12. Zur Elastizitätstheorie
(Kritik der Saint-Venantschen Methode);
von J. A. Vollgraff.

§ 1. In isotropen Körpern gelten die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} X_x = 2\kappa \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + \theta \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \right] & \text{u. s. w.,} \\ X_y = Y_x = \kappa \left[\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] & \text{u. s. w.} \end{cases}$$

In diesen Gleichungen ist $(\xi \eta \zeta)$ die (unendlich klein gedachte) Verschiebung eines anfangs in (xyz) befindlichen materiellen Punktes. X_x und Y_x sind die Kraftkomponenten, welche pro Flächeneinheit bez. in der X - und in der Y -Richtung wirken auf eine senkrecht zur X -Achse stehende Fläche; X_x, Y_x u. s. w. sind im Innern eines Körpers als Spannungskomponenten, an der Oberfläche außerdem als Komponenten einer äußeren Kraft zu betrachten. Das Achsensystem ist ein rechtwinkliges. κ und θ sind in homogenen Körpern, wie wir sie hier betrachten wollen, Konstanten.

Durch Elimination der Verschiebungskomponenten erhält man aus (1) folgende sechs Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[X_x - \frac{\theta}{1+3\theta} (X_x + Y_y + Z_z) \right] \\ + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[Y_y - \frac{\theta}{1+3\theta} (X_x + Y_y + Z_z) \right] = 2 \frac{\partial^2 X_y}{\partial x \partial y} & \text{u. s. w.,} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left[Y_y - \frac{\theta}{1+3\theta} (X_x + Y_y + Z_z) \right] \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial Y_z}{\partial x} - \frac{\partial X_z}{\partial y} + \frac{\partial Y_x}{\partial z} \right] & \text{u. s. w. } ^1) \end{cases}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen sind

$$3) \quad \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

¹⁾ G. Kirchhoff, 27. Vorlesung über Mechanik, Gleichungen (13 und (14).

§ 2. de Saint Venant („De la Torsion des Prismes“, 1855) bedient sich einer gemischten Methode („méthode mixte“). Er definiert bekanntlich die Torsion zum Teil aus der Verschiebung der Punkte des Zylinders, zum Teil aus den wirkenden Kräften, läßt aber beide zum Teil noch unbestimmt und kommt in dieser Weise zu einem System von Kräften und Verschiebungen, welche den Gleichungen (1) und (3) genügen. Diese Methode wird fast allgemein angewendet.¹⁾

Es muß bemerkt werden, daß es von vornherein nicht klar ist, ob die gestellten Bedingungen zu einem solchen System von Kräften und Verschiebungen führen können; erst die Ausführung der Berechnung lehrt, daß dies der Fall ist, und zwar zeigen sich die Kräfte und Verschiebungen eindeutig bestimmt, sobald eine Konstante (der Drehungswinkel pro Längeneinheit) gegeben ist; die genannten Größen sind dieser Konstante proportional.

In dieser anfänglichen Ungewißheit liegt indessen kein Grund, die Saint-Venantsche Methode zu tadeln. Die Bedingungen so zu stellen, daß es ohne jede Berechnung einleuchtet, daß man deren weder zu viele noch zu wenige genommen hat, und daß zwischen ihnen nach den Gleichungen (1) und (3) kein Widerspruch besteht, ist unmöglich. Diese anfängliche Ungewißheit besteht auch bei der Kirchhoffschen Methode, nach der übrigens Torsion und Biegung weder definiert noch voneinander getrennt werden.²⁾

§ 3. Die Saint-Venantsche Methode hat vor der Kirchhoffschen den Vorteil der größeren Anschaulichkeit. Man

1) Z. B. von Lord Kelvin u. P. G. Tait, *Treatise on Natural Philosophy*, 1895 (§ 706 und § 707); auch von Riemann-Weber, *Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik*, 1901 (II. § 70).

2) 27. Vorlesung § 4. Kirchhoff betrachtet erst einen willkürlichen Körper und setzt

$$X_x = 0, \quad X_y = 0, \quad Y_y = 0.$$

Dann sagt er: „Nun wollen wir annehmen, daß der Körper, um den es sich handelt, durch eine der Z-Achse parallele Zylinderfläche und zwei senkrechte Querschnitte begrenzt ist, und wollen die aufgestellten Formeln dem Falle *anzupassen suchen*, daß die Zylinderfläche frei von jedem Drucke ist.“

kann versuchen, ohne diesen Vorteil preiszugeben, die Kräfte — wie es bei Kirchhoff der Fall ist — mehr in den Vordergrund treten zu lassen. Gelingt es, die Torsion aus den wirkenden Kräften zu definieren, so erhält man die Verschiebungen aus den Gleichungen (1) durch Integration.

Wir wollen die Torsion eines isotropen und homogenen Zylinders, dessen Endflächen zu den erzeugenden Geraden senkrecht stehen, folgendermaßen zu definieren versuchen. Einen solchen Zylinder „tordieren“ soll heißen: auf die Endflächen dieses Zylinders konstante Kräfte ausüben, 1. welche auf diese Flächen in tangentieller Richtung wirken, 2. welche für beide Flächen in korrespondierenden Punkten entgegengesetzt gleichen Wert haben und auch in einem willkürlichen senkrechten Querschnitt in den korrespondierenden Punkten gleiche Spannungen, sonst aber keine Spannungen hervorrufen, 3. deren Resultante für jede Endfläche gleich Null ist. Überdies müssen die Kräfte den Gleichungen (2) und (3) genügen.

Die Z -Achse sei den erzeugenden Geraden des Zylinders parallel.

Nach 1. und 2. existieren nur die Kräfte X_z , Y_z , und selbstverständlich Z_x , Z_y .

Nach 2. sind diese Kräfte Funktionen von x und y , nicht von z .

Auf die Zylinderfläche wirken keine Kräfte. Ist n eine Normale zu dieser Fläche, so hat man folglich die drei Gleichungen

$$(4) \quad X_n = X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz = 0 \text{ etc.},$$

welche in die eine Gleichung

$$(5) \quad Z_x \cos nx + Z_y \cos ny = 0$$

übergehen.

Die Bedingung 3. ergibt die Gleichungen

$$(6) \quad \begin{cases} \int X_x dx dy = 0, \\ \int Y_x dx dy = 0, \end{cases}$$

in welchen die Integrationen über den Querschnitt auszu-dehnen sind.

Die Gleichungen (2) gehen über in die eine Gleichung

$$(7) \quad \frac{\partial Y_z}{\partial x} - \frac{\partial X_z}{\partial y} = P,$$

in welcher P eine Konstante ist.

Die Gleichungen (3) ergeben noch die Gleichung

$$(8) \quad \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} = 0.$$

Es zeigt sich nun, daß man die Gleichungen (5), (6), (7), (8) befriedigen kann, indem man setzt

$$(9) \quad \begin{cases} X_z = Z_x = -\frac{\partial F}{\partial y}, \\ Y_z = Z_y = +\frac{\partial F}{\partial x}, \end{cases}$$

$$(10) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = P,$$

und an der Kontur des Querschnittes

$$(11) \quad F = \text{konst.}^1).$$

F ist eine Funktion von x und y .

Diese Lösung ist die einzige. Mathematisch ist das Problem folgendes: die Gleichung der Kontur soll in eine Form (11) gebracht werden, wobei die Funktion F der Gleichung (10) genügt. Bei gegebener Kontur hat F/P einen vollkommen bestimmten Wert. Die Kräfte erhält man dann aus (9).

§ 4. Die Gleichungen (6) erweisen sich als überflüssig, indem die allgemeinste Form der Werte von X_z und Y_z , die der Gleichung (8) genügen, die in (9) geschriebene Form ist, und die Gleichung (11) dann aus der Gleichung (5) folgt: aus den Gleichungen (9) und (11) aber ergeben sich die Gleichungen (6). Ebenso ist überflüssig die Bedingung, daß die Kräfte X_z und Y_z in jedem Querschnitt die gleichen sein sollen, indem aus den Gleichungen (3) die beiden Gleichungen

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

welche die Unabhängigkeit der Spannungen von z ausdrücken, folgen. Um die Gleichungen (9), (10) und (11) zu erhalten,

1) Gleichungen von der Form (9) und (11) finden sich bei W. Voigt, Wied. Ann. 16. p. 297. 1882; Wied. Ann. 29. p. 606. 1886.

kann man also folgendermaßen definieren. Den Zylinder „tordieren“ soll heißen: einen Gleichgewichtszustand des Zylinders hervorbringen, in welchem ausschließlich auf die Endflächen des Zylinders Kräfte ausgeübt werden, und zwar Kräfte, 1. welche auf diese Flächen in tangentieller Richtung wirken, 2. welche in jedem senkrechten Querschnitt Spannungen erzeugen, die ebenso in tangentieller Richtung wirken, sonst aber keine Spannungen.

Es fehlt hier allerdings die Anschaulichkeit. Charakteristisch erscheint bei dem Begriff „tordieren“ die Vorstellung, daß die an einem Ende wirkenden Kräfte keine Resultante, sondern nur ein Moment haben. Diese Vorstellung darf jedoch nach dem vorher Gesagten in der Definition, die ja nichts Überflüssiges enthalten soll, nicht explizit zum Ausdruck gebracht werden. Sie paßt nur in einer *Beschreibung* der Torsion, wie dieselbe in der angeblichen Definition des § 3 enthalten ist.

§ 5. Aus den Gleichungen (1) folgt nun

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{1}{x} \frac{\partial F}{\partial y}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = +\frac{1}{x} \frac{\partial F}{\partial x}. \end{array} \right.$$

Hieraus folgt, wenn der Querschnitt in der XY -Fläche nicht gedreht wird und die Z -Achse fest ist,

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = -\omega y z, \\ \eta = \omega x z, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \omega y - \frac{1}{x} \frac{\partial F}{\partial y}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\omega x + \frac{1}{x} \frac{\partial F}{\partial x}, \\ \omega = \frac{P}{2x}. \end{array} \right.$$

Die Gleichungen (14) zeigen, daß alle Punkte desselben Querschnittes — wie de St. Venant es fordert — um denselben Winkel gedreht werden. Der Drehungswinkel pro Längeneinheit ist ω . Die Deformation des Querschnittes ist durch $\partial \zeta / \partial x$ und $\partial \zeta / \partial y$ bestimmt.

§ 6. Die hier benutzte Methode hat vor der St. Venantschen Methode folgende drei Vorzüge:

a) Sie ist einigermaßen einfacher. Bei der Torsion eines Zylinders mit elliptischem Querschnitt z. B. ist die Funktion F ohne weiteres bekannt.

b) In den St. Venantschen Gleichungen kommt nicht unmittelbar die Tatsache zum Ausdruck, daß die tordierenden Kräfte nie eine von Null verschiedene Resultante haben können. de St. Venant selbst hat diese Tatsache übersehen: das geht hervor aus einer Anmerkung zu § 105 seines Werkes. Der gleiche Irrtum findet sich bei Riemann-Weber.

c) Aus den Gleichungen (13) ergibt sich, daß die Deformation, wenn die Konstante ω gegeben ist, für jeden Zylinder eindeutig bestimmt ist. Die Annahme, daß die Z -Achse und nicht eine ihr parallele Achse festgehalten wurde, war also eine unwesentliche. Aus den St. Venantschen Gleichungen dagegen ist nicht ohne weiteres zu sehen, daß die Deformation der Querschnitte von der Lage der Torsionsachse unabhängig ist. Bei Riemann-Weber findet sich zwar die richtige Bemerkung: „Durch eine Drehung des Stabes als Ganzes nach der Deformation kann man jede Längsfaser des Stabes zur Stabachse machen“, es fehlt aber der Beweis.

Straßburg i. E.

(Eingegangen 15. Mai 1904.)