SUL MOTO BRACHISTOCRONO
D'UN SISTEMA QUALUNQUE DI PUNTI MATERIALI,

Nota di G. Pennacchietti, in Catania

Adunanza del 14 febbrajo 1892

§ I.

Sia dato un sistema di n punti materiali. Denotiamo con m_i la massa di uno qualunque di essi e con x_i, y_i, z_i le coordinate di questo punto rispetto a un sistema di assi ortogonali fissi nello spazio. Supporremo che le forze ammettano una funzione potenziale U dipendente dalle sole coordinate, sicché denotando con X_i, Y_i, Z_i le componenti secondo gli assi, si abbia

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Supponiamo inoltre che i legami del sistema sieno dati mediante le k equazioni.

$$L_{i'}(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_n) = 0 \quad (i' = 1, 2, \dots, k) \quad (1)$$

tra le sole coordinate dei punti mobili. Perciò denotando con T l'energia totale del sistema e con h una costante arbitraria, il problema del moto ammetterà l'integrale

$$T - U = h. \quad (2)$$

Immaginiamo determinate le coordinate di tutti i punti mobili per mezzo di una di esse x_1 , e sia t il tempo che impiega il sistema nel passaggio tra due configurazioni individuate dai valori x_1^0 , x_1^1 di x_1 . Si avrà:

$$t = \int_{x_1^0}^{x_1^1} V dx_1, \quad (3)$$

essendo

$$V = \sqrt{\frac{m_1(1+y_1'^2+z_1'^2) + m_2(x_2'^2+y_2'^2+z_2'^2) + \dots + m_n(x_n'^2+y_n'^2+z_n'^2)}{2(U+h)}},$$

dove gli accenti indicano derivazioni rispetto ad x_1 .

Se si denotano con $l_1, l_2, \dots, l_k$ quantità da determinarsi, si trova che, affinchè l'integrale (3) sia un minimo, è necessario che si abbia.

$$\left. \begin{aligned} X_1 - \frac{d}{dx_1} \frac{\partial V}{\partial x_1} + l_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial L_2}{\partial x_1} + \dots + l_k \frac{\partial L_k}{\partial x_1} &= 0, \\ Y_1 - \frac{d}{dx_1} \frac{\partial V}{\partial y_1} + l_1 \frac{\partial L_1}{\partial y_1} + l_2 \frac{\partial L_2}{\partial y_1} + \dots + l_k \frac{\partial L_k}{\partial y_1} &= 0, \\ Z_1 - \frac{d}{dx_1} \frac{\partial V}{\partial z_1} + l_1 \frac{\partial L_1}{\partial z_1} + l_2 \frac{\partial L_2}{\partial z_1} + \dots + l_k \frac{\partial L_k}{\partial z_1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

($j = 2, 3, \dots, n, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$)

Prendendo t come variabile indipendente, il sistema (3), (4) equivale al seguente.

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -X_1 + \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} m_1 \frac{dx_1}{dt} + l_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial L_2}{\partial x_1} + \dots + l_k \frac{\partial L_k}{\partial x_1}, \\ m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -Y_1 + \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} m_1 \frac{dy_1}{dt} + l_1 \frac{\partial L_1}{\partial y_1} + l_2 \frac{\partial L_2}{\partial y_1} + \dots + l_k \frac{\partial L_k}{\partial y_1}, \\ m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= -Z_1 + \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} m_1 \frac{dz_1}{dt} + l_1 \frac{\partial L_1}{\partial z_1} + l_2 \frac{\partial L_2}{\partial z_1} + \dots + l_k \frac{\partial L_k}{\partial z_1}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Nel caso in cui le forze esterne sono nulle, cioè in cui si abbia

$X_i = 0, Y_i = 0, Z_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), questo sistema coincide colle ordinarie equazioni del moto d'un sistema soggetto ai vincoli (1) il quale si muova in virtù di velocità iniziali.

Esprimiamo mediante le (1) le coordinate x_i, y_i, z_i in funzione di $3n - k = \mu$ parametri $q_1, q_2, \dots, q_\mu$ tali che le espressioni stesse sostituite nelle (1) invece di x_i, y_i, z_i rendano le (1) identiche.

Se si pone.

$$q'_r = \frac{dq_r}{dt}, \quad (r = 1, 2, \dots, \mu)$$

si avrà:

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}q_1'^2 + a_{22}q_2'^2 + \dots + 2a_{12}q_1'q_2' + \dots),$$

dove le quantità a_{rs} sono funzioni conosciute delle q_r . Il sistema (5) si trasformerà nel seguente

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = - \frac{\partial U}{\partial q_r} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_r}. \quad (6)$$

Sarebbe facile vedere che le equazioni del moto brachistocrono conservano la forma (6) anche quando, senza che le componenti X_i, Y_i, Z_i delle forze sieno necessariamente le derivate di una stessa funzione delle $3n$ variabili x_i, y_i, z_i , l'espressione $\sum (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$ sia nondimeno il differenziale esatto di una funzione U delle variabili q_r (*).

Ponendo:

$$\frac{\frac{\partial T}{\partial q'_r}}{T} = p_r, \quad H = T - U$$

ed esprimendo T per mezzo delle p_r, q_r , il sistema dell'equazioni del moto brachistocrono assume la forma (**).

$$T \frac{dq_r}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad T \frac{dp_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_r} \quad (7)$$

(*) Cfr. la mia nota *Sul moto brachistocrono* (Rend. Circ. Mat., t. V, 1891).

(**) Rend. Circ. Mat. nota citata.

Di questo sistema i $2\mu - 1$ integrali non contenenti esplicitamente il tempo sono in comune col sistema canonico

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_r}.$$

Posto

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & & & a_{2n} \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

si trova

$$T = - \frac{2A}{\begin{vmatrix} 0, & p_1, & p_2, & & p_n \\ p_1, & a_{11}, & a_{12}, & & a_{1n} \\ p_2, & a_{21}, & a_{22}, & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_n, & a_{n1}, & a_{n2}, & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

Perciò l'equazione differenziale parziale da cui dipende la determinazione degli integrali non contenenti esplicitamente il tempo, è:

$$\begin{vmatrix} 0, & p_1, & p_2, & & p_n \\ p_1, & a_{11}, & a_{12}, & & a_{1n} \\ p_2, & a_{21}, & a_{22}, & & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_n, & a_{n1}, & a_{n2}, & & a_{nn} \end{vmatrix} (U + h) + 2 \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

dove.

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial q_r}.$$

§ II.

Considereremo ora alcune proprietà del moto brachistocrono d'un sistema rigido. Sieno ξ, η, ζ le coordinate del baricentro, M la somma delle masse dei singoli punti del sistema Sieno $G_x, G_y, G_z; M_x,$

M_x, M_y, M_z i momenti delle quantità di moto e delle forze attive rispetto agli assi x, y, z . Dal sistema (§ I, 5) si ottiene

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= - \sum X_i + \frac{M}{T} \frac{dT}{dt} \frac{d\xi}{dt}, \\ M \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= - \sum Y_i + \frac{M}{T} \frac{dT}{dt} \frac{d\eta}{dt}, \\ M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= - \sum Z_i + \frac{M}{T} \frac{dT}{dt} \frac{d\zeta}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dG_x}{dt} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} G_x &= -M_x, \\ \frac{dG_y}{dt} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} G_y &= -M_y, \\ \frac{dG_z}{dt} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} G_z &= -M_z. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Pel baricentro conduciamo tre assi x'', y'', z'' paralleli rispettivamente agli assi x, y, z e tre altri assi x', y', z' pure ortogonali, ma fissi nel corpo. Sieno $G_{x''}, G_{y''}, G_{z''}, M_{x''}, M_{y''}, M_{z''}$, i momenti delle quantità di moto e delle forze attive rispetto agli assi x'', y'', z'' . Si avrà

$$\begin{aligned} G_{x''} &= G_x + \left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} \right) M, \\ M_{x''} &= M_x + \xi \sum Y - \eta \sum X \end{aligned}$$

con formule analoghe rispetto a $G_{y''}, G_{z''}, M_{y''}, M_{z''}$. Dal sistema (2) si deduce

$$\left. \begin{aligned} \frac{dG_{x''}}{dt} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} G_{x''} &= -M_{x''}, \\ \frac{dG_{y''}}{dt} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} G_{y''} &= -M_{y''}, \\ \frac{dG_{z''}}{dt} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} G_{z''} &= -M_{z''}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Sieno $G_{x'}$, $G_{y'}$, $G_{z'}$ i momenti delle quantità di moto rispetto agli assi x' , y' , z' . Sieno a , b , c i coseni direttori dell'asse x' rispetto agli assi x , y , z , a' , b' , c' i coseni direttori dell'asse y' , e a'' , b'' , c'' quelli dell'asse z' rispetto agli stessi assi x , y , z . Si avrà

$$\left. \begin{aligned} G_{x''} &= a G_{x'} + a' G_{y'} + a'' G_{z'}, \\ G_{y''} &= b G_{x'} + b' G_{y'} + b'' G_{z'}, \\ G_{z''} &= c G_{x'} + c' G_{y'} + c'' G_{z'} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Denotiamo con p , q , r le componenti, secondo gli assi x' , y' , z' , della velocità angolare ω intorno all'asse baricentrico di rotazione, quando si immagina decomposto il moto infinitesimo del sistema in una traslazione, caratterizzata dalla velocità del baricentro, e in una rotazione intorno all'asse istantaneo che passa pel baricentro. Si ha

$$\left. \begin{aligned} p &= a'' \frac{da'}{dt} + b'' \frac{db'}{dt} + c'' \frac{dc'}{dt}, \\ q &= a \frac{da''}{dt} + b \frac{db''}{dt} + c \frac{dc''}{dt}, \\ r &= a' \frac{da}{dt} + b' \frac{db}{dt} + c' \frac{dc}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Dalle (3), (4), (5) si deduce facilmente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dG_{x'}}{dt} + q G_{z'} - r G_{y'} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} G_{x'} &= -M_{x'}, \\ \frac{dG_{y'}}{dt} + r G_{x'} - p G_{z'} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} G_{y'} &= -M_{y'}, \\ \frac{dG_{z'}}{dt} + p G_{y'} - q G_{x'} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} G_{z'} &= -M_{z'} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Poniamo

$$T_1 = \frac{1}{2} M \left[\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right],$$

$$T_2 = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq),$$

essendo A, B, C, D, E, F i momenti d'inerzia rispetto agli assi x', y', z' e i prodotti d'inerzia rispetto ai piani $y'z', z'x', x'y'$ Saranno T_1, T_2 l'energia esterna e l'energia interna del sistema, e si avrà

$$T = T_1 + T_2.$$

Si ha inoltre, com'è noto

$$G_x = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad G_y = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad G_z = \frac{\partial T}{\partial r}.$$

Supponendo, per maggiore semplicità, che gli assi x', y', z' sieno gli assi principali, si ha $D = 0, E = 0, F = 0$, e il sistema (6) diviene

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} - (B - C)qr - \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} Ap &= -M_x, \\ B \frac{dq}{dt} - (C - A)rp - \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} Bq &= -M_y, \\ C \frac{dr}{dt} - (A - B)pq - \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} Cr &= -M_z. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

§ III

Se il momento delle forze attive è nullo rispetto ad un asse O_x , e se si denota con g_1 una costante arbitraria e con $A_x^{(1)}$ l'area descritta dalla proiezione, sul piano yz , del raggio vettore condotto dall'origine O al punto mobile m , si ha

$$\frac{dG_x}{dt} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} G_x = 0,$$

$$G_x = T g_1,$$

$$\sum m_i dA_x^{(1)} = \frac{1}{2} g_1 T dt.$$

Se il momento delle forze attive rispetto all'origine è nullo, e denotiamo con g_1, g_2 due nuove costanti e con $A_y^{(i)}, A_z^{(i)}$ le aree descritte dalle proiezioni, sui piani zx, xy , del raggio vettore condotto dall'origine O al punto m_i , si ottiene

$$\frac{dG_x}{dt} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} G_x = 0, \quad \frac{dG_y}{dt} - \frac{1}{T} G_y = 0, \quad \frac{dG_z}{dt} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} G_z = 0,$$

$$G_x = Tg_1, \quad G_y = Tg_2, \quad G_z = Tg_3, \quad (1)$$

$$\sum m_i dA_x^{(i)} = \frac{1}{2} g_1 T dt, \quad \sum m_i dA_y^{(i)} = \frac{1}{2} g_2 T dt, \quad \sum m_i dA_z^{(i)} = \frac{1}{2} g_3 T dt,$$

$$G = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2} T. \quad (2)$$

Sieno α, β, γ i coseni direttori d'un nuovo asse O_n condotto per O , e indichiamo con $A_n^{(i)}$ l'area descritta dalla proiezione, sul piano perpendicolare ad O_n , del raggio vettore tirato dall'origine al punto mobile. Sia θ l'angolo che O_n forma col momento geometrico G delle quantità di moto rispetto all'origine. Sia G_n il momento delle quantità di moto rispetto ad O_n . Si avrà

$$\begin{aligned} \sum m dA_n &= \frac{1}{2} (g_1 \cos \alpha + g_2 \cos \beta + g_3 \cos \gamma) T dt \\ &= \frac{1}{2} (G_x \cos \alpha + G_y \cos \beta + G_z \cos \gamma) dt = \frac{1}{2} G_n dt \\ &= \frac{1}{2} G \cos \theta dt = \frac{1}{2} \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2} \cos \theta T dt, \end{aligned}$$

$$\left[\sum m dA_n \right]_{t=t_1} - \left[\sum m dA_n \right]_{t=t_0} = \frac{1}{2} \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2} \cos \theta \int_{t_0}^{t_1} T dt \quad (3)$$

Dalle equazioni (1), (2), (3) si trae quanto segue. *Durante il moto brachistocrono d'un sistema invariabile nel quale il momento delle forze attive rispetto a un dato punto è nullo, il momento geometrico delle quantità di moto ha costante direzione, e in grandezza è proporzionale all'energia cinetica. Il piano perpendicolare al momento geometrico delle quantità di moto ossia il piano della coppia risultante delle quantità di*

moto è quello per cui la somma delle proiezioni delle aree, descritte in un dato intervallo di tempo dai raggi vettori e moltiplicate per le masse dei punti mobili rispettivi, ha massimo valore.

Nel caso d'un solo punto si ha .

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dx}{dt} = g_1 T, \quad z \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = g_2 T, \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = g_3 T,$$

da cui si deduce che la traiettoria è piana. Prendendo il piano della brachistocrona per piano yz , indicando con v la velocità, con p la perpendicolare tirata dall'origine sulla tangente condotta pel punto mobile alla traiettoria stessa, e con A l'area descritta dal raggio vettore, si ha .

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} g_1 T = \frac{1}{2} v p, \quad v = \frac{1}{g_1 m} p,$$

cioè Nel moto brachistocrono d'un punto materiale soggetto all'azione d'una forza data la cui linea d'azione passi per un punto fisso, la velocità è proporzionale alla perpendicolare tirata dal punto fisso sulla direzione della velocità

§ IV.

Consideriamo in ultimo il moto brachistocrono d'un sistema rigido sotto l'azione di forze le quali si riducano ad un'unica risultante baricentrica. Essendo ora $M_x = 0$, $M_y = 0$, $M_z = 0$, le (§ I, 7) divengono

$$A \frac{dp}{dt} - (B - C)qr - \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} Ap = 0,$$

$$B \frac{dq}{dt} - (C - A)rp - \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} Bq = 0,$$

$$C \frac{dr}{dt} - (A - B)pq - \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} Cr = 0.$$

Moltiplicando queste equazioni rispettivamente per $p dt$, $q dt$, $r dt$ e sommando si ottiene .

$$2 T_2 d T = T d T_2 ,$$

da cui integrando e denotando con c la costante d'integrazione .

$$T = c \sqrt{T_2} , \quad (1)$$

ossia

$$d T_1 + d T = 2 \frac{T_1}{T} d T$$

Le (§ II, 1) offrono .

$$d T_1 = - \sum X_i d \xi - \sum Y_i d \eta - \sum Z_i d \zeta + 2 \frac{T_1}{T} d T ,$$

dalla quale e dalla precedente segue

$$d T = \sum X_i d \xi + \sum Y_i d \eta + \sum Z_i d \zeta$$

Sia G il momento geometrico delle quantità di moto rispetto al baricentro Si avrà, per quanto si è detto al § precedente, denotando con c' una costante arbitraria

$$G = c' T , \quad (2)$$

e inoltre G sarà costante in direzione

Immaginiamo l'ellissoide centrale ossia l'ellissoide d'inerzia o di POINSONOT relativo al baricentro Sia l il semidiametro intorno a cui avviene la rotazione istantanea, e consideriamo il piano tangente all'ellissoide e passante per l'estremità del semidiametro stesso Questo piano, per le note proprietà dei sistemi rigidi, è perpendicolare al momento geometrico G , il quale, come si è osservato, ha direzione costante Perciò questo piano non può muoversi che parallelamente a sè stesso Sia d la lunghezza della perpendicolare tirata dal centro dell'ellissoide sul piano tangente considerato, α l'angolo

delle rette l , G , sia k_0 il raggio d'inerzia, sicchè $k_0 = \frac{h_0}{l}$, essendo h_0 una costante. Inoltre, se si prende h_0 definita dalla relazione $Mh_0^2 = I$, si ha, secondo le note proprietà dei sistemi rigidi

$$G = \frac{I}{d} \sqrt{2T_2}, \quad (3)$$

$$\omega = l \sqrt{2T_2},$$

$$G \cos \alpha = Mk_0^2 \omega$$

Dalle (1), (2), (3) si deduce che d è costante. Da tutto ciò che precede risultano i teoremi seguenti. *Nel moto brachistocrono d'un sistema rigido soggetto all'azione di forze le quali si riducano ad un'unica risultante baricentrica, l'energia cinetica totale è proporzionale alla radice quadrata dell'energia cinetica interna, il momento geometrico delle quantità di moto è proporzionale all'energia cinetica totale ed ha costante direzione. L'ellissoide centrale di POINSON rotola sopra un piano. Questo piano è dotato del solo movimento di traslazione, essendo la velocità di ciascun suo punto eguale, in grandezza, direzione e senso, alla velocità del baricentro. L'asse baricentrico istantaneo di rotazione è il semidiametro condotto pel punto di contatto dell'ellissoide con questo piano. La velocità angolare della rotazione istantanea varia in ragione composta del semidiametro intorno a cui essa ha luogo, e dell'energia cinetica del sistema. La componente, secondo l'asse istantaneo, del momento delle quantità di moto rispetto al baricentro è proporzionale all'energia cinetica. Se il sistema in un istante dato ruota intorno uno de' suoi assi principali, continuerà sempre a ruotare intorno a quest'asse con velocità proporzionale all'energia cinetica totale del sistema.*

Catania, 5 febbraio 1892

GIOVANNI PENNACCHIETTI