_{12}) \alpha_h \alpha_k + (b_{12} + b_{23}) \beta_h \beta_k + (b_{23} + b_{13}) \gamma_h \gamma_k, \\
B &= b_{23} \alpha_3^2 + b_{13} \beta_3^2 + b_{12} \gamma_3^2,
\end{aligned}$$

und analog B'_{hk} und B' bestimmt. Diese Gleichungen werden integrirt, indem man für u_1 und v_1 lineare Functionen von $\cos 1/\tau \cdot (t - z_1/\omega)$ und $\sin 1/\tau \cdot (t - z_1/\omega)$ nimmt.

Man erkennt sogleich, dass sich auf diese Weise elliptische Schwingungen ergeben. Da die Lage der X_1 - und

Y_1 -Axe in der Wellenebene noch beliebig ist, kann man über sie so verfügen, dass sie die Hauptaxen der Bahnellipsen werden. Hierzu ist erforderlich, dass $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ und $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ genügen der Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} B_{12} - \frac{1}{\tau^2} B_{12}' &= 0, \quad \text{d. h.} \\ 0 &= \left[(b_{13} + b_{13}) - \frac{1}{\tau^2} (b_{13}' + b_{12}') \right] \alpha_1 \alpha_2 + \left[(b_{12} + b_{23}) - \frac{1}{\tau^2} (b_{12}' + b_{23}') \right] \beta_1 \beta_2 \\ &\quad + \left[(b_{23} + b_{13}) - \frac{1}{\tau^2} (b_{23}' + b_{13}') \right] \gamma_1 \gamma_2. \end{aligned} \right\} 23.$$

Man bemerkt, dass hiernach die Lage der Axen der Bahnellipsen für verschiedene Farben im allgemeinen verschieden ist. Um sie näher zu bestimmen, beachte man, dass, falls in dem betrachteten Krystall die Constanten p und p' verschwindend klein sind, derselbe also ein gewöhnlicher doppeltbrechender Krystall ist, die Bedingung (23) diejenigen Richtungen bestimmt, in welchen das linearpolarisirte Licht schwingt, das sich in einem solchen Krystall parallel unserer Wellennormale Z_1 fortpflanzt. Diesen Richtungen parallel liegen also, wenn sich der Krystall in einen elliptisch polarisirenden verwandelt, die Axen der Bahnellipsen.

Durch das Einsetzen der aus Gleichung (23) bestimmten Werthe $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ mag B_{11} und B_{22} , resp. gleich (B_{11}) und (B_{22}) werden, analog B , B_{11}' und B_{22}' gleich (B) , (B_{11}') , (B_{22}') .

Man hat sonach:

$$\left. \begin{aligned} (m+r) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + n u_1 &= ((B_{11}) - (B)) \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} \\ &\quad + ((B_{11}') - (B')) \frac{\partial^4 u_1}{\partial t^2 \partial z_1^2} + p \frac{\partial v_1}{\partial t} + p' \frac{\partial^3 v_1}{\partial t \partial z_1^2} \\ (m+r) \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + n v_1 &= ((B_{22}) - (B)) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_1^2} \\ &\quad + ((B_{22}') - (B')) \frac{\partial^4 v_1}{\partial t^2 \partial z_1^2} - p \frac{\partial u_1}{\partial t} - p' \frac{\partial^3 u_1}{\partial t \partial z_1^2}. \end{aligned} \right\} 22'.$$

Zur Integration setze ich wiederum:

$$\begin{aligned} u_1 &= M_1 \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{z_1}{\omega_1} \right) + M_2 \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{z_1}{\omega_2} \right) \\ v_1 &= N_1 \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{z_1}{\omega_1} \right) + N_2 \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{z_1}{\omega_2} \right), \end{aligned}$$

und erhalte dadurch:

$$M \left[(m+r) - n\tau^2 - ((B_{11}) - (B)) \frac{1}{\omega^2} + ((B_{11}') - (B')) \frac{1}{\tau^2 \omega^2} \right] \\ \pm N\tau \left(p - \frac{p'}{\tau^2 \omega^2} \right) = 0,$$

$$N \left[(m+r) - n\tau^2 - ((B_{22}) - (B)) \frac{1}{\omega^2} + ((B_{22}') - (B')) \frac{1}{\tau^2 \omega^2} \right] \\ \pm M\tau \left(p - \frac{p'}{\tau^2 \omega^2} \right) = 0.$$

Oder kurz:

$$M \left[\Gamma - \frac{\Delta_1}{\omega^2} \right] \pm N\tau \left(p - \frac{p'}{\tau^2 \omega^2} \right) = 0$$

$$N \left[\Gamma - \frac{\Delta_2}{\omega^2} \right] \pm M\tau \left(p - \frac{p'}{\tau^2 \omega^2} \right) = 0.$$

Das obere Zeichen gilt für die Welle mit dem Index 1 — d. i. die links rotirende —, das untere für die mit dem Index 2 — d. i. die rechts rotirende.

Zwei Relationen, die für beide Wellen gelten, erhält man durch Multiplication und Division der beiden letzten Gleichungen, nämlich:

$$\left(\Gamma - \frac{\Delta_1}{\omega^2} \right) \left(\Gamma - \frac{\Delta_2}{\omega^2} \right) = \tau^2 \left(p - \frac{p'}{\tau^2 \omega^2} \right)^2 \quad \left| \quad 24. \right.$$

und:

$$\frac{\Gamma - \frac{\Delta_1}{\omega^2}}{\Gamma - \frac{\Delta_2}{\omega^2}} = \left(\frac{N}{M} \right)^2 = \epsilon^2.$$

Die erste gibt das Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, die letztere das der Ellipticität der Schwingungen.

Einmal für die eine, dann für die andere Welle angewandt, geben sie zusammen, da nach der Beobachtung p mindestens sehr klein ist, die beiden Bahnellipsen sehr nahe ähnlich (sie werden es streng, wenn $p = 0$ ist), und zwar die grosse Axe der einen in der Richtung der kleinen der anderen Ellipse fallend.

Wäre p und p' gleich Null, d. h. der Krystall ein gewöhnlich doppeltbrechender, so würden die beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in denjenigen Richtungen einander gleich werden, für welche:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$$

ist; diese Bedingung gibt also die Lage der optischen Axen. In deren Richtung findet, wenn p und p' von Null verschieden sind, Circularpolarisation statt, und zwar sind die beiden Geschwindigkeiten gegeben durch:

$$\frac{\Delta}{\omega^2} = \Gamma \pm \tau \left(p - \frac{p'}{\tau^2 \omega^2} \right),$$

analog wie bei isotropen circularpolarisirenden Medien.

Ich mache schliesslich von den allgemeinen gefundenen Formeln noch eine Anwendung auf den bisher allein beobachteten Fall elliptisch-polarisirender einaxiger Krystalle. (Für reguläre Krystalle ergeben die obigen Formeln keine andere circulare Polarisation als möglich, wie die der isotropen Medien, in Uebereinstimmung mit der Beobachtung.)

Es sei die Z -Axe die krystallographische Hauptaxe, dann ist: $b_{13} = b_{23}$, $b_{13}' = b_{23}'$, es wird also nach Gl. (23) $B_{12} - (1/\tau^2) B_{12}'$ für alle Farben Null, wenn γ_1 oder γ_2 verschwindet, d. h. wenn eine der beiden Coordinatenebenen $X_1 Z_1$ oder $Y_1 Z_1$ in einen Hauptschnitt des Krystalles fällt. Ich wähle die erstere dazu und setze demgemäss:

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \sin \varphi, & \beta_3 &= 0, & \gamma_3 &= \cos \varphi, \\ \alpha_2 &= 0, & \beta_2 &= 1, & \gamma_2 &= 0, \\ \alpha_1 &= \cos \varphi, & \beta_1 &= 0, & \gamma_1 &= -\sin \varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Daraus folgt: } (B_{11}) &= (b_{13} + b_{12}) + (b_{13} - b_{12}) \sin^2 \varphi, \\ (B_{22}) &= (b_{13} + b_{12}), \\ (B) &= b_{12} + (b_{13} - b_{12}) \sin^2 \varphi, \end{aligned}$$

und analog (B_{11}') , (B_{22}') , (B') ; unter Benutzung der im zweiten Theil (p. 887) eingeführten (für eine bestimmte Farbe constanten) Grössen:

$$\Gamma = m + r - n\tau^2, \quad B_1 = B_2 = b_{13} - \frac{b_{13}'}{\tau^2}, \quad B_3 = b_{12} - \frac{b_{12}'}{\tau^2},$$

wird hiernach:

$$\Delta_1 = B_1, \quad \Delta_2 = B_1 \cos^2 \varphi + B_3 \sin^2 \varphi.$$

Endlich geben die zwei Gleichungen (24):

$$\left[\omega^2 \Gamma - B_1 \right] \left[\omega^2 \Gamma - (B_1 \cos^2 \varphi + B_3 \sin^2 \varphi) \right] = \tau^2 \left(p \omega^2 - \frac{p'}{\tau^2} \right)^2 \quad \left| \quad 25. \right.$$

$$\frac{\omega^2 \Gamma - B_1}{\omega^2 \Gamma - (B_1 \cos^2 \varphi + B_3 \sin^2 \varphi)} = \left(\frac{N}{M} \right)^2 = \varepsilon^2$$

Löst man die erste Gleichung (25) nach $\omega^2 \Gamma - B_1$ und $\omega^2 \Gamma - (B_1 \cos \varphi + B_3 \sin^2 \varphi)$ auf, so erhält man:

$$\begin{aligned} \omega^2 \Gamma - B_1 &= -\left(\frac{B_1 - B_3}{2}\right) \sin^2 \varphi \pm \sqrt{\left(\frac{B_1 - B_3}{2}\right)^2 \sin^4 \varphi + \tau^2 \left(p \omega^2 - \frac{p'}{\tau^2}\right)^2}, \\ \omega^2 \Gamma - (B_1 \cos \varphi + B_3 \sin^2 \varphi) &= +\frac{B_1 - B_3}{2} \sin^2 \varphi \pm \sqrt{\left(\frac{B_1 - B_3}{2}\right)^2 \sin^4 \varphi + \tau^2 \left(p \omega^2 - \frac{p'}{\tau^2}\right)^2}, \end{aligned}$$

wo die doppelten Zeichen den beiden Wurzeln für ω , nämlich ω_1 und ω_2 entsprechen. Setzt man dies in die zweite Gleichung (25), so findet sich, abgesehen von dem nach der Beobachtung mindestens sehr kleinen, vielleicht sogar verschwindenden Glied $p \omega^2$, in welches wir für ω einen Mittelwerth gesetzt denken:

$$\varepsilon_1 = 1/\varepsilon_2.$$

Setzt man $\varepsilon_1 = \varepsilon_\varphi$, so ergibt sich:

$$\varepsilon_\varphi = \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{B_1 - B_3}{2}\right)^2 \sin^4 \varphi + \tau^2 \left(p \omega^2 - \frac{p'}{\tau^2}\right)^2} - \frac{B_1 - B_3}{2} \sin^2 \varphi}{\tau \left(p \omega^2 - \frac{p'}{\tau^2}\right)}, \quad 26_a.$$

Für die Richtung normal zur Hauptaxe ist $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, aber dadurch wird der Zähler nicht Null, sondern nur zweiter Ordnung in Bezug auf die kleinen Grössen p und p' ; es findet also laut unserer Formel in äquatorialer Richtung im allgemeinen nicht streng, sondern nur angenähert lineare Polarisation statt. Die Ellipticität wird hier, wenn man die Wurzel entwickelt:

$$\varepsilon_{\frac{\pi}{2}} = \frac{N_1}{M_1} = \frac{M_2}{N_2} = \pm \frac{\tau \left(p \omega^2 - \frac{p'}{\tau^2}\right)}{(B_1 - B_3)}.$$

Die Differenz der beiden Geschwindigkeiten parallel der Hauptaxe ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} B_1 \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right) &= 2\tau \left(p - \frac{p'}{\tau^2 \omega^2} \right), \text{ also nahe durch:} \\ B_1 \left(\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega^2} \right) &= 2\tau \left(p \omega^2 - \frac{p'}{\tau^2} \right); \end{aligned}$$

1) Diese Formel ist sehr ähnlich der von Cauchy und v. Lang gegebenen. Vgl. v. Lang, Pogg. Ann. 119, p. 74. 1863.

nimmt man hinzu, dass nahe:

$$\frac{B_1}{\Gamma} = \omega'^2 \quad \frac{B_3}{\Gamma} = \omega''^2$$

ist, wenn ω' und ω'' die beiden Geschwindigkeiten parallel der Aequatorebene bezeichnen, wie ω_1 und ω_2 dieselben parallel der Hauptaxe, so ist sehr nahe:

$$\varepsilon_{\frac{\pi}{2}} = \frac{N_1}{M_1} = \frac{M_2}{N_2} = \pm \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2(\omega'^2 - \omega''^2)},$$

oder durch Einführung der Brechungscoefficienten n :

$$= \pm \frac{\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1}}{2\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n''}\right)},$$

was, wenn es sich nur um ein Urtheil über die Grössenordnung handelt, durch:

$$\varepsilon_{\frac{\pi}{2}} = \pm \frac{n_1 - n_2}{2(n'' - n')}$$

ersetzt werden kann. Dies Verhältniss ist für Quarz¹⁾ etwa 0,0035, und man möchte glauben, dass Licht mit solcher Ellipticität von linear polarisirtem nicht zu unterscheiden sein wird. Sollten neue Beobachtungen diesen Werth nicht zulassen, so bleibt immer noch die Möglichkeit, p und p' von φ abhängig zu machen, was vollständig zulässig ist.

Dieselbe Entwicklung ist auch für Winkel φ , welcher kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ und nur nicht nahe $= 0$ sind, zulässig, man erhält dann:

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{N_1}{M_1} = \frac{M_2}{N_2} = \frac{\varepsilon_{\frac{\pi}{2}}}{\sin^2 \varphi},$$

und sieht, dass schon bei ziemlich kleinen Werthen von φ für die Beobachtung das Licht von linear polarisirtem nicht zu unterscheiden sein wird.

Allgemein schreibt sich in den obgen Zeichen:

$$\varepsilon_{\varphi} = \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega'^2 - \omega''^2}{2}\right)^2 \sin^4 \varphi + \omega^2(\omega_1 - \omega_2)^2 - \frac{\omega'^2 - \omega''^2}{2} \sin^2 \varphi}}{\omega(\omega_1 - \omega_2)} \quad 26_b.$$

1) Vgl. die Beobachtungen von v. Lang, Wien. Ber. 60. p. 767. 1869. Pogg. Ann. 140. p. 460. 1870.

V. Die Bedingungen des Ueberganges zwischen zwei Medien.¹⁾

Die Bedingungen des Ueberganges an der Grenze zweier Medien zerfallen in solche, die sich auf die Verschiebungen, und solche, die sich auf die Druckkräfte beziehen.

Für erstere nimmt man bekanntlich an, dass die der Grenze parallelen Componenten für beide Medien in der Grenze einander gleich werden, die normalen sich in unmerklicher Entfernung von der Grenze umgekehrt wie die Dichtigkeiten des Aethers in beiden Medien verhalten.²⁾ Letzteres ist aber nur gültig unter gewissen Annahmen, z. B. dass die von den ponderabeln Molecülen eingenommenen Räume unendlich klein gegen die freien Zwischenräume sind, und an den ponderabeln Molecülen keine Verdichtung des Aethers stattfindet, was vermuthlich beides nicht richtig ist. Stellen wir jedoch zunächst die gebräuchlichen Formeln auf, so lauten sie, wenn σ ein Linienelement in der Grenze, ν eines normal dazu bezeichnet:

$$\begin{aligned} & \bar{u}_h \cos(\sigma, x) + \bar{v}_h \cos(\sigma, y) + \bar{w}_h \cos(\sigma, z) \\ &= \bar{u}_k \cos(\sigma, x) + \bar{v}_k \cos(\sigma, y) + \bar{w}_k \cos(\sigma, z); \\ m_h (\bar{u}_h \cos(\nu, x) + \bar{v}_h \cos(\nu, y) + \bar{w}_h \cos(\nu, z)) \\ &= m_k (\bar{u}_k \cos(\nu, x) + \bar{v}_k \cos(\nu, y) + \bar{w}_k \cos(\nu, z)). \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 27$$

Die Dichtigkeiten m_h und m_k sollen später einander gleich gesetzt werden.

Die Gleichungen, welche man für das Verhalten der Druckcomponenten in der Grenze durch Betrachtung eines sehr niedrigen, über einem Element der Trennungsfläche zweier Medien construirten Cylinders erhält, sind für die Anwendung zur Bestimmung der durch die Grenze veranlassten Aenderung der Bewegung direct nicht zu brauchen, weil sie ausser den Werthen X_n Y_n Z_n noch die Wechselwirkungen zwischen Aether und Materie enthalten, welche an der Grenze thätig sind, und die, soweit sie über die Grenze hinüber stattfinden, in unseren Formeln bisher

1) Hierher Gehöriges s. auch p. 697—703 dieses Bandes.

2) Vgl. Cornu, Ann. de chim. et de phys. (4) 11. p. 283. 1867.

gar nicht vorkommen. Wir haben ihre Arbeit oben p. 876 (S_{hk}) genannt, aus diesem Werthe p. 880 durch Subtraction die Glieder ausgesondert:

$$\left(\overline{A_n} \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{B_n} \frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \overline{C_n} \frac{\partial \overline{w}}{\partial t}\right)_h + \left(\overline{A_n} \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{B_n} \frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \overline{C_n} \frac{\partial \overline{w}}{\partial t}\right)_k$$

und die Differenz S_{hk} genannt. Sie stand in der Formel für S_j (p. 880) in dem Oberflächenintegral J'_0 und das Princip der Energie verlangt, dass sie die Form eines Differentialquotienten nach der Zeit habe.

Wir genügen dem und erlangen zugleich eine für unsere Zwecke brauchbare Grenzbedingung für die Kraftcomponenten, indem wir die Arbeit S_{hk} für jedes Element verschwinden lassen. Diese Verfügung entspricht genau der von Hrn. Kirchhoff¹⁾ in die Optik eingeführten Annahme. Wir erhalten durch dieselbe nach dem Werth von S_{hk} die vierte Grenzgleichung:

$$0 = \left[(\overline{X_n} + \overline{A_n}) \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + (\overline{Y_n} + \overline{B_n}) \frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + (\overline{Z_n} + \overline{C_n}) \frac{\partial \overline{w}}{\partial t} \right]_h \quad \left| \quad \begin{array}{l} 28. \\ + \left[(\overline{X_n} + \overline{A_n}) \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + (\overline{Y_n} + \overline{B_n}) \frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + (\overline{Z_n} + \overline{C_n}) \frac{\partial \overline{w}}{\partial t} \right]_k \end{array} \right.$$

Um zu erkennen, was diese vier Bedingungen geben, wenden wir sie auf den Fall des Ueberganges zwischen zwei isotropen Medien 1 und 2 an, nehmen die XY -Ebene zur Grenze, die XZ zur Einfallsebene einer ebenen Welle und betrachten zunächst die Componente v , die sich bei isotropen Medien allein behandeln lässt, da bei solchen Schwingungen, die im ersten Medium senkrecht oder parallel der Einfallsebene stattfinden, im zweiten nur ebensolche hervorrufen.

Es gilt für dieselbe:

$$\overline{v_1} = \overline{v_2}$$

$$(\overline{Y_z} + \overline{A_z})_1 \frac{\partial \overline{v_1}}{\partial t} = (\overline{Y_z} + \overline{A_z})_2 \frac{\partial \overline{v_2}}{\partial t}$$

oder durch Einsetzen des Werthes für Y_z und A_z :

$$\left[(e_1 + a_1) \frac{\partial \overline{v_1}}{\partial z} + a_1' \frac{\partial^3 \overline{v_1}}{\partial z \partial t^2} \right] \frac{\partial \overline{v_1}}{\partial t} = \left[(e_2 + a_2) \frac{\partial \overline{v_2}}{\partial z} + a_2 \frac{\partial^3 \overline{v_2}}{\partial z \partial t^2} \right] \frac{\partial \overline{v_2}}{\partial t}.$$

Ich setze $v_1 = v_e + v_r$ und:

1) G. Kirchhoff, Berl. Ber. Acad. p. 75. 1876.

$$\begin{aligned} v_e &= E_s \sin \frac{1}{t} \left(t - \frac{x \sin \varphi_e - z \cos \varphi_e}{\omega_1} \right), \\ v_r &= R_s \sin \frac{1}{t} \left(t - \frac{x \sin \varphi_r + z \cos \varphi_r}{\omega_1} \right), \\ v_z &= D_s \sin \frac{1}{t} \left(t - \frac{x \sin \varphi_z - z \cos \varphi_z}{\omega_2} \right). \end{aligned}$$

Die erste Bedingung gibt:

$$\sin \varphi_e = \sin \varphi_r = \sin \varphi_1, \quad \frac{\sin \varphi_1}{\omega_1} = \frac{\sin \varphi_2}{\omega_2} \quad \text{und:}$$

$$E_s + R_s = D_s;$$

die zweite:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\omega_1} \left((e_1 + a_1) - \frac{a_1'}{t^2} \right) (E_s^2 - R_s^2) \cos \varphi_1 \\ &= \frac{1}{\omega_2} \left((e_2 + a_2) - \frac{a_2'}{t^2} \right) D_s^2 \cos \varphi_2, \end{aligned}$$

oder unter Rücksicht auf die im ersten Abschnitt abgeleitete Formel:

$$\omega^2 = \frac{(e + a) - \frac{a'}{t^2}}{r + m - n t^2}$$

$$\begin{aligned} \text{auch:} \quad &(m_1 + r_1 - n_1 \tau^2) (E_s^2 - R_s^2) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \\ &= (m_2 + r_2 - n_2 \tau^2) D_s^2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2. \end{aligned}$$

Diese Formel würde durch die gemachten Annahmen an Stelle des Satzes von der Erhaltung der lebendigen Kraft der Aetherbewegung treten, welchen Fresnel und Neumann zum Ausgangspunkt gewählt haben, welcher aber im Allgemeinen mit dem Princip der Energie bei Berücksichtigung der Wechselwirkungen zwischen Aether und Materie nicht vereinbar ist, vielleicht weil er die von jenen herrührende potentielle Energie ignoriert.

Zu den Neumann'schen Formeln gelangt man hiervon durch die Annahme $m_1 + r_1 = m_2 + r_2$, $n_1 = n_2$, welche, da das eine Medium auch der von ponderabler Materie freie Raum sein kann, worin $r = n = 0$ ist, allgemein das Verschwinden der Glieder n , und, falls man die Annahme constanter Dichte des Aethers einführt ($m_1 = m_2$) auch das der Glieder r fordern würde. Indessen sind die Prüfungen der Neumann'schen Formeln nicht mit solcher Genauigkeit möglich, dass nicht ein so kleiner Werth n , wie ihn die Dispersionsbeobachtungen zu fordern scheinen, mit ihnen ver-

einbar wäre. Ueber die Grösse von r gestatten die Beobachtungen keinen Schluss. Jedenfalls ist hervorzuheben, dass auch die Annahme $r = n = 0$ die Dispersion nicht unmöglich macht, die Neumann'schen Reflexions- und Brechungsformeln aber für alle Farben gültig werden lässt.

Die entsprechenden Fresnel'schen Formeln ergeben sich nur durch die Annahmen:

$$e_1 + a_1 = e_2 + a_2, \quad a_1' = a_2',$$

was nach dem Obigen auf $a' = 0$ führt; sie fordern also gerade das Verschwinden desjenigen Gliedes, welches in erster Linie die Dispersion erklärt.

Ich gehe nun zu den in der Einfallsebene schwingenden Componenten über. Die Grenzbedingungen für dieselben sind:

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_2, \quad \bar{w}_1 = \bar{w}_2$$

$$\left[(\bar{X}_z + \bar{A}_z) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{Z}_z + \bar{C}_z) \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right]_1 = \left[(\bar{X}_z + \bar{A}_z) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{Z}_z + \bar{C}_z) \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right]_2$$

oder unter Einsetzung der Werthe:

$$\begin{aligned} & \left[(e_1 + a_1) \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial x} \right) + a_1' \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} \\ & + 2 \left((e_1 + a_1) \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial z} + a_1' \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial t^2 \partial z} \right) \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial t} \\ & = \left[(e_2 + a_2) \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial x} \right) + a_2' \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} \\ & + 2 \left((e_2 + a_2) \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial z} + a_2' \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial t^2 \partial z} \right) \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial t}. \end{aligned}$$

Hierin setze ich:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_e + u_r, & w_1 &= w_e + w_r \quad \text{und:} \\ u_e &= E_p \cos \varphi_e \sin \frac{1}{r} \left(t - \frac{x \sin \varphi_e - z \cos \varphi_e}{w_1} \right), \\ w_e &= E_p \cos \varphi_e \sin \frac{1}{r} \left(t - \frac{x \sin \varphi_e - z \cos \varphi_e}{w_1} \right), \\ u_r &= R_p \cos \varphi_r \sin \frac{1}{r} \left(t - \frac{x \sin \varphi_r + z \cos \varphi_r}{w_1} \right), \\ w_r &= -R_p \sin \varphi_r \sin \frac{1}{r} \left(t - \frac{x \sin \varphi_r + z \cos \varphi_r}{w_1} \right), \\ u_2 &= D_p \cos \varphi_2 \sin \frac{1}{r} \left(t - \frac{x \sin \varphi_2 - z \cos \varphi_2}{w_2} \right), \\ w_2 &= D_p \sin \varphi_2 \sin \frac{1}{r} \left(t - \frac{x \sin \varphi_2 - z \cos \varphi_2}{w_2} \right), \end{aligned}$$

so folgt:

$$\sin \varphi_e = \sin \varphi_r = \sin \varphi_1, \quad \frac{\sin \varphi_1}{\omega_1} = \frac{\sin \varphi_2}{\omega_2} \quad \text{und:}$$

$$(E_p + R_p) \cos \varphi_1 = D_p \cos \varphi_2 \quad \text{a.}$$

$$m_1 (E_p - R_p) \sin \varphi_1 = m_2 D_p \sin \varphi_2 \quad \text{b.}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_1} \left((e_1 + a_1) - \frac{a_1'}{\tau^2} \right) (E_p^2 - R_p^2) \cos \varphi_1 \\ = \frac{1}{\omega_2} \left((e_2 + a_2) - \frac{a_2'}{\tau^2} \right) D_p^2 \cos \varphi_2, \end{aligned} \quad \text{c.}$$

oder dies letztere umgeformt, wie oben:

$$\begin{aligned} (m_1 + r_1 - n_1 \tau^2) (E_p^2 - R_p^2) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \\ = (m_2 + r_2 - n_2 \tau^2) D_p^2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2. \end{aligned}$$

Das Product der Gleichungen (a) und (b) gibt aber:

$$m_1 (E_p^2 - R_p^2) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 = m_2 D_p^2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2, \quad \text{d.}$$

d. h. im allgemeinen einen Widerspruch mit Gleichung (c). Denselben zu heben, kann man entweder annehmen, es sei r und n allgemein Null, worüber schon oben (p. 879, 889 u. 902) gesprochen ist, oder aber (entsprechend dem im Anfang dieses Abschnittes Gesagten), es sei die Formel (b) nur angenähert richtig und müsste an Stelle von m eigentlich $m + r - n\tau^2$ stehen, was im Hinblick auf die Bedeutung der Constanten r und n nicht unmöglich erscheint. Beide Annahmen sind zulässig.

Je nachdem man die eine oder die andere Verfügung eintreten lässt, gelangt man zu Formeln, die durch die bereits in den früheren Abschnitten zu Grunde gelegte Annahme gleicher Dichte des Aethers in allen Körpern (d. h. $m_1 = m_2$) zu den strengen oder (im oben erwähnten Sinne) angenäherten Neumann'schen Reflexions- und Brechungsgesetzen führen. Und zwar finden dieselben sich für jede einzelne Farbe gültig, während sich in beiden Medien für verschiedene Farben verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, also Dispersionen nach einem nahe der Beobachtung entsprechenden Gesetze ergeben. Zu den Fresnel'schen Gesetzen gelangt man, wie oben, nur durch die Relationen $e_1 + a_1 = e_2 + a_2$ und $a_1' = a_2' = 0$, welche die Unmöglichkeit einer genügenden Erklärung der Dispersion in sich schliessen.

Schluss.

Die Resultate der vorstehenden Untersuchungen fasse ich im Folgenden noch einmal kurz zusammen.

Die Elasticitätstheorie ist in ihrem gegenwärtigen Zustande nur auf solche optische Medien anwendbar, bei welchen die Absorption unmerklich ist; es ist im Vorstehenden angenommen, dass dergleichen wirklich existiren. Darauf ist untersucht worden, in welcher Hinsicht sich die gebräuchlichen Differentialgleichungen innerhalb der Grenzen, welche das als gültig angenommene Princip der Energie vorschreibt, erweitern lassen. Diese Erweiterungen waren auf die Wechselwirkungen zwischen Aether und Materie zu beschränken, da die für die inneren Kräfte des Aethers und der Materie bisher angenommenen Ausdrücke durch die Beobachtungen bestätigt worden sind.

Es fanden sich zwei Systeme von je vier Werthen für die Componenten ABC dieser Wechselwirkungen mit dem Princip der Energie vereinbar.

Die vier Werthe des ersten Systemes waren allein resp. von den Verschiebungen des Aethers gegen die Materie und ihren drei ersten Differentialquotienten nach der Zeit abhängig, die vier Werthe des zweiten Systems enthielten die Aenderungen jener Grössen nach den Coordinaten. Die mathematische Verfolgung dieser Annahmen zeigte, dass keine bisher bekannte Erscheinung die Einführung der den dritten Differentialquotienten der Verschiebungen nach der Zeit enthaltenden Componenten nöthig zu machen scheint. Es sind also nur sechs der im allgemeinen möglichen acht Ausdrücke für die Componenten A , B , C der vorstehenden Theorie zum Grunde gelegt. Von ihnen sind wiederum laut den Beobachtungen nur die letzten drei zur Erklärung der Erscheinungen wesentlich, die ersten drei wahrscheinlich sehr klein oder streng gleich Null.

Von weiteren Annahmen ist benutzt worden, dass der Aether nahezu incompressibel, von verschwindend geringer Dichte und in allen Körpern von gleicher Natur (Dichte und Elasticität) sei.

Die auf dieser Grundlage aufgeführte Theorie hat folgende hauptsächlichste Folgerungen ergeben.

In isotropen Medien findet sich ein von der Farbe des Lichtes abhängiges Gesetz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, welches durch die Beobachtungen solcher Medien, die als nahe vollkommen durchsichtig gelten, angenähert bestätigt wird.

In krystallinischen Medien geben sich im allgemeinen Gesetze, welche viel complicirter sind, als die bezüglich Fresnel'schen; dies ist begreiflich, weil unsere Theorie die allgemeinsten mit dem Princip der Energie verträglichen Werthe der Componenten der Wechselwirkungen zwischen Materie und Aether benutzt. Die Discussion ergibt die Neumann'sche Definition der Polarisationssebene wahrscheinlicher als die Fresnel'sche; setzt man sie voraus, so lässt sich durch eine Reihe in sich widerspruchsfreier Relationen zwischen den verfügbaren Constanten genau das Fresnel'sche Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten aus dem zunächst gefundenen allgemeineren gewinnen. Die Parameter dieses Gesetzes aber werden, — worauf besonders hinzuweisen ist, — von der Farbe des Lichtes abhängig, und dadurch ergibt sich neben Doppelbrechung auch Dispersion, speciell die Dispersion der optischen Axen in genauer Uebereinstimmung mit der Beobachtung.

In isotropen Medien erscheinen Kräfte denkbar, welche in jeder Richtung nur zwei circularpolarisirten entgegengesetzt rotirenden Wellen sich mit constanten Geschwindigkeiten fortpflanzen gestatten. Für die Geschwindigkeitsdifferenz findet sich ein Gesetz, welches allgemeiner ist, als das durch die Beobachtung wahrscheinlich gemachte, jenes also in sich enthält.

Dieselben Kräfte in krystallinischen Medien angenommen, ergeben im allgemeinen elliptische Doppelbrechung. Die Bahnellipsen der beiden, in einer bestimmten Richtung sich fortpflanzenden Wellen liegen mit ihren grossen Axen normal zueinander und sind je nach der getroffenen Verfügung sehr nahe oder streng einander ähnlich. In der Richtung der optischen Axen findet circulare Polarisation statt, bei ein-

axigen Krystallen in der Richtung normal dazu angenähert oder streng lineare Polarisation. Das Gesetz der Ellipticität stimmt nahe mit den bezüglichen Beobachtungen Jamin's.

Für die Untersuchung der an der Grenze zweier durchsichtiger Medien stattfindenden Erscheinungen ist zunächst die Dichtigkeit des Aethers in beiden Medien verfügbar gelassen, um einen Einblick zu gewinnen, in wie weit sich die Fresnel'sche oder Neumann'sche Definition der Polarisationsebene hier mit grösserer Wahrscheinlichkeit ergibt. Die Grenzbedingungen für die Verschiebungscomponenten werden in gewohnter Weise gebildet, unter der Hervorhebung, dass die Gleichung für die Componente normal zur Grenze gewisse willkürliche Annahmen enthält. Als vierte Grenzbedingung wird im Anschluss an eine von Kirchhoff getroffene Verfügung angenommen, dass eine gewisse Arbeit der in der Grenze stattfindenden Wechselwirkung zwischen Aether und Materie verschwindet.

Die Anwendung dieser Grenzgleichungen auf die Grenze zweier isotroper durchsichtiger Medien ergibt ohne irgend eine Schwierigkeit die Neumann'schen Formeln je nach den getroffenen Verfügungen streng oder angenähert, und zwar für jede Farbe in derselben Form gültig — die Fresnel'schen aber nur, wenn man die Dispersion aufgibt. Die Neumann'sche Definition der Polarisationsebene erscheint also durch diese Theorie, welche die äusserste zulässige Erweiterung der Elasticitätstheorie bildet, wahrscheinlicher als die Fresnel'sche.

Unsere Theorie gibt nach dem Vorstehenden für alle Erscheinungen, welche an nahe vollkommen durchsichtigen Medien nachgewiesen sind, Gesetze, die mit Ausnahme des Dispersionsgesetzes, welches genauer geprüft werden kann als irgend ein anderes und überdies erfahrungsgemäss ganz besonders mit den Absorptionsverhältnissen des Mediums variabel ist, mit der Beobachtung vollständig übereinstimmen, sie kann daher als eine Erklärung derselben angesehen werden, wenngleich noch die Aufgabe bleibt, die eingeführten Kräfte aus einer bestimmten Vorstellung abzuleiten und die Werthe ihrer Constanten zu bestimmen. Freilich gibt sie

in jedem Falle nur den Schlüssel zu einem beschränkten Gebiete der Optik und gestattet keine Anwendung auf die zahlreichen und merkwürdigen, von Absorption begleiteten Phänomene. Da aber für dieselben, wie oben auseinander gesetzt, gegenwärtig Grundvorstellungen, die zum Ausgang einer exacten Theorie nöthig sind, noch absolut fehlen, mussten sie durchaus ausser Betracht bleiben.

Königsberg i. Pr., April 1883.

IX. *Zur Theorie des Lichts; von E. Lommel.*

Hr. W. Voigt hat in einer Abhandlung: „Bemerkungen zu Hrn. E. Lommel's Theorie der Doppelbrechung, der Drehung der Polarisationssebene und der elliptischen Doppelbrechung“¹⁾ gegen die von mir vertretene Lichttheorie einige Einwände geltend gemacht, welche im Folgenden besprochen werden sollen.

Zunächst wird die Art und Weise, wie ich die Reibungskräfte in die Differentialgleichungen eingeführt habe, beanstandet.

Die Anschauungen und Erwägungen, welche mich hierbei leiteten, sind aber folgende.

Die in einem Volumenelement enthaltene Körpermasse m und Aethermasse μ werden durch die von einem leuchtenden Punkt kommende Lichtwelle auseinandergedrängt, nach entgegengesetzten Seiten ihrer gemeinschaftlichen Gleichgewichtslage. Diese gemeinschaftliche Gleichgewichtslage, d. i. der Punkt, nach welchem die Molecularkräfte die Körper- und Aethermasse nach jeder Störung zurückzuführen streben (nicht zu verwechseln mit dem gemeinsamen Schwerpunkt der beiden Massen, welcher nur im Ruhezustand mit jenem Punkte zusammenfällt), bleibt fest liegen.²⁾ Werden die

1) Voigt, Wied. Ann. 17. p. 468. 1882.

2) Die Begründung dieser für die Theorie ganz wesentlichen Annahme folgt weiter unten.