Verwendung asymptotischer Darstellungen zur Untersuchung der Integrale einer speciellen linearen Differentialgleichung. I.

Von

J. HORN in Charlottenburg.

Die Differentialgleichung

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (a_1 x + b_1) \frac{dy}{dx} + (a_2 x + b_2) y = 0$$

sei unter der Voraussetzung, dass die Gleichung $\alpha^2 + a_1 \alpha + a_2 = 0$ zwei verschiedene Wurzeln besitzt, auf die Form gebracht:

$$(A) \quad x \frac{d^2 y}{dx^2} + (\lambda_1 + \lambda_2 + 2) \frac{dy}{dx} + (x + (\lambda_1 - \lambda_2)i) y = 0^*),$$

wobei der Einfachheit halber ganzzahlige Werthe von λ_1 , λ_2 und $\lambda_1 + \lambda_2$ ausgeschlossen seien. Die Differentialgleichung (A) besitzt zwei linear unabhängige Integrale

$$y_1 = G_1(x)$$

$$y_2 = x^{-\lambda_1 - \lambda_2 - 1} G_2(x),$$

wo $G_1(x)$, $G_2(x)$ ganze transcendente Functionen sind. Zweck des Folgenden ist die *Untersuchung des Verhaltens der Integrale von (A) in der Umgebung der singulären Stelle $x = \infty$ unter Benutzung der divergenten Reihen*

*) Dies wird erreicht durch die Substitution

$$y = e^{-\frac{a_1}{2}x} y', \quad x = \frac{2x'}{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}.$$

Für $\lambda_1 = \lambda_2 = n - \frac{1}{2}$ ist (A) die Differentialgleichung

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (2n + 1) \frac{dy}{dx} + xy = 0,$$

welche aus der Bessel'schen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 J}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J = 0$$

durch die Substitution $J = x^* y$ hervorgeht.

$$S_1 = e^{ix} x^{-\lambda_1-1} \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots \right)$$

$$S_2 = e^{-ix} x^{-\lambda_2-1} \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \dots \right),$$

durch welche die Differentialgleichung formell befriedigt wird.

Die Bedeutung, welche diesen Reihen trotz ihrer Divergenz zukommt, wurde zunächst im Specialfall der Bessel'schen Differentialgleichung untersucht*); namentlich sind aber die Untersuchungen von Poincaré**) über die asymptotische Darstellung der Integrale allgemeiner linearer Differentialgleichungen durch die Thomé'schen Normalreihen hervorzuheben***).

Ich möchte zunächst zu den im Specialfall der Bessel'schen Functionen am weitesten durchgeführten Entwicklungen†) einige Ergänzungen hinzufügen, wobei ich das Ziel verfolge, das Verhalten der Integrale möglichst in der *ganzen Umgebung* der singulären Stelle $x = \infty$ zu untersuchen; ich ziehe jedoch vor, gleich die allgemeinere Differentialgleichung (A) zu nehmen, weil die aus der Bessel'schen Differentialgleichung hervorgehenden Reihen S_1 , S_2 wegen der Uebereinstimmung der Potenzen $x^{-\lambda_1-1}$, $x^{-\lambda_2-1}$ mit Rücksicht auf die spätere Verwendung dieser Reihen zu speciell sind.

Der vorliegende erste Theil hat hauptsächlich den Zweck, die Grundlage für die im zweiten Theil zu behandelnden Anwendungen der asymptotischen Darstellungen zu liefern; dabei handelt es sich namentlich um die Lage der Nullstellen der Integrale der Differentialgleichung in der Umgebung der singulären Stelle $x = \infty$ und damit zusammenhängende Untersuchungen (z. B. über das Geschlecht der ganzen transcendenten Functionen $G_1(x)$, $G_2(x)$).

§ 1.

Die Differentialgleichung (A) wird durch das Integral

$$y = \int (z-i)^{\lambda_1} (z+i)^{\lambda_2} e^{xz} dz$$

*) Poisson, Journ. de l'Éc. Pol., cah. 19. — Lipschitz, Crelle's Journ. Bd. 59. — Hankel, Math. Ann. Bd. 1. — Jordan, Cours d'Analyse, Bd. III (1887). — Weber, Math. Ann. Bd. 37.

**) Poincaré, Amer. Journ. Bd. 7, Act. math. Bd. 8. — In Betreff des Rechnens mit asymptotischen Reihen sehe man auch Poincaré, les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, Bd. II. — Auch die Untersuchungen von Kneser über gewisse lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung (Crelle's Journ. Bd. 116 und 117) gehören hierher.

***) Dass auch für nicht lineare Differentialgleichungen divergente Reihen zur asymptotischen Darstellung der Integrale benutzt werden können, zeige ich in Aufsätzen, welche demnächst in Crelle's Journal erscheinen.

†) Jordan, Cours d'Analyse, Bd. III (1887), S. 253 ff.

befriedigt, wenn der Integrationsweg l so gewählt wird, dass

$$\int d[(z-i)^{l_1+1}(z+i)^{l_2+1}e^{zx}] = 0$$

ist*). Wir betrachten zunächst die beiden Integrale

$$(1) \quad \eta_1 = \int_{l_1} (z-i)^{l_1}(z+i)^{l_2} e^{zx} dz$$

$$(2) \quad \eta_2 = \int_{l_2} (z-i)^{l_1}(z+i)^{l_2} e^{zx} dz;$$

l_1 (l_2) besteht aus der Geraden $G = \infty p$, welche mit der positiven reellen Axe den Winkel $\pi - \arg x$ bildet, einem in positivem Sinn durchlaufenen Kreis C mit dem kleinen Radius r um den Punkt $z=i$ (bezw. $z=-i$) und der Geraden $G' = p \infty$ **).

Wir untersuchen das Verhalten von η_1 und η_2 für grosse Werthe von $|x|$, indem wir die in Picard's *Traité d'Analyse*, Bd. III, S. 375 ff. im Anschluss an die citirten Arbeiten Poincaré's gegebene Darstellung, welches sich allerdings auf eine allgemeinere Differentialgleichung bezieht, für unsere Zwecke ergänzen***).

Um zunächst η_1 für reelle positive Werthe von x ($\arg x = 0$) zu erhalten,

nehmen wir den geradlinigen Theil des Integrationsweges l_1 parallel zur reellen Axe an, und zwar von der linken Seite her aus dem Unendlichen kommend. Die Werthe der vieldeutigen Ausdrücke $(z-i)^{l_1}$, $(z+i)^{l_2}$ seien dadurch bestimmt, dass am Anfang des Weges l_1 im Unendlichen $\arg(z-i) = \pi$, $\arg(z+i) = \pi$ †) angenommen wird. Das Integral (1) stellt, ohne dass der zuletzt beschriebene

Fig. 1.

*) Jordan, *Cours d'Analyse*, Bd. III, S. 253 ff.

**) In Fig. 1 sind die Integrationswege l_1 , l_2 für $\arg x = 0$ dargestellt.

***) Man sieht, dass auch ein Theil der folgenden auf die Differentialgleichung (A) bezüglichen Entwicklungen allgemeinere Gültigkeit besitzt.

†) $\arg a$ bedeutet das Argument φ der complexen Zahl $a = re^{i\varphi}$.

Integrationsweg geändert wird, die Function η_1 dar, so lange $\arg x$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegt. Zur Fortsetzung dieser Function drehen wir den geradlinigen Theil des Integrationsweges l_1 in beiderlei Sinn, so weit es ohne Durchgang durch den Punkt $z = -i$ möglich ist. Dabei kann $\arg(z-i)$ sowie $\arg(z+i)$ am Anfang von l_1 zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ variiren. Für $\arg(z-i) = \arg(z+i) = \omega$ stellt das Integral (1) die Function η_1 für

$$\frac{\pi}{2} - \omega < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \omega$$

dar. Wenn sich also ω zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ bewegt, so ist η_1 für

$$-\pi < \arg x < 2\pi$$

dargestellt. Man kann also, mit reellen positiven Werthen von x beginnend, die Veränderliche x nahezu eine halbe Umdrehung im negativen Sinn und nahezu eine volle Umdrehung im positiven Sinn ausführen lassen, ohne dass die Gestalt des Integrationsweges l_1 geändert werden muss (abgesehen von der Richtung des gradlinigen Theiles).

Wir nehmen, unter δ eine beliebig kleine positive Grösse verstehend, $\omega = \arg(z-i) = \arg(z+i)$ am Anfang von l_1 zwischen $\frac{-\pi+\delta}{2}$ und $\frac{3\pi-\delta}{2}$ und lassen $\arg x$ von $\pi - \omega$ nach beiderlei Rich-

tung höchstens um $\frac{\pi-\delta}{2}$ abweichen, so dass die Function η_1 durch die Formel (1) für Argumente von x zwischen $-\pi + \delta$ und $2\pi - \delta$ dargestellt ist.

Setzt man in (1) z an Stelle von $z-i$, so hat man

$$(3) \quad \eta_1 = e^{ix} \int_{l_1} z^{\frac{1}{2}} (z+2i)^{\frac{1}{2}} e^{xz} dz$$

mit dem in Fig. 2 angegebenen Integrationsweg l (aus den Theilen G, C, G' bestehend), an dessen Anfang im Unendlichen jetzt $\arg z = \omega$, $\arg(z+2i) = \omega$ ist. Im Anfangspunkt p des Kreises C , dessen Radius r jedenfalls kleiner

Fig. 2.

als 1 sein soll, ist $\arg z = \omega$, $\arg(z+2i)$ nahezu gleich $\frac{\pi}{2}$. Für $|z| < 1$ ist

$$(z + 2i)^{\lambda_2} = (2i)^{\lambda_2} \left(1 + \frac{z}{2i}\right)^{\lambda_2} \\ = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots,$$

wo

$$(4) \quad A_\mu = \frac{\Gamma(\lambda_2 + 1)}{\Gamma(\mu + 1) \Gamma(\lambda_2 - \mu + 1)} \cdot (2i)^{\lambda_2 - \mu}; \quad A_0 = (2i)^{\lambda_2}$$

gesetzt ist. Da indessen die Binomialreihe nicht auf dem ganzen Integrationsweg l convergirt, so setzen wir

$$(5) \quad (z + 2i)^{\lambda_2} = A_0 + A_1 z + \dots + A_n z^n + R_n;$$

auf dem geradlinigen Theil G von l setzen wir einfach

$$R_n = (z + 2i)^{\lambda_2} - \sum_{\mu=0}^n A_\mu z^\mu;$$

da zwei positive Grössen g und ϱ so vorhanden sind, dass

$$|A_\mu| < g \varrho^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots)$$

ist, so ist auf dem Kreis C

$$|R_n| \leq \sum_{\mu=n+1}^{\infty} |A_\mu| \cdot |z|^\mu < \sum_{\mu=n+1}^{\infty} g \varrho^\mu |z|^\mu = \frac{g \varrho^{n+1}}{1 - r \varrho} |z|^{n+1},$$

wenn $r \varrho < 1$ angenommen wird.

Wir berechnen

$$\eta_1 e^{-ix} x^{\lambda_1+1} = x^{\lambda_1+1} \int_l z^{\lambda_1} (z + 2i)^{\lambda_2} e^{zx} dz = \sum_{\mu=0}^n A_\mu \cdot x^{\lambda_1+1} \int_l z^{\lambda_1+\mu} e^{zx} dz \\ + x^{\lambda_1+1} \int_l R_n z^{\lambda_1} e^{zx} dz.$$

Die Substitution $xz = -y$ ergibt

$$x^{\lambda_1+1} \int_l z^{\lambda_1+\mu} e^{zx} dz = \frac{(-1)^{\lambda_1+\mu+1}}{x^\mu} \int_L y^{\lambda_1+\mu} e^{-y} dy^{**});$$

der Integrationsweg L , welcher aus l durch die Substitution $xz = -y$ hervorgeht, besteht aus der Geraden $\mathfrak{G} = \infty p$, an deren Anfang $\arg y = \vartheta = \arg x + \omega - \pi$ ist, dem Kreis $\mathfrak{C}$ mit dem Radius $r|x|$ um $y = 0$ und der Geraden $\mathfrak{G}' = p \infty$ (Fig. 3). Es ist

$$\frac{-\pi + \vartheta}{2} < \vartheta < \frac{\pi - \vartheta}{2},$$

*) Bei den hier auftretenden Potenzen von $2i$ ist $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$ anzunehmen; dann ist auf dem Kreis C $\arg\left(1 + \frac{z}{2i}\right)$ nahezu gleich Null, d. h. es ist derjenige Werth der Potenz $\left(1 + \frac{z}{2i}\right)^{\lambda_2}$ zu nehmen, welchen die Binomialreihe geliefert hat.

**) Hierbei ist $\arg(-1) = \pi$ angenommen.

da $\arg x$ von $\pi - \omega$ nach beiderlei Richtung höchstens um $\frac{\pi - \delta}{2}$ abweichen sollte. Wir haben*)

$$\int_L y^{\lambda_1 + \mu} e^{-y} dy = (e^{2\pi i \lambda_1} - 1) \Gamma(\lambda_1 + \mu + 1),$$

da der Integrationsweg L durch einen Weg ersetzt werden kann, welcher mit $\arg y = 0$ aus dem Unendlichen kommt, den Punkt $y=0$ umschliesst und längs der positiven reellen Axe in's Unendliche geht.

Fig. 3.

Zur Bestimmung von

$$(6) \quad \alpha_n = x^{\lambda_1 + n + 1} \int_l R_n z^{\lambda_1} e^{zx} dz$$

zerlegen wir den Integrationsweg l in den kreisförmigen Theil C und die geradlinigen Theile G, G' . Wir haben zunächst

$$\begin{aligned} \alpha_n' &= x^{\lambda_1 + n + 1} \int_C R_n(z) \cdot z^{\lambda_1} e^{zx} dz \\ &= (-1)^{\lambda_1 + 1} x^n \int_C R_n\left(-\frac{y}{x}\right) \cdot y^{\lambda_1} e^{-y} dy, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} |\alpha_n'| &< c \cdot |x|^n \int_C \frac{g \varrho^{n+1}}{1 - r \varrho} \frac{|y|^{n+1}}{|x|^{n+1}} |y^{\lambda_1} e^{-y} dy|^{**}) \\ &= \frac{c}{|x|} \frac{g \varrho^{n+1}}{1 - r \varrho} \int_C |y^{\lambda_1 + n + 1} e^{-y} dy| \\ &< \frac{c}{|x|} \frac{g \varrho^{n+1}}{1 - r \varrho} \int_L |y^{\lambda_1 + n + 1} e^{-y} dy|; \end{aligned}$$

*) Jordan, Cours d'Analyse, Bd. III, S. 257.

**) Dabei ist $c \geq |(-1)^{\lambda_1}|$.

das letzte Integral liegt aber für alle Werthe von ϑ zwischen $\frac{-\pi + \delta}{2}$ und $\frac{\pi - \delta}{2}$ unter einer bestimmten endlichen Grenze. Nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε lässt sich also eine positive Grösse R so bestimmen, dass für $|x| > R$ $|a_n'| < \frac{\varepsilon}{3}$ ist, welchen Werth zwischen $-\pi + \delta$ und $2\pi - \delta$ auch das Argument von x haben mag, mit anderen Worten, a_n' convergirt für $\lim |x| = \infty$ zur Grenze Null und zwar gleichmässig für alle Argumente von x zwischen $-\pi + \delta$ und $2\pi - \delta$.

Wir betrachten ferner

$$a_n'' = x^{\lambda_1 + n + 1} \int_{\mathcal{G}} R_n z^{\lambda_1} e^{zx} dz,$$

wo

$$R_n = (z + 2i)^{\lambda_2} - \sum_{\mu=0}^n A_{\mu} z^{\mu}$$

ist. Es ist eine positive Grösse h so vorhanden, dass für

$$|z| > r, \quad \frac{-\pi + \delta}{2} < \arg z < \frac{3\pi - \delta}{2}$$

$$\left| \frac{\lambda_1 \log z + \lambda_2 \log(z + 2i)}{z} \right| < h,$$

also

$$|z^{\lambda_1} (z + 2i)^{\lambda_2}| < e^{h|z|}$$

ist. Wenn $\arg x = \varphi$ von $\pi - \omega$ höchstens um $\frac{\pi - \delta}{2}$ abweicht, ist

$$|e^{zx}| = e^{|z||x| \cos(\omega + \varphi)} < e^{-|z||x| \sin \frac{\delta}{2}},$$

also

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{G}} z^{\lambda_1} (z + 2i)^{\lambda_2} e^{zx} dz \right| &< \int_r^{\infty} e^{-\left(|x| \sin \frac{\delta}{2} - h\right)|z|} \cdot d|z| \\ &= \frac{e^{-\left(|x| \sin \frac{\delta}{2} - h\right)r}}{|x| \sin \frac{\delta}{2} - h}. \end{aligned}$$

Für $\mu = 0, 1, \dots, n$ ist

$$x^{\lambda_1 + n + 1} \int_{\mathcal{G}_+} z^{\lambda_1 + \mu} e^{zx} dz = (-1)^{\lambda_1 + \mu + 1} x^{n - \mu} \int_{\mathcal{G}} y^{\lambda_1 + \mu} e^{-y} dy.$$

Die Substitution $y = te^{i\vartheta}$ ergibt dafür

$$(-1)^{\lambda_1 + \mu + 1} x^{n - \mu} \cdot e^{i(\lambda_1 + \mu + 1)\vartheta} \int_{r|x|}^{\infty} t^{\lambda_1 + \mu} e^{-t(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)} dt$$

mit einem absoluten Betrag kleiner als

$$\begin{aligned}
& k|x|^{n-\mu} \int_{r|x|}^{\infty} t^{\Re(\lambda_1+\mu)} e^{-t \sin \frac{\delta}{2}} dt^*) \\
& \leq k|x|^n \int_{r|x|}^{\infty} t^{\Re(\lambda_1+n)} e^{-t \sin \frac{\delta}{2}} dt.
\end{aligned}$$

Wir haben also

$$\begin{aligned}
|\alpha_n''| & \leq |x^{\lambda_1+n+1}| \cdot \left| \int_G z^{\lambda_1} (z+2i)^{\lambda_1} e^{zx} dz \right| \\
& + \sum_{\mu=0}^n |A_{\mu}| \cdot \left| x^{\lambda_1+n+1} \int_G z^{\lambda_1+\mu} e^{zx} dz \right| \\
& < |x^{\lambda_1+n+1}| \frac{e^{-\left(|x| \sin \frac{\delta}{2} - h\right)r}}{|x| \sin \frac{\delta}{2} - h} \\
& + \sum_{\mu=0}^n |A_{\mu}| \cdot k|x|^n \int_{r|x|}^{\infty} t^{\Re(\lambda_1+n)} e^{-t \sin \frac{\delta}{2}} dt.
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck nähert sich mit unendlich wachsendem $|x|$ der Grenze Null. Man kann R so wählen, dass für

$$|x| > R, \quad -\pi + \delta < \arg x < 2\pi - \delta, \quad |\alpha_n''| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist. Schliesslich ist

$$\begin{aligned}
\alpha_n''' &= x^{\lambda_1+n+1} \int_G R_n z^{\lambda_1} e^{zx} dz \\
&= -e^{2\pi i \lambda_1} x^{\lambda_1+n+1} \int_G R_n z^{\lambda_1} e^{zx} dz = -e^{2\pi i \lambda_1} \alpha_n'';
\end{aligned}$$

es ist demnach, wenn R hinreichend gross genommen wird, für

$$|x| > R, \quad -\pi + \delta < \arg x < 2\pi - \delta, \quad |\alpha_n'''| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nun ist $\alpha_n = \alpha_n' + \alpha_n'' + \alpha_n'''$; nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse ε lässt sich also eine positive Grösse R so bestimmen, dass

$$|\alpha_n| < \varepsilon$$

ist für

$$|x| > R, \quad -\pi + \delta < \arg x < 2\pi - \delta;$$

d. h. α_n convergirt bei unendlich wachsendem $|x|$ zur Grenze Null, und zwar gleichmässig für alle Argumente von x zwischen $-\pi + \delta$ und $2\pi - \delta$. Es besteht nun die Gleichung

*) Es ist $|(-1)^{\lambda_1+\mu+1} e^{i(\lambda_1+\mu+1)\vartheta}| < k$ für $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$.

$$\eta_1 e^{-ix} x^{\lambda_1+1} = \sum_{\mu=0}^n \frac{(-1)^{\lambda_1+\mu+1} (e^{2\pi i \lambda_1} - 1) \Gamma(\lambda_1 + \mu + 1) A_\mu}{x^\mu} + \frac{\alpha_n}{x^n},$$

oder wenn

$$(7) \quad A_\mu = (-1)^{\lambda_1+\mu+1} (e^{2\pi i \lambda_1} - 1) \Gamma(\lambda_1 + \mu + 1) A_\mu$$

gesetzt wird,

$$(8) \quad \eta_1 = e^{ix} x^{-\lambda_1-1} \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \dots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{\alpha_n}{x^n} \right).$$

Wir sagen, die Function η_1 werde durch die divergente Reihe

$$(9) \quad S_1 = e^{ix} x^{-\lambda_1-1} \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots \right)$$

für grosse Werthe von $|x|$ asymptotisch dargestellt, und zwar gleichmässig für $\arg x$ zwischen $-\pi + \delta$ und $2\pi - \delta$. Fig. 4 veranschaulicht das Gültigkeitsgebiet der asymptotischen Gleichung $\eta_1 \sim S_1^*$.

Aus der Gleichung (6)

$$\alpha_n = x^{\lambda_1+n+1} \int_i R_n z^{\lambda_1} e^{zx} dz$$

erhält man

$$x \frac{d\alpha_n}{dx} = x^{\lambda_1+n+2} \int_i R_n z^{\lambda_1+1} e^{zx} dz$$

$$+ (\lambda_1 + n + 1) x^{\lambda_1+n+1} \int_i R_n z^{\lambda_1} e^{zx} dz.$$

Das zweite Glied dieser Summe convergirt für $\lim x = \infty$ zur Grenze Null und zwar gleichmässig für die angegebenen Argumente von x , ebenso das erste, wie sich aus der bisherigen

Entwicklung dadurch ergibt, dass man λ_1 durch $\lambda_1 + 1$ ersetzt.

Demnach convergirt auch $x \frac{d\alpha_n}{dx}$ gleichmässig zur Grenze Null, ebenso

$$x^2 \frac{d^2 \alpha_n}{dx^2} = x^{\lambda_1+n+3} \int_i R_n z^{\lambda_1+2} e^{zx} dz + 2(\lambda_1 + n + 1) x^{\lambda_1+n+2} \int_i R_n z^{\lambda_1+1} e^{zx} dz \\ + (\lambda_1 + n + 1)(\lambda_1 + n) x^{\lambda_1+n+1} \int_i R_n z^{\lambda_1} e^{zx} dz$$

und allgemein

$$x^\nu \frac{d^\nu \alpha_n}{dx^\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Fig. 4.

*) In der unteren Halbebene ist die Function α_n zweiwerthig; man erhält α_n' oder α_n'' , je nachdem man sich von der positiven reellen Axe aus im negativen oder positiven Sinn dreht.

Die Ableitung $\frac{d\eta_1}{dx}$ wird durch die Reihe

$$\frac{dS_1}{dx} = e^{ix} x^{-\lambda_1-1} \left(A_0' + \frac{A_1'}{x} + \frac{A_2'}{x^2} + \dots \right),$$

welche durch formale Differentiation der Reihe S_1 entsteht, in demselben Sinne asymptotisch dargestellt, wie die Function η_1 durch die Reihe S_1 . Durch Differentiation der Gleichung

$$\eta_1 = e^{ix} x^{-\lambda_1-1} \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \dots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{\alpha_n}{x^n} \right)$$

erhält man

$$\frac{d\eta_1}{dx} = e^{ix} x^{-\lambda_1-1} \left(A_0' + \frac{A_1'}{x} + \dots + \frac{A_n'}{x^n} + \frac{\alpha_n'}{x^n} \right),$$

wo

$$\alpha_n' = \frac{d\alpha_n}{dx} + i\alpha_n - \frac{(\lambda_1 + n + 1)\alpha_n}{x} - \frac{(\lambda_1 + n + 1)A_n}{x}$$

gesetzt ist. Letzterer Ausdruck convergirt aber nach dem Vorangehenden gleichmässig zur Grenze Null. Man sieht so, dass die asymptotische Gleichung $\eta_1 \sim S_1$ beliebig oft differentiiert werden kann.

Die Function η_1 ist dadurch ausgezeichnet, dass sie, wenn R hinreichend gross genommen wird, in dem Gebiet

$$|x| > R, \quad -\pi + \delta < \arg x < 2\pi - \delta$$

keine Nullstellen besitzt*). Es ist $\eta_1 = e^{ix} x^{-\lambda_1-1} (A_0 + \alpha_0)$; nach Annahme einer positiven Grösse $\varepsilon < |A_0|$ lässt sich eine Grösse R so bestimmen, dass für $|x| > R$, $-\pi + \delta < \arg x < 2\pi - \delta$ $|\alpha_0| < \varepsilon$, also $|A_0 + \alpha_0| > |A_0| - |\alpha_0| > |A_0| - \varepsilon > 0$ ist; da auch der Factor $e^{ix} x^{-\lambda_1}$ für keinen endlichen Werth von x in dem angegebenen Gebiet verschwindet, so gilt das Gleiche für η_1 .

Aehnlich ist die Function η_2 zu behandeln. Wir nehmen zunächst (Fig. 1) am Anfang des Integrationsweges l_2 $\arg(z-i) = \pi$, $\arg(z+i) = \pi$ an, so dass das Integral (2) für $-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}$ einen Sinn hat. Der geradlinige Theil des Weges l_2 kann, ohne dass der Punkt $z=i$ überschritten wird, in positivem Sinn um 90° und in negativem Sinn um 270° gedreht werden, so dass das Anfangsargument ω von $z-i$ und $z+i$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{5\pi}{2}$ variirt. Das Integral (2) hat einen Sinn, so lange $\arg x$ um weniger als $\frac{\pi}{2}$ von $\pi - \omega$ abweicht, d. h. für $\frac{\pi}{2} - \omega < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \omega$. Die Function η_2 ist demnach, ohne dass die Gestalt des Integrationsweges l_2 geändert zu werden braucht, durch

*) Diese Eigenschaft geht verloren, wenn $\arg x$ nicht zwischen den angegebenen Grenzen bleibt.

das Integral (2) für $-2\pi < \arg x < \pi$ dargestellt. Ersetzt man in (2) $z + i$ durch z , so hat man

$$(10) \quad \eta_2 = e^{-ix} \int_l (z - 2i)^{\lambda_1} z^{\lambda_2} e^{zx} dz,$$

und zwar ist am Anfang des jetzt mit l bezeichneten Integrationsweges (Fig. 5)

$$\arg z = \omega, \arg (z + 2i) = \omega$$

und in dem in der Nähe von 0 gelegenen Punkt p

$$\arg z = \omega, \arg (z - 2i)$$

nahezu gleich $\frac{3\pi}{2}$. Wir setzen

$$\begin{aligned} (z - 2i)^{\lambda_1} \\ = (-2i)^{\lambda_1} \left(1 - \frac{z}{2i}\right)^{\lambda_1} \\ = B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots, \end{aligned}$$

indem wir die Bezeichnung benutzen:

$$(11) \quad B_\mu = \frac{\Gamma(\lambda_1 + 1)}{\Gamma(\mu + 1) \Gamma(\lambda_1 - \mu + 1)} \cdot (-2i)^{\lambda_1 - \mu}; \quad B_0 = (-2i)^{\lambda_1}.$$

Genau wie oben finden wir

$$\begin{aligned} & x^{\lambda_2 + 1} \int_l z^{\lambda_2} (z - 2i)^{\lambda_1} e^{zx} dz \\ &= \sum_{\mu=0}^n \frac{(-1)^{\lambda_2 + \mu + 1} (e^{2\pi i \lambda_2} - 1) \Gamma(\lambda_2 + \mu + 1) B_\mu}{x^\mu} + \frac{\beta_n}{x^n} \end{aligned}$$

oder, wenn

$$(12) \quad B_\mu = (-1)^{\lambda_2 + \mu + 1} (e^{2\pi i \lambda_2} - 1) \Gamma(\lambda_2 + \mu + 1) \cdot B_\mu$$

gesetzt wird,

$$(13) \quad \eta_2 = e^{-ix} x^{-\lambda_2 - 1} \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \dots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\beta_n}{x^n} \right),$$

wo β_n sowie $x^\nu \frac{d^\nu \beta_n}{dx^\nu}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) mit unendlich wachsendem $|x|$ für alle Argumente von x zwischen $-2\pi + \delta$ und $\pi - \delta$ gleichmässig zur Grenze Null convergirt**). Die Function η_2 ist dadurch ausgezeichnet, dass sie für hinreichend grosse endliche Werthe von $|x|$

Fig. 5.

*) Hierbei ist $\arg(-2i) = \frac{3\pi}{2}$.

**) Die Function β_n ist in der oberen Halbebene zweideutig; man erhält β'_n oder β''_n , je nachdem man sich von der positiven reellen Axe aus in negativem oder positivem Sinn dreht.

nicht verschwindet, wenn $\arg x$ zwischen den bezeichneten Grenzen bleibt (Fig. 6). Wir sagen, die Function η_2 werde durch die Reihe

$$(14) \quad S_2 = e^{-ix} x^{-\lambda_2-1} \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \dots \right)$$

Fig. 6.

für grosse Werthe von $|x|$ asymptotisch dargestellt, und zwar gleichmässig für alle Argumente von x zwischen

$$-2\pi + \delta \text{ und } \pi - \delta.$$

Wir fassen das Bisherige in den Satz zusammen:

Das Integral η_1 der Differentialgleichung (A) wird durch die Reihe

$$S_1 = e^{ix} x^{-\lambda_1-1}$$

$$\cdot \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots \right),$$

das Integral η_2 durch die Reihe

$$S_2 = e^{-ix} x^{-\lambda_2-1} \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \dots \right)$$

für grosse Werthe von $|x|$ asymptotisch dargestellt, und zwar η_1 gleichmässig für $-\pi + \delta < \arg x < 2\pi - \delta$, η_2 gleichmässig für $-2\pi + \delta < \arg x < \pi - \delta^*$; d. h. wenn man

$$\eta_1 = e^{ix} x^{-\lambda_1-1} \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \dots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{\alpha_n}{x^n} \right)$$

$$\eta_2 = e^{-ix} x^{-\lambda_2-1} \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \dots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\beta_n}{x^n} \right)$$

setzt, so convergirt mit unendlich wachsendem $|x|$ α_n sowie $x^v \frac{d^v \alpha_n}{dx^v}$ ($v = 1, 2, \dots$) gleichmässig für alle Argumente von x zwischen $-\pi + \delta$ und $2\pi - \delta$, dagegen β_n sowie $x^v \frac{d^v \beta_n}{dx^v}$ ($v = 1, 2, \dots$) gleichmässig für alle Argumente von x zwischen $-2\pi + \delta$ und $\pi - \delta$ zur Grenze Null.

§ 2.

Bei einem positiven Umlauf der Veränderlichen x um $x=0$ (oder bei einem negativen Umlauf um $x=\infty$) gehen η_1, η_2 in lineare Verbindungen η'_1, η'_2 über. Es sei ursprünglich $\arg x=0$ und am Anfang der Integrationswege l_1, l_2 (Fig. 1) im Unendlichen sei $\arg(z-i) = \arg(z+i) = \pi$. Einer positiven Drehung von x ent-

*) Hierbei ist δ eine beliebig kleine positive Grösse. Vgl. Fig. 4 und Fig. 6.

spricht eine ebenso grosse negative Drehung des geradlinigen Theiles des Integrationsweges l_1 bzw. l_2 ; man muss aber schliesslich die Form der Integrationswege ändern, damit l_1 den Punkt $z = -i$ und l_2 den Punkt $z = i$ nicht überschreitet. Man erhält sonach nach einer vollen Umdrehung von x die Integrationswege l'_1, l'_2 von η'_1, η'_2 (Fig. 7 und 8).

Fig. 7.

Fig. 8.

l'_1 (l'_2) besteht aus der in Fig. 7 (bezw. Fig. 8) dargestellten Linie ∞p , einem kleinen Kreis um $z = i$ (bezw. $z = -i$) und der Linie $p \infty$. Indem man l'_1, l'_2 auf l_1, l_2 zurückführt, findet man*)

$$(15) \quad \begin{cases} \eta'_1 = e^{-2\pi i \lambda_1} \eta_1 + e^{-2\pi i \lambda_2} (e^{-2\pi i \lambda_1} - 1) \eta_2 \\ \eta'_2 = e^{-2\pi i \lambda_1} (1 - e^{2\pi i \lambda_2}) \eta_1 + (1 - e^{-2\pi i \lambda_1} + e^{-2\pi i (\lambda_1 + \lambda_2)}) \eta_2. \end{cases}$$

Bleibt $\arg x$ zwischen $-\pi + \delta$ und $\pi - \delta$, so sind für grosse Werthe von $|x|$ η_1 und η_2 gleichzeitig von Nullstellen frei und es bestehen gleichzeitig die asymptotischen Gleichungen

$$\eta_1 \sim S_1, \quad \eta_2 \sim S_2.$$

Dagegen ändert die Function η_2 ihren Charakter, wenn $\arg x$ von 0 aus um π wächst, während sich der Charakter von η_1 bei einer halben Umdrehung von x in negativem Sinne ändert. Indessen lassen sich auch zwei Integrale $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ von (A) angeben, welche für hinreichend grosse Werthe von $|x|$ gleichzeitig von Nullstellen frei sind, wenn $\arg x$ zwischen δ und $2\pi - \delta$ liegt**). η_1 und η_2 waren zuerst für $\arg x = 0$, d. h. auf der positiven reellen Axe definit; wir erhalten $\bar{\eta}_1$ auf der negativen reellen Axe, indem wir in $e^{2\pi i \lambda_1} \eta_1$ ***) die Veränderliche x eine halbe positive Drehung machen lassen; wir erhalten $\bar{\eta}_2$ auf der negativen reellen Axe, indem in $e^{-2\pi i \lambda_2} \eta_2$ ***) die Ver-

*) Dieselben Formeln ergeben sich aus dem in § 3 dargestellten Zusammenhang zwischen η_1, η_2 und y_1, y_2 .

**) Im zweiten Theil wird gezeigt, dass jedes andere Integral von (A) unendlich viele Nullstellen a_n besitzt, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \arg a_n = 0$, so wie unendlich viele Nullstellen b_n der Art, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \arg b_n = \pi$ ist.

***) Die Factoren $e^{2\pi i \lambda_1}$ und $e^{-2\pi i \lambda_2}$ sind beigelegt, um in § 3 eine einfachere Beziehung zwischen y_1, y_2 und $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ zu erhalten.

änderliche x von der positiven reellen Axe aus eine halbe negative Drehung ausführt. Wenn wir nun auf der negativen reellen Axe $\arg x = \pi$ annehmen, so haben wir

$$\bar{\eta}_1 = e^{2\pi i \lambda_1} \int_{l_1} (z-i)^{\lambda_1} (z+i)^{\lambda_2} e^{zx} dz$$

$$\bar{\eta}_2 = e^{-2\pi i \lambda_2} \int_{l_2} (z-i)^{\lambda_1} (z+i)^{\lambda_2} e^{zx} dz,$$

und zwar ist am Anfang von l_1 $\arg(z-i) = 0$, $\arg(z+i) = 0$ und am Anfang von l_2 $\arg(z-i) = 2\pi$, $\arg(z+i) = 2\pi$. Hierfür können wir schreiben

$$(16) \quad \bar{\eta}_1 = \int_{l_1} (z-i)^{\lambda_1} (z+i)^{\lambda_2} e^{zx} dz$$

$$(17) \quad \bar{\eta}_2 = \int_{l_2} (z-i)^{\lambda_1} (z+i)^{\lambda_2} e^{zx} dz,$$

wenn wir am Anfang von l_1 sowohl wie von l_2 $\arg(z-i) = 2\pi$, $\arg(z+i) = 0$ annehmen. Hiermit sind auch die Fortsetzungen der zunächst für $\arg x = \pi$ definirten Functionen $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_2$ bestimmt. Bezeichnet man mit η_2 die durch eine negative Umdrehung aus η_2 hervorgehende Function, so ist

$$\bar{\eta}_1 = e^{2\pi i \lambda_1} \eta_1, \quad \bar{\eta}_2 = e^{-2\pi i \lambda_2} \eta_2.$$

Nach (15) ist

$$e^{-2\pi i \lambda_2} \eta_2 = \eta_2' - (1 - e^{2\pi i \lambda_2}) \eta_1',$$

also

$$e^{-2\pi i \lambda_2} \eta_2' = \eta_2 - (1 - e^{2\pi i \lambda_2}) \eta_1$$

und demnach

$$(18) \quad \begin{cases} \bar{\eta}_1 = e^{2\pi i \lambda_1} \eta_1 \\ \bar{\eta}_2 = \eta_2 + (e^{2\pi i \lambda_2} - 1) \eta_1, \end{cases}$$

Für $-\pi + \delta < \arg x < 2\pi - \delta$ haben wir $\bar{\eta}_1 = e^{2\pi i \lambda_1} \eta_1$, also

$$(19) \quad \bar{\eta}_1 = e^{ix} x^{-\lambda_1-1} e^{2\pi i \lambda_1} \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \dots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{\alpha_n}{x^n} \right).$$

Auf der negativen reellen Axe ist, wenn $\arg x = -\pi$ genommen wird,

$$\bar{\eta}_2 = e^{-2\pi i \lambda_2} \eta_2 = e^{-2\pi i \lambda_2} e^{-ix} x^{-\lambda_2-1} \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \dots \right);$$

setzt man $x = r e^{-\pi i}$, so ist

$$e^{-2\pi i \lambda_2} x^{-\lambda_2-1} = e^{-2\pi i \lambda_2 - (\lambda_2+1)(\log r - \pi i)} = e^{-(\lambda_2+1)(\log r + \pi i)},$$

d. i. der Werth von $x^{-\lambda_2-1}$ mit $\arg x = \pi$. Es ist demnach für $\arg x = \pi$ und allgemeiner für $\delta < \arg x < 3\pi - \delta$

$$(20) \quad \bar{\eta}_2 = e^{-ix} x^{-\lambda_2-1} \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \dots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\beta_n}{x^n} \right).$$

Die Gebiete, in welchen in (19) und (20) α_n und β_n zur Null convergiren, sind in Fig. 4 und Fig. 9 dargestellt. Bleibt $\arg x$ zwischen δ und $2\pi - \delta$, so sind die Formeln (19) und (20) gleichzeitig gültig.

Das Integral $\bar{\eta}_1$ von (A) wird durch die Reihe

$$e^{2\pi i \lambda_1} S_1 = e^{ix} x^{-\lambda_1 - 1} e^{2\pi i \lambda_1}$$

$$\cdot \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots \right),$$

das Integral $\bar{\eta}_2$ durch die Reihe

$$S_2 = e^{-ix} x^{-\lambda_2 - 1}$$

$$\cdot \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \dots \right)$$

für grosse Werthe von $|x|$ asymptotisch dargestellt, und

zwar $\bar{\eta}_1$ gleichmässig für

$$-\pi + \delta < \arg x < 2\pi - \delta$$

und $\bar{\eta}_2$ gleichmässig für

$$\delta < \arg x < 3\pi - \delta.$$

Fig. 9.

In § 1 und § 2 ist noch der folgende Satz enthalten:

Die Integrale η_1, η_2 besitzen in der Nähe der positiven reellen Axe*), die Integrale $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ in der Nähe der negativen reellen Axe keine Nullstellen, deren absolute Beträge eine gewisse Grenze überschreiten**). Die Werthe von $\bar{\eta}_1$ und $\bar{\eta}_2$ auf der negativen reellen Axe erhält man***), indem man, von der positiven reellen Axe ausgehend, η_1 im positiven, η_2 im negativen Drehungssinn fortsetzt.

§ 3.

Wir führen zwei weitere Integrale von (A) ein:

$$(21) \quad y_1 = \int_{L_1} (z - i)^{\lambda_1} (z + i)^{\lambda_2} e^{xz} dz$$

$$(22) \quad y_2 = \int_{L_2} (z - i)^{\lambda_1} (z + i)^{\lambda_2} e^{xz} dz.$$

Der Integrationsweg L_2 von y_2 besteht aus einer Geraden, welche aus dem Unendlichen kommt und mit der positiven reellen Axe den Winkel $\pi - \arg x$ bildet, einem die Punkte $z = i$ und $z = -i$ enthaltenden Kreis um $z = 0$, und der in entgegengesetztem Sinn durchlaufenen

*) D. h. zwischen zwei von 0 ausgehenden, gegen die positive reelle Axe unter den Winkeln δ und $-\delta$ (δ klein) geneigten Strahlen.

**) Vgl. die zweite Fussnote auf der vorletzten Seite.

***) Abgesehen von constanten Factoren.

Geraden. Ist (Fig. 10) $\arg x = 0$, fällt also der geradlinige Theil von L_2 in die negative reelle Axe, so kann L_2 durch die nacheinander

Fig. 10.

einem von 0 ausgehenden, den Punkt $z = -i$ in positivem Sinn um-

Fig. 11.

Gerade l vorangehen lassen, wenn wir auch am Ende von L_1 die entgegengesetzt zu durchlaufende Gerade l^{-1} hinzufügen; man kann

durchlaufenen Wege l_2 und l_1 (Fig. 1) ersetzt werden; war am Anfang von L_2

$$\arg(z - i) = \pi,$$

$$\arg(z + i) = \pi,$$

angenommen, so hat sich nach Durchlaufung des den Punkt $z = -i$ umgebenden Weges l_2 $\arg(z + i)$ um 2π vermehrt, während $\arg(z - i)$ ungeändert geblieben ist; es ist daher

$$y_2 = \eta_2 + e^{2\pi i \lambda_2} \eta_1.$$

Der Integrationsweg L_1 von y_1 setzt sich zusammen (Fig. 11) aus

einem von 0 ausgehenden, den Punkt $z = -i$ in positivem Sinn umlaufenden und nach 0 zurückkehrenden Weg s_2 , einem von 0 ausgehenden und nach einem positiven Umlauf um $z = i$ dahin zurückkehrenden Weg s_1 , dem entgegengesetzt durchlaufenen Weg s_2 und dem entgegengesetzt durchlaufenen Weg s_1 . Am Anfang von L_1 in 0 sei

$$\arg(z - i) = \frac{3\pi}{2},$$

$$\arg(z + i) = \frac{\pi}{2}.$$

Nehmen wir $\arg x = 0$ an, so können wir dem Weg L_1 eine in die negative reelle Axe fallende, im Unendlichen mit $\arg(z - i) = \pi$, $\arg(z + i) = \pi$ beginnende und in 0 endigende

ferner zwischen zwei Schleifen die Wege l^{-1} und l einfügen, so dass man erhält:

$$L_1 = l s_2 l^{-1} l s_1 l^{-1} l s_2^{-1} l^{-1} l s_1^{-1} l^{-1} = l_2 l_1 l_2^{-1} l_1^{-1};$$

am Anfang von l_2 ist $\arg(z-i) = \pi$, $\arg(z+i) = \pi$, am Anfang von l_1 ist $\arg(z+i)$ um 2π grösser, am Ende von l_2^{-1} hat $\arg(z+i)$ wieder den ursprünglichen Werth, während der anfängliche Werth von $\arg(z-i)$ um 2π gewachsen ist, und am Ende von l^{-1} haben beide Argumente wieder ihre Anfangswerthe; es ist also

$$y_1 = \eta_2 + e^{2\pi i \lambda_2} \eta_1 - e^{2\pi i \lambda_1} \eta_2 - \eta_1$$

oder

$$y_1 = (e^{2\pi i \lambda_2} - 1) \eta_1 - (e^{2\pi i \lambda_1} - 1) \eta_2.$$

Der Zusammenhang zwischen y_1 , y_2 und η_1 , η_2 ist also durch die Formel dargestellt:

$$(23) \quad \begin{cases} y_1 = (e^{2\pi i \lambda_2} - 1) \eta_1 - (e^{2\pi i \lambda_1} - 1) \eta_2 \\ y_2 = e^{2\pi i \lambda_2} \eta_1 + \eta_2^* \end{cases}.$$

Unter Benutzung der Beziehung (18) zwischen η_1 , η_2 und $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_2$ erhält man

$$(24) \quad \begin{cases} y_1 = (e^{2\pi i \lambda_2} - 1) \bar{\eta}_1 - (e^{2\pi i \lambda_1} - 1) \bar{\eta}_2 \\ y_2 = e^{-2\pi i \lambda_1} \bar{\eta}_1 + \bar{\eta}_2. \end{cases}$$

Nach (21) ist**)

$$(25) \quad y_1 = G_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

eine ganze transcendente Function; für y_2 findet man unter Benutzung der Substitution $xz = u^{**})$

$$(26) \quad y_2 = x^{-\lambda_1 - \lambda_2 - 1} G_2(x) = x^{-\lambda_1 - \lambda_2 - 1} (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots),$$

wo $G_2(x)$ eine ganze transcendente Function bedeutet.

Wir benutzen den Zusammenhang (23) zwischen y_1 , y_2 und η_1 , η_2 , sowie den Zusammenhang (24) zwischen y_1 , y_2 und $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_2$, ersteren für $\arg x$ zwischen $-\pi + \delta$ und $\pi - \delta$, letzteren für $\arg x$ zwischen δ und $2\pi - \delta$, wobei δ jedesmal eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet; setzen wir für η_1 , η_2 die Ausdrücke (8), (13), für $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_2$ die Ausdrücke (19), (20) ein, so erhalten wir

*) Da der Voraussetzung nach $\lambda_1 + \lambda_2$ keine ganze Zahl ist, so ist

$$\begin{vmatrix} e^{2\pi i \lambda_2} - 1, & -(e^{2\pi i \lambda_1} - 1) \\ e^{2\pi i \lambda_2}, & 1 \end{vmatrix} = e^{2\pi i (\lambda_1 + \lambda_2)} - 1$$

von Null verschieden, also y_1 und y_2 linear unabhängig.

**) Man sehe Pochhammer, Math. Ann. Bd. 36, wo nur eine von (A) verschiedene Normalform bei der Untersuchung von y_1 und y_2 benutzt ist. Die Reihen $G_1(x)$, $G_2(x)$ werden bei Benutzung dieser Normalform einfacher als bei uns.

$$(27) \quad y_1 = (e^{2\pi i \lambda_2} - 1) e^{ix} x^{-\lambda_1-1} \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \dots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{\alpha_n}{x^n} \right) \\ - (e^{2\pi i \lambda_1} - 1) e^{-ix} x^{-\lambda_2-1} \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \dots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\beta_n}{x^n} \right),$$

$$(28) \quad y_2 = e^{2\pi i \lambda_2} e^{ix} x^{-\lambda_1-1} \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \dots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{\alpha_n}{x^n} \right) \\ + e^{-ix} x^{-\lambda_2-1} \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \dots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\beta_n}{x^n} \right)$$

für $-\pi + \delta < \arg x < \pi - \delta$, d. h. in der ganzen Ebene mit Ausschluss eines beliebig kleinen, die negative reelle Axe enthaltenden Sectors, ferner

$$(29) \quad y_1 = (e^{2\pi i \lambda_2} - 1) e^{ix} x^{-\lambda_1-1} \cdot e^{2\pi i \lambda_1} \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \dots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{\alpha_n}{x^n} \right) \\ - (e^{2\pi i \lambda_1} - 1) e^{-ix} x^{-\lambda_2-1} \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \dots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\beta_n}{x^n} \right),$$

$$(30) \quad y_2 = e^{ix} x^{-\lambda_1-1} \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \dots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{\alpha_n}{x^n} \right) \\ + e^{-ix} x^{-\lambda_2-1} \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \dots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\beta_n}{x^n} \right)$$

für $\delta < \arg x < 2\pi - \delta$, d. h. in der ganzen Ebene mit Ausschluss eines beliebig kleinen, die positive reelle Axe enthaltenden Sectors.

Bezeichnen wir mit y ein particuläres Integral von (A), z. B. y_1 oder y_2 und setzen wir

$$y = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2$$

so haben wir, wenn c_2 von Null verschieden ist, bei Beschränkung auf das Gebiet $\delta < \arg x < \pi - \delta$

$$y = c_2 e^{-ix} x^{-\lambda_2-1} \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \dots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\beta_n}{x^n} \right) \\ + c_2 e^{-ix} x^{-\lambda_2-1} \cdot \frac{c_1}{c_2} e^{2ix} x^{2\lambda_2-\lambda_1} (A_0 + \alpha_0).$$

Setzt man

$$\sigma_n = \beta_n + \frac{c_1}{c_2} e^{2ix} x^{2\lambda_2-\lambda_1+n} (A_0 + \alpha_0),$$

so ist

$$y = c_2 e^{-ix} x^{-\lambda_2-1} \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \dots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\sigma_n}{x^n} \right),$$

und σ_n convergirt für $\delta < \arg x < \pi - \delta$ gleichmässig zur Grenze Null, wenn $|x|$ unendlich gross wird*). D. h. in der oberen Halb-

*) Die benutzten Functionen β_n, σ_n wären der Deutlichkeit halber mit β_n'', σ_n'' zu bezeichnen. Würde man für $\delta < \arg x < \pi - \delta$ y durch η_1, η_2 ausdrücken, so würde β_n' auftreten.

ebene wird jedes Integral von (A), abgesehen von der mit einem constanten Factor multiplicirten Function η_1 , durch die mit einem geeigneten constanten Factor multiplicirte Reihe S_2 asymptotisch dargestellt. Wir haben demnach für $\delta < \arg x < 2\pi - \delta$ die asymptotischen Gleichungen

$$(31) \quad y_1 \sim -(e^{2\pi i \lambda_1} - 1)e^{-ix} x^{-\lambda_1 - 1} \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \dots \right),$$

$$(32) \quad y_2 \sim e^{-ix} x^{-\lambda_2 - 1} \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \dots \right).$$

Ebenso erkennt man, dass in der unteren Halbebene jedes Integral, abgesehen von der mit einem constanten Factor multiplicirten Function η_2 , durch die mit einem constanten Factor versehene Reihe S_1 asymptotisch dargestellt wird und dass insbesondere für $-\pi + \delta < \arg x < -\delta$ die asymptotischen Gleichungen bestehen:

$$(33) \quad y_1 \sim (e^{2\pi i \lambda_2} - 1)e^{ix} x^{-\lambda_1 - 1} \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots \right),$$

$$(34) \quad y_2 \sim e^{2\pi i \lambda_2} e^{-ix} x^{-\lambda_2 - 1} \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \dots \right).$$

Die gefundenen Resultate über das Verhalten der Integrale y_1, y_2 fassen wir in den folgenden Satz zusammen:

Sind S_1, S_2 die der Differentialgleichung (A) genügenden divergenten Reihen

$$S_1 = e^{ix} x^{-\lambda_1 - 1} \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots \right)$$

$$S_2 = e^{-ix} x^{-\lambda_2 - 1} \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \dots \right)$$

und setzt man

$$S_1' = (e^{2\pi i \lambda_2} - 1)S_1, \quad S_2' = -(e^{2\pi i \lambda_1} - 1)S_2,$$

$$S_1'' = e^{2\pi i \lambda_2} S_1, \quad S_2'' = S_2,$$

so bestehen für grosse Werthe von $|x|$ die asymptotischen Gleichungen

$$y_1 \sim S_1', \quad y_2 \sim S_1'' \quad \text{für } \arg x = -\frac{\pi}{2},$$

$$y_1 \sim S_1' + S_2', \quad y_2 \sim S_1'' + S_2'' \quad \text{,, } \arg x = 0,$$

$$y_1 \sim S_2', \quad y_2 \sim S_2'' \quad \text{,, } \arg x = \frac{\pi}{2},$$

$$y_1 \sim e^{2\pi i \lambda_1} S_1' + S_2', \quad y_2 \sim e^{-2\pi i \lambda_2} S_1'' + S_2'' \quad \text{,, } \arg x = \pi,$$

$$y_1 \sim e^{2\pi i \lambda_1} S_1', \quad y_2 \sim e^{-2\pi i \lambda_2} S_1'' \quad \text{,, } \arg x = \frac{3\pi}{2}.$$

Die für $\arg x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ bestehenden asymptotischen Darstellungen gelten gleichmässig in dem Gebiet

$$k\pi + \delta < \arg x < (k+1)\pi - \delta,$$

die für $\arg x = k\pi$ angegebenen gelten gleichmässig in dem Gebiet

$$(k-1)\pi + \delta < \arg x < (k+1)\pi - \delta,$$

wo δ eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet.

Die aufgestellten asymptotischen Darstellungen werden im zweiten Theil zur genaueren Untersuchung des Verhaltens der Integrale der Differentialgleichung (A) in der Umgebung der singulären Stelle $x = \infty$ benutzt.

Später folgt eine Ausdehnung der Untersuchung auf allgemeinere lineare Differentialgleichungen unter Benutzung der Laplace'schen Transformirten im Anschluss an die Arbeiten Poincaré's.

Cronberg, 4. Januar 1897.