IV. THEORIE DER WELLEN

VON

FRANZ GERSTNER,

ordentl. Prof. d. höhern Mathem. zu Prag *).

Keine mathematische Untersuchung der Natur hat bisher grössere Schwierigkeiten gezeigt, als die Erörterung der Bewegungsgesetze des Wassers, der Luft, und überhaupt aller Flüssigkeiten. Es ist der Analysis gelungen, die Mechanik des Himmels den genauesten Rechnungen zu unterwerfen; für die Bewegung des Wassers aber hat man bis jetzt nur genaue Differenzialgleichungen gefunden, zu deren endlicher Auflösung alle bekannte Näherungsmethoden nicht ausreichen. Da wir so oft vom Wasser Gebrauch zu machen, oder den schädlichen Wirkungen desselben zu begegnen haben, so wäre es sehr zu wünschen, daß man für alle Fälle der Hydraulik ähnliche Gesetze und analytische Rechnungsformeln finden möchte, als man
in

*) *Abhandlungen der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag für das Jahr 1802.* Ich halte es für verdienstlich, diese scharfsinnige Entwicklung einer schwierigen physikalisch-mathematischen Theorie bekannter zu machen, als sie es bis jetzt zu seyn scheint, und den Reitz zu dieser Untersuchung durch den Zusammenhang, in den ich sie hier stelle, noch zu erhöhen.

Gilbert.

in den Schriften Newton's, Euler's, Lagrange's, Laplace's, u. a. für die Astronomie antrifft, zu denen man nur die Coëfficienten aus einigen bewährten und zweckmäßigen Erfahrungen zu suchen hat, um bei dem Gebrauche derselben in andern Fällen des Erfolges vollkommen versichert zu seyn,

Der Begriff von *Flüssigkeit* an und für sich fordert, daß jedes Theilchen mit der größten Leichtigkeit zwischen den übrigen bewegt werden könne. Hieraus folgt von selbst, daß in jeder Flüssigkeit unendlich viele verschiedene Bewegungen zu gleicher Zeit Statt finden können; worüber es offenbar schwer, und in manchen Fällen vielleicht unmöglich ist, eine allgemeine Rechnung zu führen. Da jedoch kein Wassertheilchen seine Bewegung willkürlich ändern kann, sondern an die bekannten Gesetze der Trägheit, der Schwere und des Drucks der umgebenden Theilchen gebunden ist, so müssen diese verschiedenen Bewegungen, wenn sie nicht durch andere zufällige Ursachen gestört werden, allgemeinen Gesetzen unterworfen seyn; und es kommt nur darauf an, Wege ausfindig zu machen, auf denen es möglich wird, zur Kenntniß dieser Gesetze zu gelangen. — Einen eigenen Weg dieser Art liefert die gegenwärtige Abhandlung, worin die *Bewegungsgesetze der Wellen* aus den ersten Grundsätzen der Mechanik abgeleitet, mit *geometrischer Genauigkeit* entwickelt, und auf endliche Gleichungen gebracht wor-

den sind. Möchte dieses erste Beispiel veranlassen, daß auch die übrigen Aufgaben der Hydrodynamik mit gleichem Erfolge bearbeitet würden.

Den ersten Versuch einer Theorie der Wellen hat Newton *) gemacht. Er verglich diese Bewegung mit der Bewegung des Wassers in umgebogenen Röhren, welches, wie Lagrange **) bemerkt, nicht ganz richtig ist, indem Newton nur auf die senkrechte, und nicht zugleich auf die horizontale Bewegung des Wassers Rücksicht genommen hat, die doch nothwendig mit der erstern verbunden werden muß, weil das uneingeschränkte Wasser die Fähigkeit hat, sich nach allen Seiten zu bewegen.

Lagrange gesteht, daß er selbst noch keine vollkommene Theorie der Wellen geben könne, und versucht sie daher auf dem Wege der Annäherung unter folgenden Bedingungen: *erstens*, daß die Höhe der Wellen in Vergleichung mit ihrer Breite sehr klein, also nur die horizontale Bewegung des Wassers zu betrachten sey; *zweitens*, daß alle Wassertheilchen, welche sich in einer gemeinschaftlichen Senkrechten befinden, mit einerlei Kraft und Geschwindigkeit fortgeschoben

*) *Principia phil. nat. mathem. T. II. Prop. 45. et 46.; Illustrata pot. comment. J. Tefsaneck, Pragae 1785. p. 263 et sq.*

**) *Mém. de l'acad. Roy. des Scienc. Année 1786. Berlin 1788. p. 194. und Mécanique analytique. Paris 1798. Part. II. Sect. VIII. n. 35, 36, 37.*

würden; *drittens*, daß diese Bewegung nur auf eine geringe Tiefe unter die Oberfläche des Wassers hinab reiche. Von diesen Voraussetzungen ist die erste nicht so allgemein, als es für diesen Gegenstand zu wünschen wäre, und die zweite hat die Erfahrung gegen sich, und läßt sich nicht ohne Schwierigkeit mit der dritten, welche übrigens durch die Erfahrungen der Taucher bestätigt wird, vereinigen. Lagrange findet nach seiner Rechnung zwischen den Wellen und den Schwingungen der Luft beim Schalle die größte Aehnlichkeit, und schließt sonach, daß die Geschwindigkeit der Wellen, wie auch immer ihre Gestalt beschaffen seyn mag, derjenigen gleich sey, welche Körper erhalten, wenn sie von einer Höhe herab fallen, die halb so groß ist, als die Tiefe des bewegten Wassers.

Laplace *) geht bei seiner Theorie von der Vorstellung aus, daß ein cylindrischer Körper in das Wasser getaucht, darin so lange, bis alles Wasser in Ruhe steht, fest gehalten, und dann plötzlich wieder heraus gezogen werde, wodurch das Wasser offenbar in eine wellenförmige Bewegung gerathen muß. Um der Schwierigkeit der Rechnung auszuweichen, nimmt er an, die Tiefe, bis auf welche der Körper eingetaucht wird, sey nur sehr klein (*eigentlich unendlich klein*), so daß nur sehr kleine Wellen entstehen, und jedes Wasser-

*) *Mém. de l'Acad. Roy. des Scienc. Année 1776. Paris 1779. p. 542.*

theilchen sowohl nach der senkrechten als horizontalen Richtung nur unendlich wenig von seiner Stelle gerückt wird. Seine Rechnung lehrt, daß die Geschwindigkeit der Wellen von der Krümmung des eingetauchten Körpers abhängt, folglich mit der Geschwindigkeit des Schalles, welche von der ersten Impulsion unabhängig ist, keine Aehnlichkeit hat.

Diese Verschiedenheit der Resultate, zu welchen die Rechnungen der beiden größten Analytischen unserer Zeit führen, ist ein offener Beweis von der Schwierigkeit dieser Aufgabe, an und für sich aber nur eine Folge von den verschiedenen Voraussetzungen, die sie in die Auflösung derselben eingeflochten haben. Ich habe mich in dieser Abhandlung bemühet, nicht nur alles Fremde wegzulassen, sondern auch, durch leichte und einfache Darstellung der Methode, selbst Schülern begreiflich zu werden.

I.

1. Wir wollen hier nicht die Art und Weise untersuchen, wie Wellen entstehen, oder gestillet werden, sondern annehmen, das Wasser sey bereits in einer Wellenbewegung und es setze sie, sich selbst überlassen, fort. Diese Voraussetzung ist dem gewöhnlichen Gange der mathematischen Analysis angemessen, und es wird sich auch hieraus über die erstere Frage Licht verbreiten.

Der statische Druck, den jedes Wassertheilchen erleidet, ist bekannter Massen auf der Ober-

fläche des Wassers allerorten gleich, und zwar $= 0$, das Wasser mag sich bewegen, oder ruhig stehen. Unter der Oberfläche nimmt dieser Druck mit der Tiefe des Wassers zu. In dem bewegten Wasser aber ist derselbe nicht, so wie im ruhigen; der Tiefe allein proportional, weil die verschiedene Bewegung der Theilchen auch noch einen wechselseitigen Druck hervor bringen kann.

Wir wollen nun einen beliebigen Punkt *A* (Taf. III. Fig. 1.) unter der Oberfläche des Wassers annehmen, und *alle Punkte, welche mit demselben einen gleichen Druck erfahren*, durch die Linie *AMN* verbunden denken. Es erhellet von selbst, daß diese Linie im ruhigen Wasser gerade und horizontal, im bewegten Wasser aber irgend eine krumme Linie seyn werde, für welche wir die Gleichung und übrigen Eigenschaften auffuchen wollen.

2. Die Beschaffenheit dieser Linie sey, welche sie wolle, so ist schon vorläufig gewiß, daß sie zugleich den *Weg* bezeichnet, nach welchem sich die Wassertheilchen *A, M, N* bewegen. Denn wenn ein Wassertheilchen von dieser Linie abweichen, und über dieselbe hinauf oder hinab verschoben werden sollte, so müßte eine Kraft vorhanden seyn, welche dieses Verschieben bewirkte, und also würde der Druck von beiden Seiten dieser Linie nicht aller Orten gleich seyn; welches unserer Voraussetzung entgegen ist.

3. Es bewege sich nun irgend ein Wassertheilchen nach der krummen Linie *AMN*. Weil der

Druck, den es von den umgebenden Theilchen leidet, auf dieser Bahn von allen Seiten gleich ist, so haben wir bei der Beschleunigung desselben nur auf das *Gewicht* dieses Theilchens zu sehen, das wir dM setzen wollen. Man ziehe durch den höchsten Punkt der Bahn, A , die Horizontallinie AQ ; das Theilchen befinde sich in M , und man ziehe MP senkrecht auf AQ ; so ist AM der wirkliche, AP der horizontale, und PM der senkrechte *Raum*, den das Theilchen zurückgelegt hat. Man setze

$$\begin{array}{lll} AM = s. & AP = x. & PM = y. \\ MN = ds. & PQ = dx. & ON = dy. \end{array}$$

Die *Geschwindigkeit* des Theilchens in M nach der Richtung seiner Bahn sey $= v$; so ist die Geschwindigkeit desselben nach der horizontalen Richtung $= v \frac{dx}{ds}$, und die Geschwindigkeit nach der senkrechten Richtung $= v \frac{dy}{ds}$.

Eben so zerfällt die *Kraft* der Schwere $MC = dM$, in $MD = dM \cdot \frac{dy}{ds}$, welche das Theilchen nach der Richtung seiner Bahn beschleunigt, und in $ME = dM \cdot \frac{dx}{ds}$, welche einen Druck bewirkt, dessen Richtung auf die Bahn MN senkrecht ist, folglich die Bewegung des Theilchens weder verzögert, noch beschleuniget.

4. Durch die erstere Kraft $\left(MD = dM \frac{dy}{ds} \right)$ wird die Geschwindigkeit des Theilchens, v , während der Zeit dt um dv vermehrt. Setzen wir die Geschwindigkeit, welche die Körper durch freien

Fall in einer Sekunde erhalten, $= 2g$; so ist die Geschwindigkeit, welche die Schwere während der Zeit dt giebt, $= 2gdt$. Da nun die Kräfte ihren Wirkungen, die sie in der nämlichen Zeit hervorbringen, proportional sind, so haben wir $dM: dM \frac{dy}{ds} = 2gdt: dv$. Demnach ist

$$dv = 2gdt \frac{dy}{ds}, \text{ oder } \left(\text{wegen } \frac{ds}{dt} = v \right), \\ vdv = 2gdy.$$

Das Integrale dieser Gleichung ist offenbar

$$v^2 = 4gy + C.$$

Zur Bestimmung der beständigen GröÙe C wollen wir die *Geschwindigkeit*, welche das Theilchen in A hatte, $= c$, und die *Fallhöhe*, welche dieser Geschwindigkeit zugehört, oder $\frac{c^2}{4g} = h$ setzen, so haben wir

$$v^2 = c^2 + 4gy = c^2 \left(\frac{h+y}{h} \right). \quad (A)$$

5. Von der zweiten Kraft, ME , mit welcher das Gewicht des Wassertheilchens senkrecht auf seine Bahn drückt, ist die *Fliehkraft* dieses Theilchens abzuziehen; denn vermöge derselben strebt es nach der Richtung der Tangente MD fortzugehen, und sich also dem Gesetze der Trägheit gemäß von der krummen Linie AMN zu entfernen. Es sey der Krümmungshalbmesser des Bogens $MN = r$, so ist diese Fliehkraft, nach dem bekannten Lehrsätze der Mechanik, $= \frac{dM \cdot v^2}{2g \cdot r}$. Demnach ist der *Druck* des Wassertheilchens auf die Bahn $= dM \left(\frac{dx}{ds} - \frac{v^2}{2gr} \right)$.

6. Das Waffertheilchen dM hat offenbar die Linie MN zu feiner Grundlinie; wenn wir demnach feinen Druck auf die Bahn mit $MN (= ds = vdt)$ dividiren, fo erhalten wir das *Element der Wafferfäule*, womit jeder Punkt der Linie MN befchweret ift, $= \frac{dM}{vdt} \left(\frac{dx}{ds} - \frac{v^2}{2gr} \right)$. Diefe Wafferfäule ift aber (gemäß 2.) für alle Punkte der Linie AMN beftändig; fetzen wir alfo den Krümmungshalbmefler für den Ort A , $= k$, fo haben wir die Gleichung

$$\frac{dM}{vdt} \left(\frac{dx}{ds} - \frac{v^2}{2gr} \right) = \frac{dM}{cdt} \left(1 - \frac{c^2}{2gk} \right),$$

$$\text{oder} \quad \frac{dx}{ds} - \frac{v^2}{2gr} = \frac{v}{c} \left(1 - \frac{2h}{k} \right).$$

Setzen wir nun ftatt r den bekannten Werth des Krümmungshalbmeflers $= - \frac{dy}{d \cdot \frac{dx}{ds}}$, und multi-

pliciren alle Glieder mit dv , fo erhalten wir

$$dv \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{v^2 dv}{2gdy} \cdot d \frac{dx}{ds} = \frac{v dv}{c} \left(1 - \frac{2h}{k} \right).$$

Nun aber war (nach 4.) $v dv = 2gdy = \frac{c^2 dy}{2h}$.

Setzen wir diefen Werth in unfere Gleichung, und

$\frac{1}{2h} - \frac{1}{k} = \frac{1}{m}$, fo wird

$$dv \cdot \frac{dx}{ds} + v \cdot d \frac{dx}{ds} = c dy \left(\frac{1}{2h} - \frac{1}{k} \right) = \frac{c dy}{m}.$$

Das Integral diefer Gleichung ift offenbar $v \frac{dx}{ds}$

$= C + \frac{cy}{m}$. Und weil im höchften Punkte der Bahn A , $v = c$, $dx = ds$, $y = 0$; fo ift die beftändige Gröfse $C = c$. Demnach haben wir die

Geschwindigkeit des Wassertheilchens nach der horizontalen Richtung, oder

$$v \cdot \frac{dx}{ds} = c \left(1 + \frac{y}{m} \right). \quad (\text{B.})$$

Und erheben wir diese Gleichung auf das Quadrat, und setzen $ds^2 = dy^2$ statt dx^2 , so erhalten wir $v^2 - \frac{v^2 dy^2}{ds^2} = c^2 + \frac{2c^2 y}{m} + \frac{c^2 y^2}{m^2}$; und da nach 4. (A.) $v^2 = c^2 + \frac{c^2 y}{h}$ ist, so ergibt sich, nach den nöthigen Reductionen, die *Geschwindigkeit des Wassertheilchens nach der senkrechten Richtung, oder*

$$v \frac{dy}{ds} = c \sqrt{\left(\frac{2y}{k} - \frac{y^2}{m^2} \right)}. \quad (\text{C.})$$

7. Hieraus folgt: *Erstens*, daß die senkrechte Bewegung verschwindet, so wohl für $y = 0$, als auch für $y = \frac{2m^2}{k}$. Demnach ist die *Höhe der Wellen* $= \frac{2m^2}{k}$ [= BE in Fig. 2.].

Zweitens. Die Geschwindigkeit nach der Senkrechten ist am größten für $y = \frac{m^2}{k} = \frac{1}{2} BE$, oder in der Mitte zwischen dem niedrigsten und höchsten Punkte einer Welle.

Drittens. Die horizontale Geschwindigkeit nimmt mit der Tiefe y zu. Sie ist daher am kleinsten im höchsten Punkte A, und am größten im niedrigsten Punkte B der Welle. In A ist sie $= c$, und in B ist sie $= c \left(1 + \frac{2m}{k} \right) = c \left(\frac{k + 2h}{k - 2h} \right)$.

8. Die Zeit, in welcher das Theilchen von A nach M gelanget, ergibt sich am kürzesten aus

der Gleichung (C). Denn man erhält aus ihr ohne Schwierigkeit

$$\frac{ds}{v} = \frac{dy}{c \sqrt{\left(\frac{2y}{k} - \frac{y^2}{m^2}\right)}} = dt. \quad \text{Um das Integrale}$$

dieser Gleichung zu finden, setze man $1 - \frac{ky}{m^2} = \cos \varphi$. Es ist dann $y = \frac{m^2}{k} (1 - \cos \varphi)$; und $dy = \frac{m^2}{k} d\varphi \sin \varphi$. Mittelft dieser Werthe erhält man nach den nöthigen Reductionen $dt = \frac{m d\varphi}{c}$; folglich

$$\text{die Zeit } t = \frac{m}{c} \varphi. \quad (D).$$

Wenn wir über die Höhe der Welle EB , $= \frac{2m^2}{k}$, in Fig. 2. den Kreis ERB beschreiben, und durch M die Horizontallinie MS ziehen, welche diesen Kreis in R schneidet, so ist $\cos. ECR = \frac{CS}{CR} = \frac{CE - SE}{CR} = \left(\frac{m^2}{k} - y\right) : \frac{m^2}{k} = 1 - \frac{ky}{m^2} = \cos. \varphi$. Folglich ist der Winkel $ECR = \varphi$. Diefem gemäß verhalten sich die Zeiten, in welchen das Theilchen von A nach M und von A nach B gelangt, wie die Bogen ER und ERB .

§. Setzen wir den obigen Werth von $y = \frac{m^2}{k} (1 - \cos. \varphi)$ in die Gleichungen (B) und (C), so erhalten wir noch folgende Ausdrücke für die horizontale Geschwindigkeit

$$\frac{v dx}{ds} = \frac{cm}{2h} - \frac{cm}{k} \cos. \varphi \quad (E)$$

und für die *senkrechte Geschwindigkeit*

$$\frac{v dy}{ds} = \frac{cm}{k} \sin. \varphi. \quad (F).$$

10. Wir wollen nunmehr die *Gleichung für die Bahn AMB* suchen. Die Gleichung (E) giebt

$$dx = \left(\frac{cm}{2h} - \frac{cn^2}{k} \cos. \varphi \right) \frac{ds}{v}. \quad \text{Weil aber (nach 8.)}$$

$$\frac{ds}{v} = dt = \frac{m}{c} d\varphi \text{ ist, so wird } dx = \frac{m^2}{2h} \cdot d\varphi - \frac{m^2}{k}$$

$$\cos. \varphi d\varphi, \text{ und } x = \frac{m^2}{2h} \varphi - \frac{m^2}{k} \sin. \varphi, \text{ wo kei-}$$

ne beständige Gröfse hinzu zu setzen kommt, weil für den Punkt *A* so wohl *x* als auch φ verschwinden. Die krumme Linie *AMB* wird demnach durch folgende zwei Gleichungen bestimmt:

$$y = \frac{m^2}{k} (1 - \cos. \varphi) = \frac{m^2}{k} \left(1 - \cos. \frac{ct}{m} \right) \quad (G).$$

$$x = \frac{m^2}{2h} \varphi - \frac{m^2}{k} \sin. \varphi = \frac{mct}{2h} - \frac{m^2}{k} \sin. \frac{ct}{m} \quad (H).$$

Aus diesen beiden Gleichungen läßt sich für jede beliebige Zeit *t* so wohl die Tiefe *y*, als auch der horizontale Weg *x* jedes Wassertheilchens berechnen, wenn für den höchsten Punkt der Bahn der Wassertheilchen die Geschwindigkeit *c*, und der Krümmungshalbmesser *k* gegeben sind.

Diese Gleichungen zeigen nun, daß die krummen Linien, welche die Wellen vorstellen, *Radlinien* (*cycloides*) sind. Denn es sey (Fig. 5.) der Halbmesser des Kreises, welcher auf der geraden Linie *ID* fortgewälzt wird, *IO* = *a*, und die Entfernung des die krumme Linie beschreibenden Stif-

tes vom Mittelpunkte, $AO, = b$; nachdem der Kreis von I bis D gewälzt worden, befinde sich der Punkt I in i und der beschreibende Stift A in M , und es sey der Winkel $DCi = \phi$. Dann ist $SV = ID = iD = a\phi$, $MV = b \sin. \phi$, $CV = b \cos. \phi$; demnach $PM = GC - CV$ oder $y = b - b \cos. \phi$, und $AP = SV - MV$ oder $x = a\phi - b \sin. \phi$. Hält man diese Gleichungen mit den vorigen (G) und (H) zusammen, so ergibt sich

der Halbmesser des Rades $IO = a = \frac{m^2}{2h}$,

die Entfernung des die krumme Linie beschreibenden Stifts vom Mittelpunkte, $AO, = b = \frac{m^2}{k}$.

11. Aus der Gleichung (G) $a = \frac{m^2}{2h}$ folgt, $m = \sqrt{2ah} = c \sqrt{\frac{a}{2g}}$. Setzen wir diesen Werth in die Gleichung (D), so erhalten wir folgenden Ausdruck für die Zeit $t = \phi \sqrt{\frac{a}{2g}}$; und bezeichnen wir mit π das Verhältniß der Peripherie des Kreises zum Durchmesser, so ergibt sich hieraus

$$\text{die Zeit einer Welle} = \pi \sqrt{\frac{2a}{g}}.$$

In dieser Zeit gelangt das Wasser von dem Gipfel einer Welle A (Fig. 2.) zum Gipfel der nächstfolgenden Welle.

Diese Zeit hängt daher bloß ab vom Durchmesser des Kreises, $2a$, oder von der Breite der Wellen, $2AE, = 2a \pi$, und ist von der Tiefe der Wellen, $EB = 2b$, ganz und gar unabhängig.

Daraus folgt:

Erstens, daß *Wellen*, die einerlei Breite haben, auch vom Wasser in einerlei Zeit beschrieben werden, ihre Höhe mag groß oder klein seyn.

Zweitens. Da $\sqrt{\frac{2a\pi}{g}}$ der Ausdruck der Zeit ist, in welcher ein schwerer Körper von der Höhe $2a\pi$ herabfällt, so verhält sich die Zeit einer Welle, zur Zeit, in welcher ein Körper durch die Breite der Wellen ($2a\pi$) herabfällt, wie die Zahl $\sqrt{\pi}$ zu 1.

Drittens. Die Länge eines einfachen Pendels, das in einer gemeinen Cycloide, die mit dem Halbmesser a beschrieben wird, seine Schwingungen macht, ist bekannter Maßen $= 4a$. Folglich ist die Länge eines mit der Welle gleichzeitig schwingenden Pendels doppelt so groß als der Halbmesser des die Wellen-Cycloide beschreibenden Rades, oder diese Pendellänge ($4a$) verhält sich zur Breite der Wellen ($2a\pi$), wie der Durchmesser eines Kreises (2) zu seiner halben Peripherie (π). Newton war der Meinung (*Prop. 46.*), daß diese Pendellänge der Breite der Wellen beinahe gleich sey.

Viertens. Wenn wir endlich die Breite der Welle $2a\pi$ mit der Zeit, in welcher die Welle beschrieben wird, $\pi\sqrt{\frac{2a}{g}}$ dividiren, so erhalten wir die *mittlere Geschwindigkeit des Wassers*, $= \sqrt{2ag}$, die wir in Zukunft v nennen wollen. Die Ge-

schwindigkeiten der Wellen verhalten sich daher wie die Quadratwurzeln ihrer Breiten; womit Newton's Prop. 45. übereinstimmt.

II.

12. Weil die Gleichungen für die Radlinie (10.) einfacher und leichter zu übersehen sind, so wollen wir noch die Größen m , $\frac{m}{2h}$, $\frac{m}{k}$ und $\frac{m}{c}$ durch Functionen von a und b ausdrücken, und diese Ausdrücke in den Gleichungen D , E , F , G und H substituiren. Die Gleichungen $a = \frac{m^2}{2h}$ und $b = \frac{m^2}{k}$ geben $a - b = m^2 \left(\frac{1}{2h} - \frac{1}{k} \right) = m$, weil oben (5.) $\frac{1}{2h} - \frac{1}{k} = \frac{1}{m}$ gesetzt worden. Daher ist $\frac{m}{2h} = \frac{a}{m} = \frac{a}{a-b}$, und $\frac{m}{k} = \frac{b}{m} = \frac{b}{a-b}$. Die Gleichungen $c = 2 \cdot \sqrt{gh}$ (5.) und $m = \sqrt{2ah}$ (11.) geben $\frac{cm}{2h} = \sqrt{2ag} = v$. Werden diese Werthe in die Gleichungen D , E , F , G und H gesetzt, so wird:

$$\text{Die Zeit } t = \frac{a\phi}{v}, \text{ oder der Winkel } \phi = \frac{v}{a}. \quad (I)$$

$$\text{Die horiz. Geschw. } v \frac{dx}{ds} = v \left(1 - \frac{b}{a} \cos. \phi \right). \quad (K)$$

$$\text{Die senkrechte Geschw. } v \frac{dy}{ds} = v \frac{b}{a} \sin. \phi. \quad (L)$$

$$\text{Der nach der Horizontallinie durchlaufene Raum } x = a\phi - b \sin. \phi. \quad (M)$$

$$\text{Der nach der Senkrechten durchlaufene Raum } y = b \sin. \text{verf. } \phi. \quad (N)$$

Der Mittelpunkt des beschreibenden Rades, O ,
durchläuft während der Zeit t den Raum OC
 $= ID = iD = a\phi = tv$. (O)

Die Geschwindigkeit desselben ist daher

$$= \frac{a\phi}{t} = v. \quad (P)$$

13. Aus diesen Gleichungen sehen wir, daß die Theilchen des Wassers, das in Wellenbewegung ist, eine zweifache Bewegung haben: eine *horizontale* $a\phi$ oder tv , welche allen Wassertheilchen gemein ist (und Abänderungen leidet, wie wir noch sehen werden); und eine *Kreisbewegung*, welche durch die Ausdrücke $b \sin. \phi$, und $b \sin. \text{vers. } \phi$, oder $b \sin. \frac{v}{a}$, und $b \sin. \text{vers. } \frac{v}{a}$ gegeben wird. Jedes Wassertheilchen dreht sich nämlich in einem Kreise um einen Mittelpunkt herum, welcher selbst nach der horizontalen Richtung mit der Geschwindigkeit v fortbewegt wird. Beide Bewegungen, die horizontale sowohl als auch die Kreisbewegung, sind gleichförmig, und nur in ihrer Vereinigung erzeugen sie die an den Wellen sichtbaren Ungleichheiten. Die Einfachheit, welche die Natur bei so vielen andern Wirkungen beobachtet, finden wir also auch hier wieder, und sie verdienen auch hier unsere Bewunderung.

14. Ein einfaches Pendel, dessen Länge sich zur zweifachen Breite der Wellen so verhält, wie der Durchmesser eines Kreises zu seinem Umfange, verrichtet seine Schwingungen in eben der Zeit;

in welcher das Wasser seine *ganzen Kreise* zurücklegt, oder in welcher dasselbe vom Gipfel einer Woge zum Gipfel der folgenden gelangt. Die Durchmesser dieser Kreise sind aber nicht alle von einerlei Gröfse. An der Oberfläche sind sie der Höhe der Wellen gleich, unterhalb der Oberfläche nehmen sie nach dem Gesetz einer *geometrischen Reihe* ab, wofür das Folgende der Beweis ist.

Es mögen AMN , amn , fig. 4., die Wege bedeuten, welche zwei nächst beifammen fließende Theilchen unter der Oberfläche des Wassers nehmen, und BC , bc die Wege der Mittelpunkte ihrer Kreisbewegungen. Für das erste Wassertheilchen sey der höchste Punkt seiner Bahn in A , der dazugehörige Mittelpunkt seiner Kreisbewegung senkrecht darunter in B , und zu gleicher Zeit sey das zweite Wassertheilchen gleichfalls auf dem höchsten Punkt seiner Bahn in a , und der Mittelpunkt seiner Kreisbewegung in b ; so daß alle vier Punkte A , a , B , b , sich in der gemeinschaftlichen Senkrechten Gb befinden. Nach Verlauf der Zeit t mögen die Mittelpunkte B , b , nach C und c gekommen seyn. Weil sich alle Mittelpunkte mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit v bewegen, so ist $BC = bc = tv = a\phi$ (nach 12. O.) und die Linie UC ist abermahls senkrecht. Macht man die Winkel $UCM = Ucm = \phi$, und die Halbmesser $CM = BA$, $cm = ba$, so sind die Wassertheilchen A und a , während der Zeit t nach M und m gelangt.

Da

Da die Wassertheilchen aus ihren Bahnen nicht austreten (nach 2.), so können wir uns die Wege AMN , amn , als zwei Ufer vorstellen, zwischen welchen das eingeschlossene Wasser fortfließt. Durch alle Querschnitte (die wir auf beide einander unendlich nahe liegende Ufer senkrecht annehmen) müssen daher während einerlei Zeit gleiche Wassermengen durchfließen, und es müssen also *die Produkte aus jedem Querschnitte (me), in die Geschwindigkeit (v), womit das Wasser durch denselben fließt, alle einander gleich seyn.* — Es ist bekannt, daß dieselbe Gleichheit der Produkte der Querschnitte in die Geschwindigkeiten sich auch aus dem Grundsätze der Incompressibilität, oder der Unveränderlichkeit des kubischen Inhaltes der Wassertheilchen ableiten läßt.

Die Größe des Querschnittes me läßt sich folgender Maßen ausdrücken. Es sey das mit den Mittelpunkten der Kreisbewegungen sich gleichmäßig bewegendes Wassertheilchen der Oberfläche in U , folglich $GU = BC = bc$; die Tiefe UC sey $= u$, $Cc = du$; und die Halbmesser der Kreisbewegungen seyen $MC = z$, $mc = z - dz$. Man ziehe moi senkrecht, oder parallel zu cCU ; so ist $Mo = mc - MC = -dz$; und weil $Moi = MCU = \phi$, so ist $Mi = -dz \sin. \phi$; $oi = -dz \cos. \phi$. Der Raum, den der Punkt M während der Zeit dt beschreibt, sey $M\bar{N} = ds$; folglich $MO = dx$, $ON = dy$; so giebt die Aehnlichkeit der Dreiecke Mir , MON , $ir = Mi \cdot \frac{ON}{MO}$, oder $ir = -dz \sin. \phi \frac{dy}{dx}$. Hieraus folgt

$$mr = mo + oi - ir = du - dz \cos. \varphi + dz \sin. \varphi. \frac{dy}{dx}.$$

Weil nun auch das Dreieck *emr* dem Dreieck *OMN* ähnlich ist, so erhalten wir $me = mr. \frac{OM}{MN}$, und also den Querschnitt

$$me = (du - dz \cos. \varphi) \frac{dx}{ds} + dz \sin. \varphi. \frac{dy}{ds}.$$

Die Wassermenge, welche in jeder Sekunde durch den Querschnitt *me* fließt, ist offenbar $= me. v = (du - dz \cos. \varphi) \frac{v dx}{ds} + dz \sin. \varphi. \frac{v dy}{ds}$.

Vorhin (K und L) war aber $\frac{v dx}{ds} = v \left(1 - \frac{b}{a} \cos. \varphi \right)$, und $\frac{v dy}{ds} = v \frac{b}{a} \sin. \varphi$. Setzen wir diese Werthe in

die Gleichung, und statt des Halbmessers der Kreisbewegung *b* die gegenwärtige unbestimmte Benennung desselben *z*, so ist die Wassermenge $me. v = v \left(du - dz \cos. \varphi - \frac{z}{a} \cos. \varphi du + \frac{z dz}{a} \right)$. (Q)

Da dieser Ausdruck für alle Punkte der Bahn *AMN* unveränderlich derselbe seyn muß, so darf er vom Winkel φ nicht abhängen; folglich müssen die Glieder, welche mit $\cos. \varphi$ multiplicirt sind, für sich verschwinden. Demnach ist $adz + zdu = 0$, und $a \log. z + u = \text{Const.}$

Für die Oberfläche des Wassers sey der Halbmesser der Kreisbewegung, oder die halbe Höhe der Wellen $= b$. Da dann für $u = 0$, $z = b$ wird, so ist $\text{Const.} = a \log. b$; sonach $\log. \frac{z}{b} + \frac{u}{a} = 0$. Bezeichnen wir daher die Grundzahl der natürlichen Logarithmen mit *e*, so erhalten wir

$$z = b. e^{-\frac{u}{a}}. \quad (\text{R})$$

Werden folglich die Tiefen u in einer arithmetischen Reihe $0, u, 2u, 3u \dots$, genommen, so folgen die dazu gehörenden Halbmesser der Kreisbewegung $b, be^{-\frac{u}{a}}, be^{-\frac{2u}{a}} \dots$, dem Gesetze einer abnehmenden geometrischen Reihe.

Setzen wir endlich den Werth $du = -\frac{adz}{z}$ in die Gleichung (Q), so erhalten wir das Element der Wassermenge, welche durch jeden Querschnitt me fließt, $= v \left(du + \frac{zdz}{a} \right) = -v \left(\frac{a^2 - z^2}{az} \right) dz$. (S)

15. Ueber die verschiedenen Bewegungen der Wassertheilchen in den Wellen giebt dem eben bewiesenen entsprechend Fig. 5. eine anschauliche Vorstellung.

Für die Oberfläche des Wassers ist $b = a$. In diesem Falle ist folglich die horizontale Bewegung der Kreisbewegung gleich, und die Wellenlinie $ABCDEFGHIKLMA$ wird eine gemeine Cycloide: der Mittelpunkt der Kreisbewegung bewegt sich auf der horizontalen Linie NO , und die Höhe der Wellen ist $A(P^2) = 2OG = 2a$.

Unter der Oberfläche des Wassers sind die Tiefen der Mittelpunkte $O^1, O^2, O^3 \dots$, in arithmetischer Progression genommen, nämlich $OO^1 = \frac{1}{2}a, OO^2 = a, OO^3 = \frac{3}{2}a$ u. s. w. Die Halbmesser der Kreisbewegung, welche diesen Tiefen zugehören, sind demnach $O'G' = \frac{a}{\sqrt{c}} = 0,6065 \cdot a$,

$$O^2 G^2 = \frac{a}{c} = 0,3679 \cdot a, \quad O^3 G^3 = \frac{a}{c\sqrt{c}} = 0,2231 \cdot a,$$

$$O^4 G^4 = \frac{a}{c \cdot c} = 0,1353 \cdot a, \text{ u. f. w.}$$

Die Kreise, welche mit diesen Halbmessern aus den Mittelpunkten O, O', O^2, O^3, O^4 u. f. w. beschrieben worden, zeigen sowohl die eigentliche *Größe der Kreisbewegungen*, welche auf jeden Punkt der Horizontallinie $NO, N'O', N^2 O^2$, u. f. w. vorgehen, als auch ihre verhältnißmäßige *Abnahme* in der Tiefe.

Endlich habe ich die Peripherien der Kreise in 12 Theile getheilt, und für jeden zwölften Theil die Punkte $B, C, D, E \dots, B', C', D' \dots, B^2, C^2, D^2 \dots$ u. f. w. auf die in 14. angegebene Art bestimmt. Dem zu Folge sind $AB, BC, CD, DE \dots, A'B', B'C', C'D' \dots, A^2 B^2, B^2 C^2, C^2 D^2 \dots$ u. f. w. die *Räume*, welche von den Punkten A, A', A^2 u. f. w. in gleichen Zeiten zurückgelegt werden; und die Linien $AA^1 A^2 A^3 \dots, BB^1 B^2 B^3 \dots, CC^1 C^2 C^3 \dots$ u. f. w. zeigen die *Stellungen*, in welchen sich die Punkte der Senkrechten $AA^1 A^2 A^3 \dots$ nach gleichen Zeiträumen befinden. Man sieht hieraus offenbar, daß die größte Verschiebung der Wassertheile an der Oberfläche Statt findet, und daß die Bewegung des Wassers in der Tiefe sich sehr bald der Gleichförmigkeit nähert; womit die bereits oben angeführte Erfahrung der Taucher übereinstimmt.

Der Umstand, daß die Wellen auf ihrer Oberfläche selten eine gemeine, sondern meistens eine gestreckte Cycloide bilden, verändert an unserer Zeichnung nichts. Denn es kann zu Folge der vorgetragenen Theorie für die Oberfläche des Wassers auch irgend eine von den Linien $A'B'C'D'$. . . oder $A^2B^2C^2D^2$. . . u. s. w. genommen werden, und die Bewegung des Wassers unter dieser Oberfläche bleibt dann noch immer dieselbe, wie sie die Zeichnung vorstellt.

Für die Bewegung des Wassers *oberhalb der gemeinen Cycloide* wird u negativ, folglich der

Halbmesser der Kreisbewegung $z = ae^{\frac{u}{a}}$, sonach größer als a . Für diesen Fall ist also die Kreisbewegung größer als die fortschreitende Bewegung des Wassers, und die Wellenlinie wird eine *gedrückte Cycloide*, wie Fig. 5. sie für den Fall $u = -\frac{1}{4}a$ durch die punktirte Linie vorstellt. An und für sich scheint es zwar nicht unmöglich, daß diejenige Kraft, welche die Kreisbewegung des Wassers hervorbringt, sie auch wohl zuweilen größer machen könne, als die fortschreitende Bewegung des Wassers ist; und in der That geschieht dieses auch jedesmahl, wenn das Wasser an den Gipfeln der Wellen sich kräufelt. Wenn wir je-

doch $e^{\frac{u}{a}}$ in die bekannte Reihe auflösen, so erhalten wir $z = a + u + \frac{u^2}{2a}$. . , folglich $OG =$

$x - u' = a + \frac{u^2}{2a} \dots$; OG müßte also größer als a seyn, und daher das Wasser in einem Theile seiner Bahn sich unterhalb der Oberfläche, welche die Cycloide AGO beschreibt, bewegen. Hiermit steht aber die allgemeinste Eigenschaft aller physischen Körper, die Undurchdringlichkeit, im Widerspruche. Am Kopfe der Wellen müßte umgekehrt eine negative Undurchdringlichkeit, oder eine Anziehungskraft vorhanden seyn, um die Zerstreuung der Wassertheilchen zu hindern, und sie in ihrer cycloidischen Bahn gehörig umzubiegen; welchem abermahls sowohl die vollkommene Flüssigkeit des Wassers, als auch die tägliche Erfahrung widerspricht. *Kräuselnde Wellen sind demnach außer dem Beharrungsstande, welcher allein einer solchen Berechnung fähig ist, und müssen sonach von dieser Theorie ausgeschlossen werden.*

16. Daraus, daß gegenwärtige Theorie der Wellen auf der Gleichheit des hydrostatischen Drucks beruhet (n. 2.), geht von selbst hervor, daß alle Bewegungen des Wassers, welche an dieser Gleichheit des Drucks nichts ändern, auch die Wellenbewegungen nicht stören. Es können sich daher mehrere Wellen von verschiedener Größe und nach verschiedenen Richtungen einander *durchkreuzen*, und doch jede ihre Bewegung ungestört fortsetzen; welches abermahls durch allgemein bekannte Erfahrungen bestätigt wird, und zugleich die mannigfaltigen Erhöhungen erklärt,

welche öfters auf der Oberfläche des Wassers sichtbar sind.

17. Wir haben vorausgesetzt, daß die ganze Wassermasse, welche in Wellenbewegung ist, ruhe, und daß also die Gipfel der Wellen beständig auf der nämlichen Stelle stehen bleiben. Es ist aber leicht einzusehen, daß die Gestalt der Wellen, und alles, was wir von der Kreisbewegung des Wassers angeführt haben, unverändert Statt finden werde, wenn wir auch dem gesammten Wasser noch irgend eine *gemeinschaftliche Bewegung* beilegen. Denn dadurch wird offenbar nur die fortschreitende Bewegung der Mittelpunkte der Kreisbewegungen anders bestimmt, aber die Kreisbewegung selbst, die Gröfse der Halbmesser, und die Umlaufzeit bleiben dieselben, wie wir sie in 11. und 12. bestimmt haben.

Wir wollen annehmen, das gesammte Wasser habe nebst der Geschwindigkeit v noch die Geschwindigkeit $+w$; so ist die Geschwindigkeit, womit die Gipfel der Wellen auf der Oberfläche des Wassers fortlaufen, offenbar $=+w$; und die Geschwindigkeit der Mittelpunkte der Kreisbewegung ist $=v+w$. Jedes Wassertheilchen beschreibt also während der Zeit t den horizontalen Raum $x = (v+w) t = z \sin. \frac{v}{a} = \left(1 + \frac{w}{v}\right) a \varphi = z \sin. \varphi$.

Der senkrechte Raum $y = z \sin. \varphi$, und der

Halbmesser der Kreisbewegung $z = be^{-\frac{u}{a}}$ bleiben hier dieselben, wie in (N) und (R).

18. Wenn w und v einander *gleich* und *entgegengesetzt* sind, welches auf stehenden Wässern meistens der Fall ist, so haben wir $x = -z \sin. \varphi$, $y = z \sin. \text{verf. } \varphi$, und die ganze Bewegung *eines jeden Wassertheilchens* ist $= z \varphi = z \frac{''}{a}$. (T)

In diesem Falle beschreiben die Wassertheilchen nur Kreise, deren Mittelpunkte ruhen: sie haben *keine* fortlaufende horizontale Bewegung, sondern kommen in ihren Kreisen immer wieder auf ihre vorigen Stellen zurück; aber die Gipfel der Wellen laufen auf der Oberfläche des Wassers mit der Geschwindigkeit $w = v = \sqrt{2ag}$ fort, und die Richtung dieser *scheinbaren* Bewegung ist die nämliche mit der Richtung des Wassers auf den Gipfeln der Wellen: im Thale zwischen zwei Wogen aber ist die Bewegung des Wassers der Bewegung der Wellen entgegen gesetzt. Man begreift hieraus deutlich, wie die Winde die Meereswogen vor sich hertreiben können, ohne daß dadurch das Wasser merklich von seiner Stelle kömmt: eine Erscheinung, über deren Erklärung man bisher allgemein in Verlegenheit war.

Wenn in diesem Falle die *Dauer* einer Welle, nämlich die Zeit, in welcher das Wasser oder ein schwimmender Körper von der Höhe einer Woge auf die Höhe der nächstfolgenden kommt, gegeben ist, oder durch Beobachtung bestimmt wird, so läßt sich daraus sowohl die Breite der Wellen, als auch der Raum, den die Gipfel der Wellen in jeder gegebenen Zeit zurücklegen,

folgender Mafsen finden. Es sey die Dauer einer Welle in Sekunden ausgedrückt $= \tau$, so ist (nach 10.) $\pi \sqrt{\frac{2a}{g}} = \tau$; folglich (wenn $g = 15,09$ par. F.) die *Breite* der Wellen, $B, = 2a\pi = g \frac{\tau^2}{\pi} = 0,801 \tau^2$, und ihre *Geschwindigkeit* $w, = v = \frac{2a\pi}{\tau} = 0,801 \tau$. Sonach ist der *Raum der Wellen in einer Stunde* $= 2885,5 \cdot \tau$ Toisen $= 0,0505 \cdot \tau$ Grade der geographischen Breite. Wellen, deren Dauer z. B. 2 Sekunden beträgt, verbreiten sich in 10 Stunden einen Grad oder 15 deutsche Meilen weit.

Findet man diese berechnete Geschwindigkeit der Wellen von der beobachteten verschieden, so zeigt der Unterschied die *wirkliche* Geschwindigkeit des Waffers an.

19. Ueberhaupt sehen wir aus der vorgetragenen Theorie, daß die *Breite* und die *Höhe* der Wellen, und die *wirkliche Bewegung des Waffers* drei von einander unabhängige Größen sind, welche in jedem Fall erst durch Beobachtungen bestimmt werden müssen. Die *Dauer* einer Welle (τ) aber hängt mit ihrer *Breite* (B) mittelst der Gleichung $B\pi = g\tau^2$ zusammen; und wenn wir die absolute Geschwindigkeit des Waffers A nennen, so ist die Geschwindigkeit der Wellen $\pm w = A - g \frac{\tau}{\pi} = A - \sqrt{\frac{Bg}{\pi}}$. Man sieht von selbst, wie man hieraus auch wieder umgekehrt die wirkliche Bewegung des Waffers bestimmen kann, wenn

nebst der Geschwindigkeit der Wellen noch ihre Dauer, oder ihre Breite gegeben ist.

20. *Die Erhöhung der Mittelpunkte der Kreisbewegungen* verdient hier noch besonders bemerkt zu werden. Die Gleichungen (M) und (N) in 12 geben das Element der Fläche $PMNQ$ (Fig. 2.) $= y dx = b(1 - \cos \varphi)(a - b \cos \varphi) d\varphi$. Hieraus folgt die Fläche $APM = \int y dx = ab \varphi - b(a+b) \sin \varphi + \frac{b^2}{2}(\varphi + \sin \varphi \cos \varphi)$. Setzen wir $\varphi = 2\pi$, so ist die Fläche der gestreckten Cycloide $= 2AMBE = (2ab + b^2)\pi$. Die doppelte Fläche $ABDE$ ist offenbar $= 2 \cdot AE \cdot EB = 2a\pi \cdot 2b$. Demnach ist der Inhalt einer Welle $= 2(ADBE - AMBE) = (2a - b)b\pi$. Bei ruhigem Wasser steht dieser Inhalt über der Linie $2DB (= 2a\pi)$ durchaus gleich hoch, also in einer Höhe $= \frac{(2a-b)b\pi}{2a\pi} = b - \frac{b^2}{2a}$. Vergleicht man diese Höhe mit der Höhe der Mittelpunkte der Wellen ($= b$), so erhellet, daß die Höhe der Mittelpunkte um $\frac{b^2}{2a}$ größer ist als die Höhe der Oberfläche des ruhigen Wassers.

Im Fall der gemeinen Cycloide ist $b = a$; folglich wird diese Erhöhung $= \frac{1}{2}a$, oder so groß als der vierte Theil der Höhe der Wellen.

Weil die nämliche Rechnung auch für die Wellenlinien unter der Oberfläche des Wassers gilt,

$$- \frac{u}{a}$$
wenn wir nur statt b den Halbmesser z oder be

setzen, so folgt überhaupt, daß es zur Hervorbringung der Wellen nöthig ist, sämtliche Wassertheile nicht nur in Kreisbewegungen zu setzen, sondern auch sie zu erhöhen.

21. Die *Wasserfäule*, welche das Maafs des hydrostatischen Drucks für jedes Wassertheilchen abgiebt, finden wir auf folgende Art. Das Element der Wassermenge, welche in jeder Sekunde durch den Querschnitt *me* (Fig. 4.) fließt, war

$$(\text{nach 14.}) = v \left(du + \frac{zdz}{a} \right). \text{ Daher ist die ganze}$$

Wassermenge, welche in jeder Sekunde durch den Querschnitt *AA'*, oder *GG'* (Fig. 5.) (wo wir statt *n* jede beliebige Zahl setzen können) fließt,

$$= v \left(u + \frac{z^2 - b^2}{2a} \right). \text{ Wird nun diese mit der mitt-}$$

lern Geschwindigkeit des Wassers *v* dividirt, so haben wir die Wasserfäule, womit jeder Punkt der Linie *A'' B'' C'' D''* . . . beschwert ist,

$$= u + \frac{z^2 - b^2}{2a}.$$

Im ruhigen Wasser sind die Halbmesser der Kreisbewegungen *b* und *z* = 0; dadurch wird diese Wasserfäule = *u*, übereinstimmend mit dem bekannten Gesetze der Hydrostatik.

Setzen wir für eine beträchtliche Tiefe *z* = 0, so ist daselbst diese Wasserfäule = $u - \frac{b^2}{2a}$. Wir haben aber zuvor gesehen, daß die Mittelpunkte der Wellen auf der Oberfläche des Wassers gleich-

falls um $\frac{b^2}{2a}$ höher stehen, als das ruhige Wasser. Hieraus folgt, daß die Bewegung der Wellen den hydrostatischen Druck des Wassers in der Tiefe unverändert läßt.

IV.

22. Da die Verheerungen, welche die Wellen an den Ufern anrichten, und die Kostbarkeit der Bauwerke, womit die Küstenbewohner ihre Ländereien, Häfen, und Reiden gegen diese Angriffe zu schützen genöthigt sind, jeden kleinen Beitrag zur Vervollkommenung dieser Art Kenntnisse wichtig machen, so wird es den Freunden der Wasserbaukunst wohl nicht unangenehm seyn, über die *Wirkungsart der Wellen*, und über das *Maaß ihrer Kräfte* hier noch einige Aufklärungen zu finden, welche sich aus der vorgetragenen Theorie unmittelbar ergeben.

Es erhellet von selbst, daß der Angriff der Wellen auf das Ufer nur von der angegebenen Kreisbewegung des Wassers bewirkt wird. Der bekannte hydrotechnische Ausdruck, daß die Wellen an den Seedeichen *aufrollen*, oder *rallen*, stimmt hiemit offenbar überein; auch die Kölke, welche die Wellen in den Ufern auswühlen, und die Mittel, die man dagegen anwendet, daß man sie mit Grasmatten, Stroh, Leinwand u. dgl. bedeckt, erhalten dadurch ihre vollkommene Erklärung.

Auch darüber sind alle Schriftsteller einig, daß die Wirkung der Wellen an der Oberfläche am

größten ist, und in die Tiefe hinab sehr merklich abnimmt; nur über das Gesetz dieser Abnahme herrscht noch eine große Dunkelheit. Ueberhaupt fehlt es noch an einem Maassstabe, diese Kräfte zu messen, oder doch wenigstens so zu vergleichen, als nöthig ist, um die vortheilhafteste Gestalt solcher Bauwerke, und das gehörige Verhältniß ihrer nöthigen Stärke in verschiedenen Fällen auszumitteln.

Ich habe in meiner Abhandlung über den Wasserstoß in den *Neueren Abhandl. d. k. böhm. gel. Gesellschaft, 2. Band. Prag 1796. §. 16.*, so wohl durch Analysis als durch Erfahrungen gezeigt, daß der Stoß, mit welchem ein Wasserstrahl oder fließendes Wasser an eine entgegen gesetzte ruhende Fläche von unbestimmter Größe drückt, durch das Gewicht $W \frac{c}{2g}$ gemessen wird; wobei W das Gewicht des in einer Sekunde herbei fließenden Wassers, c die Geschwindigkeit desselben, und g den Raum fallender Körper in der ersten Sekunde bedeuten. Setzen wir demnach im gegenwärtigen Falle für W die Wassermenge, welche durch jeden unendlich kleinen Querschnitt me (Fig. 4.) in jeder Sekunde fließt, nemlich $-v \left(\frac{a^2 - z^2}{az} \right) dz$ (14. S), und für die Geschwindigkeit der Kreisbewegung $\frac{\phi z}{t} = \frac{vz}{a}$ (12.); so ist der Stoß in jedem solchen Querschnitte
$$= - \frac{v^2 (a^2 - z^2) dz}{2ag \cdot a}.$$
 Da wir aber in 12. ge-

funden haben, daß $v^2 = 2ag$, so ist dieser Stofs $= - \left(\frac{a^2 - z^2}{a} \right) dz$. Das Integrale hievon, welches an der Oberfläche für $z = b$ verschwinden muß, ist offenbar

$$= a(b - z) - \left(\frac{b^3 - z^3}{3a} \right). \quad (U)$$

Wird nun dieser Ausdruck mit der Länge des Ufers, oder mit der Breite eines Pfahles, der dem Wellenschlage ausgesetzt ist, multiplicirt, so giebt das Produkt den kubischen Inhalt eines Wasserkörpers, dessen Gewicht unablässig an das Ufer, oder an den entgegen gesetzten Pfahl drückt.

Die Richtung dieses Drucks ist in der Stellung $AA'A^2A^3 \dots$ und $GG'G^2G^3 \dots$ horizontal. In den übrigen Stellungen $BB'B^2 \dots$, $CC'C^2 \dots$ ist dieser Druck aus einem horizontalen und senkrechten zusammen gesetzt, folglich jeder für sich kleiner, als derjenige, den wir hier brauchen.

25. Setzen wir $b = a$, und $z = 0$, so ist der gesammte Wellenschlag $= \frac{2}{3}a^2$. Es sey nun die Höhe einer solchen Woge 6 Fufs $= 2a$, so ist der gesammte Stofs auf jeden laufenden Fufs Länge des Bauwerks gleich dem Gewichte von 6 kub. Fufs Wasser.

Um zu beurtheilen, wie groß die Tiefe seyn müsse, bei welcher wir unbedenklich $z = 0$ setzen, folglich diese kürzere Rechnungsformel brauchen können, wollen wir $u = P(A^6) = 3a$, oder

die Tiefe unterhalb G eben so groß als die Höhe der Wogen nehmen; so ist der Halbmesser der Kreisbewegung für diese Tiefe $z = ae^{-3} = 0,0498 \cdot a$; und die genaue Rechnung giebt den gesammten Stoß der Wellen von der Oberfläche bis zu dieser Tiefe $= 0,617 \cdot a^2$, welches von $\frac{2}{3}a^2$ nur um $0,050 \cdot a^2$ verschieden ist.

24. Zur Bestimmung der besten Gestalt der Bauwerke wird es nöthig seyn, hier noch die Wasserfäule anzugeben, welche das Maafs des Schlasses der Wellen auf jeden Punkt insbesondere vorstellt.

In der Senkrechten $AA^1A^2 \dots$ (Fig. 5.) ist die Tiefe des Punktes A^3 unterhalb der Linie NO , $= PA^3 = PP^3 - P^3A^3 = u - z$; und in der Senkrechten $OO^1O^2O^3 \dots$ ist $OG^3 = OO^3 + O^3G = u + z$; daher ist die Höhe eines Wasser-Elements $= du \mp dz$, wo das obere Zeichen für die erste, und das untere für die zweite Senkrechte gilt.

Setzen wir nun statt du seinen Werth $-\frac{adz}{z}$, und dividiren den (in 22.) gefundenen Wasserstoß $-\left(\frac{a^2 - z^2}{a}\right) dz$ mit dieser Höhe, so ist die gesuchte Wasserfäule $= z \left(\frac{a \mp z}{a}\right)$. (X)

Der Ausdruck für die Senkrechte $AA^1A^2 \dots$, nemlich $z \left(\frac{a - z}{a}\right)$, verschwindet so wohl, wenn auf der Oberfläche $z = a$ ist, als auch in einer großen Tiefe; er hat demnach ein *Maximum*, und

zwar für $z = \frac{1}{2}a$. Wenn daher die Höhe der Wellen auf der Oberfläche, $2b$, gröfser als a ist, so fällt die *größte Kraft der Wellen* unter die Oberfläche des Wassers, und zwar in jedem Falle nach p (Fig. 5.), wo $Pp = u - z = a(\log. 2 - \frac{1}{2}) = 0,195 \cdot a$ ist. Die Wasserfäule, welche daselbst zum Stofse des Wassers dient, ist $= \frac{1}{4}a$. Die Richtung dieses Stofses geht vorwärts, und trägt folglich schwimmende Körper gegen das Ufer.

Der Ausdruck für die Senkrechte $GG^1G^2G^3\dots$ nämlich $z \left(\frac{a+z}{a} \right)$, ist für die Oberfläche bei G am größten, und wird daselbst $= 2a$, oder so groß als die größte Höhe der Wellen. Er nimmt in die Tiefe hinab sehr schleunig ab, wie wir in der folgenden Tafel sehen. Die Richtung dieses Stofses geht vom Ufer abwärts, und durch seine Wirkung wird das Ufer abgeschälet; die Kenntniß desselben ist demnach für den Uferbau vorzüglich wichtig.

25. In der folgenden Tafel, in der die Buchstaben sich auf Fig. 5. beziehen, ist die Höhe der Wellen ($2a$) zur Einheit genommen, und der Stofs der Wellen nach den Formeln R und Z berechnet worden. Sie dient vorzüglich zu einer allgemeinen Ueberficht dieses Gegenstandes, und ist eines mannigfaltigen Gebrauchs fähig. Wer es z. B. möglich fände, das Materiale, oder auch die Bauart eines Deiches, auf jeder Höhe den zugehörigen Zahlen in der dritten Reihe proportional einzu-
rich-

richten, der dürfte wohl versichert seyn, einen Damm von gleichförmiger Stärke mit dem geringsten Materialaufwande zu erhalten.

Tiefe der Mittel punkte der Kreis- bewegung.		Halbmesser der Kreisbewegung.	Wasserfäule, als Maß des Wel- leneschlages.
O	$= 0,00$	$OG = 0,500$	bei $G = 1,000$
OO^1	$0,25$	$O^1G^1 \quad 0,303$	$G^1 \quad 0,487$
OO^2	$0,50$	$O^2G^2 \quad 0,184$	$G^2 \quad 0,252$
OO^3	$0,75$	$O^3G^3 \quad 0,111$	$G^3 \quad 0,138$
OO^4	$1,00$	$O^4G^4 \quad 0,067$	$G^4 \quad 0,077$
OO^5	$1,25$	$O^5G^5 \quad 0,041$	$G^5 \quad 0,044$
OO^6	$1,50$	$O^6G^6 \quad 0,025$	$G^6 \quad 0,026$