7. *Bestimmung der Constanten der thermischen Dilatation und des thermischen Druckes für einige quasi-isotrope Metalle; von W. Voigt.*

(Im Auszuge aus den Nachrichten von der Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen Nr. 5, 1893 mitgetheilt.)

Die im Folgenden mitgetheilten Messungen bilden ein Glied in einer längeren Reihe von Beobachtungen, deren Ziel ist, *an denselben, möglichst gut definirten Metallstücken eine grössere Anzahl von physikalischen Constanten zu bestimmen.* Nur so gefundene Zahlen können theoretisch verwerthet werden, insbesondere zur Beantwortung der Frage, ob zwischen den auf dieselbe Substanz bezüglichen *verschiedenartigen* Constanten numerische Beziehungen stattfinden.

Die untersuchten Metallstäbe sind dieselben, für welche ich bereits die Constanten der Elasticität und der inneren Reibung mitgetheilt habe¹⁾, ausgesägt aus vorsichtig gegossenen, im übrigen unbearbeiteten Blöcken. Die Bestimmung ihrer thermischen Dilatation geschah mit Hülfe des früher beschriebenen Apparates²⁾, der schon zur Beobachtung einiger Krystalle gedient hat. Ich wiederhole hier nur kurz sein Constructionsprincip.

An der Wand des Beobachtungsraumes ist ein Gestell befestigt, welches eine vertical herabhängende messingene Schiene trägt. Das untere Ende des zu untersuchenden Stäbchens wird mittels einer feinen Körnervertiefung auf eine Messingspitze aufgelegt, welche sich am untersten Theile der Schiene befindet; auf dem oberen Ende des Stäbchens liegt in einer ähnlichen Vertiefung eine kleine Wippe, die ihren zweiten Stützpunkt an der Schiene hat und einen vertical gestellten Spiegel trägt. In demselben wird mit einem Fernrohr eine entfernte vertical aufgestellte Scala beobachtet. Ein zweiter, an der

1) Vgl. W. Voigt, Abh. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. **38.** 1892, und Wied. Ann. **47.** p. 671. 1892; **48.** p. 674. 1893.

2) W. Voigt, Wied. Ann. **43.** p. 831. 1891.

Schiene selbst befestigter Spiegel gestattet, etwaige Veränderungen in deren Stellung in Rechnung zu ziehen.

Besteht Stab und Schiene aus verschiedener Substanz, so ändert sich die Neigung des beweglichen Spiegels mit der Temperatur; und zwar wird die einer Temperaturdifferenz ϑ entsprechende Verschiebung σ der von unten nach oben nume-
rirten Millimeterscala im Fernrohr gegeben sein durch

$$(1) \quad \sigma = -\frac{2LE}{H}(\alpha - \alpha_m)\vartheta = \beta\vartheta,$$

falls L die Länge des Stabes, H den Hebelarm der Wippe, E die Entfernung der Scala vom Fernrohr, α den thermischen Dilatationscoefficienten des Stabes, α_m denjenigen der Messing-
schiene bezeichnet.

Die Beobachtungstemperatur wurde dadurch geändert, dass der ganze Apparat mit der Wippe bis hart unter den beweglichen Spiegel abwechselnd in ein kaltes und ein warmes Bad von Paraffinöl getaucht wurde; diese Bäder konnten, ohne den Apparat zu erschüttern, durch eine geeignete mechanische Vorrichtung — einen auf Rollen längs der Wand vertical verschiebbaren Schlitten — von unten her dem Apparat entgegengehoben und in der gewünschten Lage durch ein Gegengewicht festgehalten werden. Die Flüssigkeit wurde durch Turbinenrührer in mässiger Circulation erhalten; da das kältere Bad meist eine nur wenig tiefere Temperatur besass, als die Luft des Beobachtungsraumes, das wärmere sich über einer kleinen Gasflamme befand, ausserdem die kupfernen Gefässe mit Filz überzogen waren, so gelang es leicht, die Temperaturen längere Zeit bis auf $0,1^\circ \text{C.}$ constant zu halten. Eine grössere Genauigkeit war nicht nöthig, weil sich bald zeigte, dass die verschiedenen Stäbe aus derselben Substanz keineswegs sehr genau übereinstimmendes Verhalten zeigten, die ganze Bestimmung also nur mässig genaue Werthe liefern konnte. Aus demselben Grunde ist die Untersuchung der Abhängigkeit der thermischen Dilatation von der Temperatur weniger ausführlich behandelt und theilweise ganz unterblieben.

Bezüglich der Berechnung sei bemerkt, dass, wenn man den Dilatationscoefficienten als lineäre Function der Temperatur ansetzt, was innerhalb des benutzten mässigen Bereiches zulässig ist, der einem Temperaturzuwachs $\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$ ent-

sprechende Zuwachs l der Stablänge direct den Werth des Dilatationscoefficienten α für die mittlere Temperatur $\vartheta_m = \frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)$ bestimmt; denn aus

$$\begin{aligned} l = L_2 - L_1 &= L_0 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \alpha(\vartheta) d\vartheta = L_0 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} (\alpha_0 + \alpha_1 \vartheta) d\vartheta, \\ &= L_0 \left(\alpha_0 + \alpha_1 \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \right) (\vartheta_2 - \vartheta_1) \end{aligned}$$

folgt

$$(2) \quad \frac{l}{L_0 \vartheta} = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} = \alpha(\vartheta_m).$$

Die Vortheile des Apparates gegenüber dem bekannten sinnreichen von Fizeau liegen vor allen Dingen in der Benutzung von zwei Flüssigkeitsbädern, die sich leicht auswechseln lassen und dadurch eine schnelle Veränderung der Temperatur erlauben, auch mehr Garantie für eine zuverlässige Temperaturbestimmung bezüglich des untersuchten Körpers bieten, als Luftbäder; ferner in der Anwendung der Ablesung an einer Scala gegenüber der mühsamen dauernden Abzählung der wandernden Interferenzstreifen. Gegenüber dem dilatometrischen Verfahren, bei dem die gesuchte Grösse durch die Differenz zweier wenig verschiedener Ablesungen bestimmt wird, bietet die benutzte Methode eine grössere Sicherheit.¹⁾

Zum Graduiren des Apparates diente die Beobachtung eines schönen, von Hrn. Dr. Steeg und Reuter in Bad Homburg hergestellten Stabes von Bergkrystall, parallel der krystallographischen Hauptaxe orientirt, von ca. 11 cm Länge.

Die mit ihm erhaltenen Ablesungen sind so mitgetheilt, dass in der ersten Columnne die Temperaturänderung ϑ , in der zweiten die ihr entsprechende beobachtete Verschiebung σ der Scala im Fernrohr aufgeführt ist, in der dritten deren berechneter Werth σ_b , der mit Hülfe des aus allen Messungen einer Reihe bestimmten $\beta = \sigma/\vartheta$ erhalten ist. ϑ_m ist, wie oben, die mittlere Temperatur, d. h. das arithmetische Mittel der erreichten Grenztemperaturen. Zur Be-

1) Hervorzuheben ist die Bequemlichkeit und der im Verhältniss zu den guten Leistungen niedrige Preis des Apparates, die ihn als Uebungsgegenstand für das Laboratorium sehr empfehlen. Die Unsicherheit der für einen und denselben Stab gefundenen Werthe α beträgt nur einige pro Mille.

stimmung der Temperaturen diente ein Geissler'sches Normalthermometer, dessen Theilung innerhalb des benutzten Temperaturintervalles und bei der gebrauchten Anordnung um den 0,0089ten Theil zu gross war; die deswegen nothwendige Correction ist aber nicht an den einzelnen Beobachtungen, sondern erst an den Endresultaten angebracht.

Quarz $L = 10,98$.

$$\begin{array}{rcl}
 \vartheta = + 53,9 & \sigma = - 12,94 & \sigma_b = 12,76 \\
 - 53,4 & + 12,50 & 12,63 \\
 + 53,6 & - 12,50 & 12,66 \\
 - 53,2 & + 12,43 & 12,55 \\
 + 53,7 & - 12,82 & 12,70 \\
 \\
 \vartheta = + 56,9 & \sigma = - 13,51 & \sigma_b = 13,45 \\
 - 56,1 & + 13,11 & 13,26 \\
 + 58,2 & - 13,84 & 13,76 \\
 - 57,5 & + 13,82 & 13,60 \\
 \\
 \beta = - 0,2366, & \vartheta_m = 38,2.
 \end{array}$$

Die einzelnen Beobachtungen dieser Reihe stimmen unter sich zwar weniger gut, aber durch die grosse Zahl der Messungen erhält das Endresultat doch eine ziemlich bedeutende Sicherheit.

$$\begin{array}{rcl}
 \vartheta = + 32,35 & \sigma = - 7,40 & \sigma_b = 7,45 \\
 - 32,30 & + 7,41 & 7,44 \\
 + 28,00 & - 6,47 & 6,45 \\
 - 27,85 & + 6,42 & 6,42 \\
 \\
 \beta = 0,2303, & \vartheta_m = 26,1. \\
 \\
 \vartheta = + 26,0 & \sigma = - 5,96 & \sigma_b = 5,84 \\
 - 34,0 & + 7,55 & 7,64 \\
 + 28,0 & - 6,43 & 6,29 \\
 - 27,7 & + 6,12 & 6,22 \\
 + 26,5 & - 5,90 & 5,95 \\
 \\
 \beta = - 0,2247, & \vartheta_m = 14,1.
 \end{array}$$

Macht man für β den Ansatz

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 \vartheta_m,$$

so findet sich

$$\beta_0 = - 0,2176, \quad \beta_1 = - 0,000492$$

und folgende Vergleichung

$$\begin{array}{rcl}
 \text{beobachtet} & 0,2366 & 0,2303 & 0,2247 \\
 \text{berechnet} & 0,2365 & 0,2305 & 0,2246
 \end{array}$$

Nach Anbringung der Thermometercorrection werden diese Resultate

$$\beta_0 = - 0,2157, \quad \beta_1 = - 0,000488.$$

Nun ist nach (1) der Ausdehnungscoefficient der Messingschiene gegeben durch

$$(3) \quad \alpha_m = \alpha_q - \beta \frac{H}{2LE},$$

falls α_q den lineären Ausdehnungscoefficienten des Quarzes parallel der Hauptaxe bezeichnet. Benutzt man, dass bei dem angewandten Apparate

$$H = 0,622, \quad E = 591,5$$

war, und dass die neuesten Beobachtungen von Benoît¹⁾

$$\alpha_q = (7,111 + 0,01712 \vartheta_m) 10^{-6}$$

ergeben haben, so erhält man als die Constante des Apparates

$$\alpha_m = (17,44 + 0,0405 \vartheta_m) 10^{-6},$$

oder, wenn man die Temperatur 30° C. zu Grunde legt, um nicht den Fundamentalwerth durch Extrapolation zu gewinnen, und beachtet, dass dies α_m , wie oben gezeigt, den lineären thermischen Ausdehnungscoefficienten bei der Temperatur $\Theta = \vartheta_m$ angibt:

$$\alpha_m = (18,65 + 0,0405 (\Theta - 30)) \cdot 10^{-6}.$$

Mit dieser Zahl sind die mit den Metallen angestellten Beobachtungen berechnet, von denen ich hier nur die Endresultate angebe, indem ich bezüglich der Einzelheiten auf den ersten Abdruck dieser Untersuchung verweise.

Allgemein bemerke ich, dass die Uebereinstimmung sowohl der direct beobachteten σ mit den berechneten σ_b bei *demselben* Stab, als auch die der schliesslich folgenden Ausdehnungscoefficienten α für *verschiedene* Stäbe derselben Substanz bei den verschiedenen Metallen ziemlich verschieden ausgefallen ist.

Die Differenzen zwischen den σ und den σ_b rühren zum Theil von Erschütterungen des Apparates durch an dem leider ungünstig gelegenen Beobachtungsraume mitunter nahe vorbeifahrende Lastwagen her, zum Theil aber unzweifelhaft von einer Art thermischer Nachwirkung, die einen *absolut* stationären Zustand auch nach stundenlangem Verweilen in derselben Temperatur nicht eintreten liess; letztere war bei den

1) J. R. Benoît, Trav. et Mém. bur. intern. 6. p. 119, 121. 1888.

stark ductilen Metallen (Kadmium, Silber, Zinn u. dgl.) am stärksten, diese gaben daher mitunter auch bedeutendere Werthe der Differenzen $\sigma - \sigma_0$.

Die Abweichung der Endwerthe α für verschiedene Stäbe desselben Materials scheint einerseits eine Folge der mangelhaften Isotropie, andererseits die Wirkung der verschiedenen mechanischen Einwirkung bei der Herstellung der Stäbe zu sein. In der That sind dieselben bei den grobkristallinischen und den stark ductilen Metallen im allgemeinen am grössten.

Bei den Ablesungen hat Hr. Drude mir treulich geholfen.

Aluminium.¹⁾

Nr. 1.	$\beta^a) = + 0,1000,$	$\vartheta_m = 31,1,$	$L = 11,10,$	$\alpha = 23,40 \cdot 10^{-6}.$
„ 2.	$\beta = + 0,0939,$	$\vartheta_m = 38,9,$	$L = 11,09,$	$\alpha = 23,66 \cdot 10^{-6}.$
„ 5.	$\beta = + 0,0947,$	$\vartheta_m = 44,0,$	$L = 11,03,$	$\alpha = 23,69 \cdot 10^{-6}.$
„ 6.	$\beta = + 0,0951,$	$\vartheta_m = 38,0,$	$L = 11,06,$	$\alpha = 23,46 \cdot 10^{-6}.$
„ 5.	$\beta = + 0,0877,$	$\vartheta_m = 13,6,$	$L = 11,03,$	$\alpha = 22,13 \cdot 10^{-6}.$
„ 6.	$\beta = + 0,0855,$	$\vartheta_m = 15,4,$	$L = 11,06,$	$\alpha = 22,09 \cdot 10^{-6}.$

Hieraus folgt als definitiver Werth

$$\alpha = (23,06 + 0,061 (\theta - 30)) \cdot 10^{-6},$$

und daraus die Zusammenstellung:

beob.	23,40	23,66	23,69	23,46	22,13	22,09
ber.	23,12	23,61	23,92	23,55	22,06	22,16

Diese Zahlen stimmen weniger genau, als einige der folgenden Reihen; da aber die Vergleichung der einzelnen σ und σ_0 nur geringe Differenzen gab, so ist die Ursache der Abweichungen nicht in den Beobachtungen, sondern in dem Material zu suchen.

Bronze.

Nr. 8.	$\beta = - 0,0173,$	$\vartheta_m = 37,4,$	$L = 10,95,$	$\alpha = 18,13 \cdot 10^{-6}.$
„ 14.	$\beta = - 0,0173,$	$\vartheta_m = 40,3,$	$L = 10,96,$	$\alpha = 18,25 \cdot 10^{-6}.$
„ 14.	$\beta = - 0,0215,$	$\vartheta_m = 18,5,$	$L = 10,96,$	$\alpha = 17,17 \cdot 10^{-6}.$

Hieraus folgt

$$\alpha = (17,75 + 0,0503 (\theta - 30)) \cdot 10^{-6},$$

und die Zusammenstellung:

beob.	18,13	18,25	17,17
ber.	18,12	18,27	17,17

1) Wegen der genaueren Charakterisirung der untersuchten Metalle sei verwiesen auf Wied. Ann. 48. p. 675. 1893.

2) Die angegebenen Werthe β sind noch mit dem Thermometerfehler behaftet, die α hingegen corrigirt.

Kadmium.

Nr. 2.	$\beta = + 0,110,$	$\vartheta_m = 43,0,$	$L = 10,98,$	$\alpha = 24,4 \cdot 10^{-6}.$
„ 4.	$\beta = + 0,132,$	$\vartheta_m = 41,0,$	$L = 11,02,$	$\alpha = 25,3 \cdot 10^{-6}.$
„ 4.	$\beta = + 0,131,$	$\vartheta_m = 18,3,$	$L = 11,02,$	$\alpha = 24,4 \cdot 10^{-6}.$

Die Abhängigkeit des Dilatationscoefficienten von der Temperatur versteckt sich hier unter den Beobachtungsfehlern; wir setzen für 30° als angenähert richtig

$$\alpha = 24,7 \cdot 10^{-6}.$$

Eisen.

Nr. 1.	$\beta = - 0,139,$	$\vartheta_m = 35,9,$	$L = 11,02,$	$\alpha = 12,16 \cdot 10^{-6}.$
„ 2.	$\beta = - 0,157,$	$\vartheta_m = 39,6,$	$L = 11,14,$	$\alpha = 11,69 \cdot 10^{-6}.$
„ 5.	$\beta = - 0,147,$	$\vartheta_m = 36,5,$	$L = 11,02,$	$\alpha = 11,97 \cdot 10^{-6}.$
„ 6.	$\beta = - 0,148,$	$\vartheta_m = 38,0,$	$L = 11,00,$	$\alpha = 11,92 \cdot 10^{-6}.$
„ 5.	$\beta = - 0,1526,$	$\vartheta_m = 15,5,$	$L = 11,02,$	$\alpha = 10,85 \cdot 10^{-6}.$
„ 6.	$\beta = - 0,1507,$	$\vartheta_m = 16,0,$	$L = 11,00,$	$\alpha = 10,95 \cdot 10^{-6}.$

Hieraus folgt

$$\alpha = (11,58 + 0,048 (\theta - 30)) \cdot 10^{-6},$$

und die Zusammenstellung:

beob.	12,16	11,69	11,97	11,93	10,85	10,95
ber.	11,86	12,04	11,89	11,96	10,89	10,91

Die Uebereinstimmung ist recht befriedigend, obgleich das benutzte Eisen nicht eben feinkörnig war.

Gold.

Nr. 1.	$\beta = - 0,0965,$	$\vartheta_m = 35,6,$	$L = 10,90,$	$\alpha = 14,26 \cdot 10^{-6}.$
„ 2.	$\beta = - 0,0952,$	$\vartheta_m = 33,4,$	$L = 10,90,$	$\alpha = 14,24 \cdot 10^{-6}.$
„ 1.	$\beta = - 0,0927,$	$\vartheta_m = 15,6,$	$L = 10,90,$	$\alpha = 13,64 \cdot 10^{-6}.$
„ 2.	$\beta = - 0,0863,$	$\vartheta_m = 15,8,$	$L = 10,90,$	$\alpha = 13,95 \cdot 10^{-6}.$

Hieraus folgt

$$\alpha = (14,14 + 0,0239 (\theta - 30)) \cdot 10^{-6},$$

und die Zusammenstellung:

beob.	14,26	14,24	13,64	13,95
ber.	14,27	14,22	13,80	13,80

Kupfer.

Nr. 1.	$\beta = - 0,034,$	$\vartheta_m = 39,1,$	$L = 11,02,$	$\alpha = 17,41 \cdot 10^{-6}.$
„ 2.	$\beta = - 0,035,$	$\vartheta_m = 38,3,$	$L = 11,03,$	$\alpha = 17,33 \cdot 10^{-6}.$
„ 5.	$\beta = - 0,033,$	$\vartheta_m = 35,0,$	$L = 11,00,$	$\alpha = 17,29 \cdot 10^{-6}.$
„ 6.	$\beta = - 0,031,$	$\vartheta_m = 36,0,$	$L = 11,01,$	$\alpha = 17,43 \cdot 10^{-6}.$
„ 5.	$\beta = - 0,0345,$	$\vartheta_m = 15,5,$	$L = 11,00,$	$\alpha = 16,43 \cdot 10^{-6}.$
„ 6.	$\beta = - 0,0315,$	$\vartheta_m = 12,2,$	$L = 11,01,$	$\alpha = 16,44 \cdot 10^{-6}.$

Hieraus folgt

$$\alpha = (17,09 + 0,0404 (\theta - 30)) \cdot 10^{-6},$$

und die Zusammenstellung:

beob.	17,41	17,33	17,29	17,43	16,43	16,44
ber.	17,46	17,43	17,29	17,33	16,50	16,37

Die Uebereinstimmung ist sehr befriedigend.

Magnesium.

Nr. 2.	$\beta = + 0,0159,$	$\vartheta_m = 32,3,$	$L = 11,03,$	$\alpha = 26,26 \cdot 10^{-6}.$
„ 5.	$\beta = + 0,162,$	$\vartheta_m = 40,0,$	$L = 11,00,$	$\alpha = 26,73 \cdot 10^{-6}.$
„ 6.	$\beta = + 0,156,$	$\vartheta_m = 33,0,$	$L = 11,02,$	$\alpha = 26,15 \cdot 10^{-6}.$
„ 5.	$\beta = + 0,1496,$	$\vartheta_m = 15,4,$	$L = 11,00,$	$\alpha = 25,15 \cdot 10^{-6}.$
„ 6.	$\beta = + 0,149,$	$\vartheta_m = 16,5,$	$L = 11,02,$	$\alpha = 25,16 \cdot 10^{-6}.$

Hieraus folgt

$$\alpha = (26,05 + 0,064 (\theta - 30)) \cdot 10^{-6},$$

und die Zusammenstellung:

beob.	26,26	26,73	26,15	25,15	25,16
ber.	26,20	26,69	26,24	25,12	25,19

Die Uebereinstimmung ist trotz der Weichheit des Materials sehr gut.

Nickel.

Nr. 2.	$\beta = - 0,115,$	$\vartheta_m = 32,0,$	$L = 11,07,$	$\alpha = 13,32 \cdot 10^{-6}.$
„ 3.	$\beta = - 0,117,$	$\vartheta_m = 38,7,$	$L = 11,04,$	$\alpha = 13,48 \cdot 10^{-6}.$
„ 4.	$\beta = - 0,120,$	$\vartheta_m = 46,5,$	$L = 11,08,$	$\alpha = 13,68 \cdot 10^{-6}.$
„ 5.	$\beta = - 0,114,$	$\vartheta_m = 34,0,$	$L = 11,01,$	$\alpha = 13,42 \cdot 10^{-6}.$
„ 5.	$\beta = - 0,1160,$	$\vartheta_m = 14,3,$	$L = 11,01,$	$\alpha = 12,53 \cdot 10^{-6}.$
„ 6.	$\beta = - 0,1170,$	$\vartheta_m = 15,5,$	$L = 11,00,$	$\alpha = 12,53 \cdot 10^{-6}.$

Hieraus folgt

$$\alpha = (13,15 + 0,0413 (\theta - 30)) \cdot 10^{-6},$$

und die Zusammenstellung:

beob.	13,48	13,68	13,42	13,32	12,53	12,53
ber.	13,51	13,83	13,31	13,23	12,50	12,55

Silber.

Nr. 1.	$\beta = + 0,0105,$	$\vartheta_m = 40,6,$	$L = 11,03,$	$\alpha = 19,58 \cdot 10^{-6}.$
„ 2.	$\beta = + 0,013,$	$\vartheta_m = 33,8,$	$L = 11,04,$	$\alpha = 19,42 \cdot 10^{-6}.$
„ 5.	$\beta = + 0,0145,$	$\vartheta_m = 35,0,$	$L = 11,04,$	$\alpha = 19,66 \cdot 10^{-6}.$
„ 6.	$\beta = + 0,0135,$	$\vartheta_m = 31,9,$	$L = 11,03,$	$\alpha = 19,37 \cdot 10^{-6}.$
„ 5.	$\beta = + 0,0145,$	$\vartheta_m = 15,7,$	$L = 11,04,$	$\alpha = 18,76 \cdot 10^{-6}.$
„ 6.	$\beta = + 0,0091,$	$\vartheta_m = 15,7,$	$L = 11,03,$	$\alpha = 18,51 \cdot 10^{-6}.$

Hieraus folgt

$$\alpha = (19,25 + 0,043 (\theta - 30)) \cdot 10^{-6},$$

und die Zusammenstellung:

beob.	19,58	19,42	19,66	19,37	18,76	18,51
ber.	19,71	19,41	19,60	19,38	18,63	18,63

Die Uebereinstimmung ist im ganzen recht gut.

Stahl (L S 84 R).

Nr. 1.	$\beta = -0,156,$	$\vartheta_m = 35,7,$	$L = 11,09,$	$\alpha = 11,55 \cdot 10^{-6}.$
„ 2.	$\beta = -0,150,$	$\vartheta_m = 35,0,$	$L = 11,10,$	$\alpha = 11,82 \cdot 10^{-6}.$
„ 5.	$\beta = -0,149,$	$\vartheta_m = 35,2,$	$L = 11,01,$	$\alpha = 11,81 \cdot 10^{-6}.$
„ 6.	$\beta = -0,149,$	$\vartheta_m = 36,7,$	$L = 11,01,$	$\alpha = 11,87 \cdot 10^{-6}.$
„ 5.	$\beta = -0,1532,$	$\vartheta_m = 16,2,$	$L = 11,01,$	$\alpha = 10,85 \cdot 10^{-6}.$
„ 6.	$\beta = -0,1577,$	$\vartheta_m = 15,2,$	$L = 11,01,$	$\alpha = 10,60 \cdot 10^{-6}.$

Hieraus ergibt sich

$$\alpha = (11,47 + 0,0519 (\theta - 30)) \cdot 10^{-6},$$

und die Zusammenstellung:

beob.	11,55	11,82	11,81	11,87	10,85	10,60
ber.	11,77	11,73	11,74	11,82	10,75	10,70

Die Uebereinstimmung ist ziemlich bedeutend.

Stahl (L S 84 E).

Nr. 3.	$\beta = -0,154,$	$\vartheta_m = 36,1,$	$L = 11,03,$	$\alpha = 11,62 \cdot 10^{-6}.$
„ 4.	$\beta = -0,152,$	$\vartheta_m = 39,6,$	$L = 11,05,$	$\alpha = 11,87 \cdot 10^{-6}.$

Die Beobachtungen sind nicht weiter geführt, weil nach den vorstehenden Zahlen offenbar diese Stahlsorte sich nicht merklich anders verhält, als die vorige.

Wismuth.

Nr. 1.	$\beta = -0,106,$	$\vartheta_m = 35,0,$	$L = 10,95,$	$\alpha = 13,82 \cdot 10^{-6}.$
„ 2.	$\beta = -0,102,$	$\vartheta_m = 36,0,$	$L = 11,00,$	$\alpha = 14,07 \cdot 10^{-6}.$
„ 3.	$\beta = -0,1085,$	$\vartheta_m = 15,8,$	$L = 11,00,$	$\alpha = 12,93 \cdot 10^{-6}.$

Hieraus folgt

$$\alpha = (13,67 + 0,052 (\theta - 30)) \cdot 10^{-6},$$

und die Zusammenstellung:

beob.	13,82	14,07	12,93
ber.	13,93	13,98	12,93

Zink.

Nr. 1.	$\beta = +0,118,$	$L = 11,02,$	$\alpha = 24,2 \cdot 10^{-6}.$
„ 2.	$\beta = +0,136,$	$L = 11,01,$	$\alpha = 25,1 \cdot 10^{-6}.$
„ 3.	$\beta = +0,182,$	$L = 10,92,$	$\alpha = 27,3 \cdot 10^{-6}.$
„ 4.	$\beta = +0,109,$	$L = 10,57,$	$\alpha = 24,0 \cdot 10^{-6}.$

Die enorme Verschiedenheit der gefundenen Werthe dürfte sich hier wohl am natürlichsten durch das sehr grobe krystallinische Korn des benutzten Zinkes erklären und würde dann auf eine starke Abhängigkeit der thermischen Dilatation von der Richtung gegen die Krystallaxen deuten. Die Abhängigkeit derselben von der Temperatur zu untersuchen, hatte

unter diesen Umständen keinen Zweck; eben deshalb sind die Werthe α auch statt für die wirklichen ϑ_m , welche um 36° lagen, sogleich für den Normalwerth 30° berechnet; man wird

$$\alpha = 25,1 \cdot 10^{-6}$$

als einen angenäherten Werth benutzen können.

Zinn.

Nr. 1.	$\beta = + 0,066,$	$L = 10,95,$	$\alpha = 21,8 \cdot 10^{-6}.$
„ 2.	$\beta = + 0,105,$	$L = 10,94,$	$\alpha = 23,6 \cdot 10^{-6}.$
„ 5.	$\beta = + 0,073,$	$L = 10,54,$	$\alpha = 22,1 \cdot 10^{-6}.$
„ 7.	$\beta = + 0,059,$	$L = 10,93,$	$\alpha = 21,5 \cdot 10^{-6}.$

Von diesen Zahlen gilt dasselbe, wie von den für Zink erhaltenen; die Abweichungen dürften hier aber durch die mechanische Bearbeitung der Stäbe bedingt sein. Der Mittelwerth

$$\alpha = 22,2 \cdot 10^{-6}$$

wird für $\Theta = 30^\circ$ als angenähert richtig angenommen werden können.

Die vorstehend bestimmten thermischen Dilatationscoefficienten können nun in Verbindung mit den früher erhaltenen Elasticitätsmoduln¹⁾ dazu benutzt werden, die wichtigen *Constanten des thermischen Druckes* für die untersuchten Körper zu berechnen.

Die thermischen Drucke sind die Ergänzungen, welche zu den gewöhnlichen elastischen Drucken $X_x \dots X_y$ hinzukommen, wenn die Temperatur variiert wird. Beschränkt man sich auf *kleine* Temperaturänderungen, so kann man sie mit denselben proportional setzen, also für isotrope Körper die *gesamten* Drucke $\Xi_x \dots \Xi_y$ schreiben:

$$(4) \quad \begin{cases} -\Xi_x = -(X_x + q \vartheta) = c x_x + c_1 y_y + c_1 z_z - q \vartheta \\ -H_y = -(Y_y + q \vartheta) = c_1 x_x + c y_y + c_1 z_z - q \vartheta \\ -Z_z = -(Z_z + q \vartheta) = c_1 x_x + c_1 y_y + c z_z - q \vartheta \end{cases}$$

aber

$$-H_z = -Y_z = \frac{c - c_1}{2} y_y, \quad -Z_x = -Z_y = \frac{c - c_1}{2} z_z,$$

$$-\Xi_y = -X_y = \frac{c - c_1}{2} x_x,$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. 48. p. 706. 1893.

woraus folgt:

$$(5) \quad \begin{cases} -x_x = s \Xi_x + s_1 H_y + s_1 Z_z - \alpha \vartheta, \\ -y_y = s_1 \Xi_x + s H_y + s_1 Z_z - \alpha \vartheta, \\ -z_z = s_1 \Xi_x + s_1 H_y + s Z_z - \alpha \vartheta, \\ -y_z = 2(s-s_1) H_z, \quad -z_z = 2(s-s_1) Z_x, \quad -x_y = 2(s-s_1) \Xi_y, \end{cases}$$

und zwischen α und q der Zusammenhang besteht:

$$(6) \quad q = \alpha(c + 2c_1), \quad q(s + 2s_1) = \alpha.$$

Ist der Körper keinen äusseren Kräften, sondern nur einer constanten Temperaturänderung ϑ ausgesetzt, so wird

$$x_x = y_y = z_z = \alpha \vartheta,$$

α ist also der lineäre, 3α der kubische thermische Dilatationscoefficient; es hat keine Schwierigkeit, denselben mit der Temperatur variirend zu denken.

Nach Formel (6) kann der Coefficient q des thermischen Druckes aus den Constanten α der thermischen Dilatation und dem Compressionsmodul $s_3 = 3(s + 2s_1)$ berechnet werden.

Die Bedeutung von q wird am anschaulichsten, wenn man die äusseren Kräfte bestimmt, welche nöthig sind, um bei einer Temperaturänderung die Dimensionen des Körpers ungeändert zu erhalten. Dies geschieht nach (5) durch einen äusseren normalen Druck p , dessen Grösse ist:

$$p = \frac{\alpha \vartheta}{s + 2s_1} = q \vartheta.$$

$1/3(s + 2s_1) = K$ ist der „Compressionswiderstand“ identisch mit der sonst wohl „Elasticitätsmodul“ genannten Grösse.

Fragt man nach dem Druck p' auf die Grundflächen, der erforderlich ist, um bei einem Cylinder die Länge trotz erlittener Temperaturänderung ungeändert zu erhalten, so findet man ähnlich:

$$p' = \frac{\alpha}{s} \vartheta = q' \vartheta.$$

$1/s = E$ ist der „Dehnungswiderstand“, welcher sonst auch „Elasticitätscoefficient“ genannt wird.

Beide Constanten q und q' haben ein praktisches Interesse, da sie, wie man sagt, die Kraft messen, mit welcher ein beliebiger Körper nach allen Seiten oder ein Cylinder nach

der Axe bei wachsender Temperatur sich auszudehnen strebt. Ihre Zahlenwerthe, nebst denen von K und E , gibt die folgende Tabelle, und zwar der Anschaulichkeit halber in Grammen als Kraft- und Millimetern als Längeneinheiten; zu Grunde gelegt ist der Werth von α für die Temperatur von 30° .

	$\alpha_{30} \cdot 10 + 6$	$K \cdot 10 - 6$	q	$E \cdot 10 - 6$	q'
Al	23,06	4,83	334	6,57	151
Br ¹⁾	17,75	8,94	476	10,6	188
Cd	24,7	?	?	7,07	174
Fe	11,58	7,90	275	12,8	148
Au	14,14	7,47	317	7,58	107
Cu	17,09	4,95	252	10,85	185
Mg	26,05	2,80	219	4,26	111
Me ²⁾	18,65	6,10	341	9,22	172
Ni	13,15	17,00	672	20,3	267
Ag	19,25	7,08	409	7,79	150
St ³⁾	11,47	14,6	502	20,4	234
Bi	13,67	2,50	102	3,19	44
Zn	25,1	10,1	760	10,3	259
Sn	22,2	?	?	5,41	120

Zu dieser Tabelle ist zu bemerken, dass die Constante K nicht direct beobachtet ist, sondern sich aus den Resultaten der Biegungs- und Drillungsversuche ziemlich ungenau bestimmt.

Da der Druck von einer Atmosphäre nahe 10 g pro Quadratmillimeter beträgt, so kann man q und q' durch Division mit 10 sogleich angenähert auf Atmosphären reduciren.

Die erhaltenen Werthe von q und q' variiren in ziemlich weiten Grenzen; merkwürdig sind die extremen Stellen, die von Wismuth einerseits, von Zink andererseits eingenommen werden. Stahl liefert keineswegs die grössten thermischen Drucke, sondern wird hierin, ausser von Zink, auch von Nickel übertroffen.

Göttingen, Februar 1893.

1) Bronze. 2) Messing. 3) Stahl.