ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o. 767.

Ueber die Bestimmung einer Cometenbahn aus geocentrischen Beobachtungen,
von Dr. William Charles Goetze.
(Fortsetzung von Nr. 766.)

§ 25.

Bestimmung von h und H .

Vernachlässigt man in den Ausdrücken unter (277) die zweiten und höheren Potenzen von δ , so folgt unmittelbar, dass:

$$\left. \begin{aligned} h \sin H &= \frac{3t + t^3}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2t^3 + \frac{2}{5}t^5}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \delta \\ h \cos H &= \frac{2}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(-1+2t^2)}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \delta \end{aligned} \right\} \dots\dots (286)$$

Setzt man ferner:

$$\left. \begin{aligned} h, \sin H, &= \frac{3t + t^3}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \\ h, \cos H, &= \frac{2}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (287)$$

und damit wird endlich:

$$\left. \begin{aligned} \lg h &= \lg h, + \frac{(Mod)}{h,^2} \cdot \frac{(-2 + 4t^2 + 6t^4 + \frac{16}{5}t^6 + \frac{2}{5}t^8)}{(1+t^2)^3} \cdot \delta \\ H &= H, + \frac{1}{h,^2 \sin 1'} \cdot \frac{(3t - t^3 - \frac{6}{5}t^5)}{(1+t^2)^3} \cdot \delta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (290)$$

Setzt man daher:

$$\left. \begin{aligned} h_2 &= \frac{(Mod)}{h,^2} \cdot \frac{(-2 + 4t^2 + 6t^4 + \frac{16}{5}t^6 + \frac{2}{5}t^8)}{(1+t^2)^4} \\ h_3 &= (1+t^2) \cdot \delta \\ H_2 &= \frac{1}{h,^2 \sin 1'} \cdot \frac{(3 - t^2 - \frac{6}{5}t^4)}{(1+t^2)^2} \\ H_3 &= \frac{t}{1+t^2} \cdot \delta \end{aligned} \right\} \dots\dots (291)$$

so wird man finden, dass:

$$\left. \begin{aligned} h, \sin (H, - \nu) &= \sin \frac{1}{2} \nu \\ h, \cos (H, - \nu) &= + 2 \cos \frac{1}{2} \nu \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (288)$$

oder es wird auch:

$$\left. \begin{aligned} h, &= \sqrt{\left(\frac{5 + 3 \cos \nu}{2}\right)} \\ H, &= \nu - \arctan \left(\frac{1}{2} \tan \frac{1}{2} \nu\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (289)$$

so wird endlich:

$$\left. \begin{aligned} \lg h &= \lg h, + h_2 \cdot h_3 \\ H &= H, + H_2 \cdot H_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (292)$$

wo h_2 , h_3 , H_2 , H_3 durch folgende Ausdrücke näher bestimmt werden, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} h_2 &= -\frac{(Mod)}{320 h,^2} \cdot (5 + 328 \cos \nu + 244 \cos 2\nu + 56 \cos 3\nu + 7 \cos 4\nu) \\ H_2 &= + \frac{1}{20 h,^2 \sin 1'} (11 + 42 \cos \nu + 7 \cos 2\nu) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (293)$$

$$\left. \begin{aligned} h_3 &= + \frac{1-e}{\cos^2 \frac{1}{2} \nu} \\ H_3 &= + \sin \frac{1}{2} \nu \cos \frac{1}{2} \nu (1-e) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (294)$$

§ 26.

Bestimmung von ρ und v .

Vernachlässigt man die zweiten und höheren Potenzen von δ , so folgt endlich aus den Ausdrücken unter (276) u. (278), dass:

$$\rho = \frac{t^2 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{10}t^6}{(1+t^2)} + \frac{\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{5}t^6 - \frac{1}{14}t^8}{(1+t^2)} \cdot \delta \dots\dots\dots(295)$$

$$v = \frac{\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^3 - \frac{2}{5}t^5}{(1+t^2)^2} + \frac{\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}t^3 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{35}t^7}{(1+t^2)^2} \cdot \delta \dots\dots\dots(296)$$

oder wenn man:

$$\rho_i = \frac{1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{10}t^4}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{40}(19 + 18 \cos \nu + 3 \cos 2\nu) \dots\dots\dots(297), \text{ und}$$

$$v_i = \frac{\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^3 - \frac{2}{5}t^5}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{40}(-1 + 18 \cos \nu + 3 \cos 2\nu) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\nu \dots\dots\dots(298)$$

setzt, so wird:

$$\rho = \rho_i t^2 (1+t^2) \left(1 + \frac{\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{5}t^6 - \frac{1}{14}t^8}{\rho_i (1+t^2)^2} \cdot \delta\right) \dots\dots\dots(299), \text{ und}$$

$$v = v_i + \frac{\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}t^3 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{35}t^7}{(1+t^2)^2} \cdot \delta \dots\dots\dots(300)$$

Setzt man ferner:

$$\left. \begin{aligned} \rho_2 &= \frac{(Mod)}{\rho_i} \cdot \frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}t^4 - \frac{1}{14}t^6)}{(1+t^2)^3} \\ \rho_3 &= (1+t^2) \cdot \delta \\ v_2 &= \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}t^2 - \frac{2}{5}t^4 + \frac{1}{35}t^6}{(1+t^2)^3} \\ v_3 &= t(1+t^2) \cdot \delta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(301)$$

so wird endlich:

$$\operatorname{tg} \rho = \operatorname{tg} \left\{ \rho_i \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\nu}{\cos^2 \frac{1}{2}\nu} \right\} + \rho_2 \cdot \rho_3 \dots\dots\dots(302)$$

$$v = v_i + v_2 \cdot v_3 \dots\dots\dots(303)$$

wo also ρ_2 , ρ_3 , v_2 und v_3 folgende Werthe haben werden:

$$\left. \begin{aligned} \rho_2 &= + \frac{(Mod)}{1120 \rho_i} \cdot (136 + 307 \cos \nu + 104 \cos 2\nu + 13 \cos 3\nu) \\ \rho_3 &= + \frac{1-e}{\cos^2 \frac{1}{2}\nu} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(304)$$

$$\left. \begin{aligned} v_2 &= + \frac{1}{2240} (104 + 243 \cos \nu + 208 \cos 2\nu + 5 \cos 3\nu) \\ v_3 &= + \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\nu (1-e)}{\cos^2 \frac{1}{2}\nu} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(305)$$

§ 27.

Über die Bestimmung der Auxiliar-Werthe g , G , h , H , ρ und v für die Parabel, sowie für den Übergang von einer Parabel auf eine elliptische oder hyperbolische Bahn.

Bei der Bestimmung einer scharfen Parabel, sowie auch bei dem Uebergange von einer Parabel auf eine elliptische oder hyperbolische Bahn, nehmen die Werthe g , G , h , H , ρ und v eine sehr einfache Gestalt an, indem nämlich in diesem Falle:

$$\left. \begin{aligned} g &= g_i = 1 \\ G &= G_i = \nu \\ h &= h_i \\ H &= H_i \\ \rho &= \rho_i \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\nu}{\cos^2 \frac{1}{2}\nu} \\ v &= v_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(306)$$

wird, und die Formeln unter (249) und (250) verwandeln sich alsdann, mit Rücksicht auf (258) und (262), in folgende:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\sin(\nu'' - \nu')}{\sin(\nu'' - \nu)} \cdot \cos r \delta + \lambda \cdot \varepsilon \\ \beta &= \frac{r'}{q} \left\{ \mathfrak{F} \cos r \delta + (\frac{1}{2} + \varepsilon') \lambda \right\} \\ \gamma &= \frac{r' \sin(\nu'' - \nu')}{r \sin(\nu'' - \nu)} \cdot \cos w \delta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(307)$$

und ebenso:

$$\left. \begin{aligned} \alpha'' &= \frac{\sin(\nu' - \nu)}{\sin(\nu'' - \nu)} \cdot \cos r'' \delta'' - \lambda'' \cdot \varepsilon \\ \beta'' &= \frac{r'}{q} \left\{ \mathfrak{F}'' \cos r'' \delta'' + (\frac{1}{2} - \varepsilon') \cdot \lambda'' \right\} \\ \gamma'' &= \frac{r' \sin(\nu' - \nu)}{r'' \sin(\nu'' - \nu)} \cdot \cos w \delta'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(308)$$

wo λ , λ'' , ε und ε' folgende Bedeutung haben, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \mathfrak{C} \cos r \mathfrak{d} + \frac{q}{r} \cos \mathfrak{s} \mathfrak{d} \\ \lambda'' &= \mathfrak{C}'' \cos r'' \mathfrak{d}'' + \frac{q''}{r''} \cos \mathfrak{s}'' \mathfrak{d}'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (309)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\rho' - \frac{\sin(\nu'' - \nu')}{\sin(\nu'' - \nu)} \cdot \rho - \frac{\sin(\nu' - \nu)}{\sin(\nu'' - \nu)} \cdot \rho''}{\mathfrak{C} \rho - \mathfrak{C}'' \rho'' + \nu' - \nu''} \\ \varepsilon' &= \frac{\nu' - \frac{1}{2} \nu - \frac{1}{2} \nu'' - \mathfrak{C} \rho - \mathfrak{C}'' \rho''}{\mathfrak{C} \rho - \mathfrak{C}'' \rho'' + \nu' - \nu''} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (310)$$

und $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}''$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}''$, $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}''$ durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{C} &= + \frac{h' \cos(H' - \nu'') \cos \frac{1}{2} \nu - h'' \cos(H'' - \nu'') \cos \frac{1}{2} \nu''}{\sin(\nu'' - \nu)} \\ \mathfrak{C}'' &= + \frac{h' \cos(H' - \nu) \cos \frac{1}{2} \nu - h'' \cos(H'' - \nu) \cos \frac{1}{2} \nu''}{\sin(\nu'' - \nu)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (311)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= - \frac{h' \cos(H' - \nu'') \cos \frac{1}{2} \nu' - \frac{1}{2} h' \cos(H' - \nu'') \cos \frac{1}{2} \nu - \frac{1}{2} h'' \cos(H'' - \nu'') \cos \frac{1}{2} \nu''}{\sin(\nu'' - \nu)} \\ \mathfrak{E}'' &= + \frac{h' \cos(H' - \nu) \cos \frac{1}{2} \nu' - \frac{1}{2} h' \cos(H' - \nu) \cos \frac{1}{2} \nu - \frac{1}{2} h'' \cos(H'' - \nu) \cos \frac{1}{2} \nu''}{\sin(\nu'' - \nu)} \end{aligned} \right\} \dots\dots (312)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F} &= - \frac{h' \cos(H' - \nu'') \cos \frac{1}{2} \nu' - h'' \cos(H'' - \nu'') \cos \frac{1}{2} \nu''}{\sin(\nu'' - \nu)} \\ \mathfrak{F}'' &= + \frac{h' \cos(H' - \nu) \cos \frac{1}{2} \nu' - h' \cos(H' - \nu) \cos \frac{1}{2} \nu}{\sin(\nu'' - \nu)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (313)$$

die sich aber, wenn man statt h' und H' u. s. w. zwei neue Hülfswerthe g und $\mathfrak{G}$ einführt, die so beschaffen sind, dass:

$$\left. \begin{aligned} g \sin \mathfrak{G} &= h' \sin H' \cos \frac{1}{2} \nu \\ g \cos \mathfrak{G} &= h' \cos H' \cos \frac{1}{2} \nu - 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots (314)$$

wird, noch bedeutend vereinfachen lassen; denn mit Rücksicht auf (311), (312) und (313) folgt sogleich nach einer leichten Reduction, wenn man die Werthe von g und $\mathfrak{G}$ unter (314) einführt, dass:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{C} &= \frac{g \cos(\mathfrak{G} - \nu'') - 1}{\sin(\nu'' - \nu)} \\ \mathfrak{C}'' &= \frac{1 - g'' \cos(\mathfrak{G}'' - \nu)}{\sin(\nu'' - \nu)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (315)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} g \cos(\mathfrak{G} - \nu'') - g' \cos(\mathfrak{G}' - \nu'')}{\sin(\nu'' - \nu)} \\ \mathfrak{E}'' &= - \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} g'' \cos(\mathfrak{G}'' - \nu) - g' \cos(\mathfrak{G}' - \nu)}{\sin(\nu'' - \nu)} \end{aligned} \right\} \dots\dots (316)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F} &= \frac{1 - g' \cos(\mathfrak{G}' - \nu'')}{\sin(\nu'' - \nu)} \\ \mathfrak{F}'' &= \frac{g' \cos(\mathfrak{G}' - \nu) - 1}{\sin(\nu'' - \nu)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (317)$$

und zugleich ist auch:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{C} &= \mathfrak{F} + \frac{1}{2} \mathfrak{E} \\ \mathfrak{C}'' &= \mathfrak{F}'' + \frac{1}{2} \mathfrak{E}'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (318)$$

welche Form zur Bestimmung von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}''$ jedenfalls die bequemste ist, da man die Grössen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}''$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}''$ doch berechnen muss.

§ 28.

Bestimmung von g und $\mathfrak{G}$.

Im vorigen Paragraphen sind soeben zwei neue Auxiliar-Werthe eingeführt worden, die dadurch bestimmt sind, dass:

$$\left. \begin{aligned} g \sin \mathfrak{G} &= h' \sin H' \cos \frac{1}{2} \nu \\ g \cos \mathfrak{G} &= h' \cos H' \cos \frac{1}{2} \nu - 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots (319)$$

aber mit Rücksicht auf die Ausdrücke unter (287) in § 25 folgt sogleich:

$$\left. \begin{aligned} g \sin \mathfrak{G} &= \frac{3t + t^3}{(1+t^2)^2} \\ g \cos \mathfrak{G} &= \frac{1-2t^2-t^4}{(1+t^2)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (320)$$

und daraus nach einer einfachen Reduction, dass:

$$\left. \begin{aligned} g \sin(\mathfrak{G} - \nu) &= \frac{1}{2} \sin \nu \\ g \cos(\mathfrak{G} - \nu) &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (321)$$

oder auch:

$$\left. \begin{aligned} g &= \sqrt{\left(\frac{9 - \cos 2\nu}{8}\right)} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} \sin^2 \nu} \\ \mathfrak{G} &= \nu + \arctan \left(\frac{1}{2} \tan \nu\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots (322)$$

welche Ausdrücke zur Bestimmung von g u. $\mathfrak{G}$ sehr einfach sind.

§ 29.

Construction der Hülftafeln (II) und (III).

Stellt man die Resultate von §§ 24, 25, 26 und 28 zusammen, so erhält man zuerst:

$$\left. \begin{aligned} g \sin (\mathfrak{G}-\nu) &= \frac{1}{2} \sin \nu \\ g \cos (\mathfrak{G}-\nu) &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (323)$$

$$\left. \begin{aligned} h_1 \sin (H_1-\nu) &= -\sin \frac{1}{2} \nu \\ h_1 \cos (H_1-\nu) &= +2 \cos \frac{1}{2} \nu \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (324)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{40} (19 + 18 \cos \nu + 3 \cos 2 \nu) \\ v_1 &= \frac{1}{40} (-1 + 18 \cos \nu + 3 \cos 2 \nu) \lg \frac{1}{2} \nu \end{aligned} \right\} \dots\dots (325)$$

$$g_2 = -\frac{(\text{Mod})}{80} \cdot (82 + 109 \cos \nu + 42 \cos 2 \nu + 7 \cos 3 \nu) \left. \vphantom{\frac{(\text{Mod})}{80}} \right\} \dots\dots\dots (326)$$

$$G_2 = -\frac{1}{80 \sin 1'} \cdot (60 + 65 \cos \nu + 28 \cos 2 \nu + 7 \cos 3 \nu)$$

$$h_2 = -\frac{(\text{Mod})}{320 h_1^2} \cdot (5 + 328 \cos \nu + 244 \cos 2 \nu + 56 \cos 3 \nu + 7 \cos 4 \nu) \left. \vphantom{\frac{(\text{Mod})}{320 h_1^2}} \right\} \dots\dots\dots (327)$$

$$H_2 = +\frac{1}{20 h_1^2 \sin 1'} \cdot (11 + 42 \cos \nu + 7 \cos 2 \nu)$$

$$\rho_2 = +\frac{(\text{Mod})}{1120 \rho_1} \cdot (136 + 307 \cos \nu + 104 \cos 2 \nu + 13 \cos 3 \nu) \left. \vphantom{\frac{(\text{Mod})}{1120 \rho_1}} \right\} \dots\dots\dots (328)$$

$$v_2 = +\frac{1}{2240} \cdot (104 + 243 \cos \nu + 208 \cos 2 \nu + 5 \cos 3 \nu)$$

die ebenfalls von mir mit 7 stelligen Logarithmen scharf berechnet wurden, aber nur auf 5 Stellen angegeben worden sind.

Will man sich nun die Grössen g , G , h , H , ρ und v für irgend eine bestimmte gegebene wahre Anomalie ν berechnen, so sucht man zuerst:

für die Ellipse.

für die Hyperbel.

$$\left. \begin{aligned} g_3 &= +\frac{\lg^2 \frac{1}{2} \nu}{\cos^2 \frac{1}{2} \nu} (1-e) &= -\frac{\lg^2 \frac{1}{2} \nu}{\cos^2 \frac{1}{2} \nu} (e-1) \\ G_3 &= +\frac{\lg \frac{1}{2} \nu}{\cos^2 \frac{1}{2} \nu} (1-e) &= -\frac{\lg \frac{1}{2} \nu}{\cos^2 \frac{1}{2} \nu} (e-1) \\ h_3 &= +\frac{1-e}{\cos^2 \frac{1}{2} \nu} &= -\frac{e-1}{\cos^2 \frac{1}{2} \nu} \\ H_3 &= +\sin \frac{1}{2} \nu \cos \frac{1}{2} \nu (1-e) &= -\sin \frac{1}{2} \nu \cos \frac{1}{2} \nu (e-1) \\ \rho_3 &= +\frac{1-e}{\cos^2 \frac{1}{2} \nu} &= -\frac{e-1}{\cos^2 \frac{1}{2} \nu} \\ v_3 &= +\frac{\lg \frac{1}{2} \nu}{\cos^2 \frac{1}{2} \nu} (1-e) &= -\frac{\lg \frac{1}{2} \nu}{\cos^2 \frac{1}{2} \nu} (e-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (329)$$

und alsdann wird sogleich:

$$\left. \begin{aligned} \lg g &= 0,000000 + g_2 \cdot g_3 \\ \lg h &= \lg h_1 + h_2 \cdot h_3 \\ \lg \rho &= \lg \left\{ \frac{\rho_1 \lg^2 \frac{1}{2} \nu}{\cos^2 \frac{1}{2} \nu} \right\} + \rho_2 \cdot \rho_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (330)$$

$$\left. \begin{aligned} G &= \nu + G_2 \cdot G_3 \\ H &= H_1 + H_2 \cdot H_3 \\ v &= v_1 + v_2 \cdot v_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (331)$$

wo h_1 , ρ_1 , H_1 und v_1 unmittelbar aus der Tafel (II) und g_2 , h_2 , ρ_2 , G_2 , H_2 und v_2 aus der Tafel (III) mit der wahren Anomalie als Argument genommen werden können.

Die Factoren von g_3 , G_3 u. s. w., welche von ν abhängen, nämlich die Werthe $\frac{\lg^2 \frac{1}{2} \nu}{\cos^2 \frac{1}{2} \nu}$, $\frac{\lg \frac{1}{2} \nu}{\cos^2 \frac{1}{2} \nu}$ u. s. w. hätten

und demzufolge findet man in der Tafel (II), am Ende dieser Abhandlung, die Werthe $\lg g$, $\mathfrak{G}$, $\lg h$, H , $\lg \rho$, und v , zusammengestellt. Diese Tafel schreitet von 30 zu 30 Bogenminuten von 0° bis 180° in der wahren Anomalie ν fort, und wurde von mir mit 7 stelligen Logarithmen scharf berechnet; die 7te Stelle wurde nach beendigter Rechnung unterdrückt. Auf die Tafel (II) folgt unmittelbar die Tafel (III), welche folgende Grössen enthält:

leicht in die Tafel (III) mit aufgenommen werden können; ich habe mich aber absichtlich des Kunstgriffs bedient, diese Factoren nicht in die Tafel (III) mit hineinzubringen, um auf solche Weise mehr gleichförmige Differenzen zu erzielen.

Für den Uebergang von der Parabel auf einen anderen naheliegenden Kegelschnitt, gestaltet sich

die Berechnung von g , h , ρ , G , H und v viel einfacher, indem alsdann $g_3 = 0$; $h_3 = 0$; $\rho_3 = 0$; $G_3 = 0$; $H_3 = 0$ und $v_3 = 0$, und daher auch für diesen Fall:

$$\left. \begin{aligned} g &= 1 \\ G &= \nu \\ h &= h_1 \\ H &= H_1 \\ \rho &= \rho_1 \frac{tg^2 \frac{1}{2} \nu}{\cos^2 \frac{1}{2} \nu} \\ v &= v_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots (332)$$

wobei man ferner, wie in § 27. gezeigt wurde, statt h , und H , die Werthe g und G mit mehr Bequemlichkeit brauchen kann. Man braucht also für diesen Fall, welcher der in der Praxis am häufigsten vorkommende ist, nur die Tafel (II), ohne Rücksicht auf die Tafel (III), anzuwenden, wodurch also die Rechnung ungemein vereinfacht wird.

Für die Berechnung einer scharfen Parabel, werden endlich nur die beiden Hülfswerthe g und G erfordert, welche in denen unter O bezeichneten Spalten der Tafel (II) zu finden sind.

Die Bestimmung der obigen Hülfswerthe, für Anomalien, die grösser wie 180° sind, ist sehr einfach, indem man solche Anomalien nur von 360° abziehen braucht, und hiermit ebenso verfährt, als wenn die Anomalien positiv und kleiner wie 180° wären, man hat alsdann nur darauf zu achten, dass die drei Werthe G , H und v mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen sind, während die Werthe g , h und ρ ganz unverändert bleiben. Da bei den später am Ende dieser Abhandlung folgenden Tafeln eine besondere Erklärung und zugleich mehrere Rechnungsbeispiele gegeben werden sollen, so genügen die hier gegebenen Notizen über die nähere Bedeutung der Auxiliarwerthe g , G , h , H , ρ und v , zum Verständniss der später folgenden Anwendung derselben in der Rechnung vollständig, und es würde daher überflüssig sein, sich weiter bei denselben aufzuhalten. Uebrigens wäre es auch leicht gewesen, die obigen Auxiliarwerthe nach der wahren parabolischen Anomalie als Argument fortschreiten zu lassen, indem die hierzu erforderliche Umformung der Ausdrücke in §§. 23–26, nach dem von mir im Ergänzungshelte Seite 206–210 gegebenen sehr allgemeinen Theorem, auf die einfachste Weise geschehen kann; es wäre aber dadurch nichts gewonnen worden, indem die Anomalie ν in dem jedesmalig zu berechnenden Kegelschnitte schon immer bekannt sein wird, wenn man zur Bestimmung der Auxiliar-Werthe selbst, übergehen will.

§ 30.

Über die Variation der Chorde k , nach zwei vollständigen geocentrischen Örtern eines Himmelskörpers im Raume.

Es ist früher in § 9. Formel 22 gezeigt worden, dass:

$$k^2 = r^2 + r''^2 - 2rr'' \cos(\nu'' - \nu) \dots\dots\dots (333)$$

woraus durch Differenziation folgt, dass:

$$k \delta k = (r - r'' \cos(\nu'' - \nu)) \delta r + (r'' - r \cos(\nu'' - \nu)) \delta r'' + r'' r \sin(\nu'' - \nu) \delta(\nu'' - \nu) \dots\dots\dots (334)$$

Setzt man nun:

$$\left. \begin{aligned} r'' \sin(\nu'' - \nu) &= k \sin U \\ r - r'' \cos(\nu'' - \nu) &= k \cos U \end{aligned} \right\} \dots\dots (335)$$

$$\left. \begin{aligned} r \sin(\nu'' - \nu) &= k \sin U'' \\ r'' - r \cos(\nu'' - \nu) &= k \cos U'' \end{aligned} \right\} \dots\dots (336)$$

so werden $360^\circ - U$ und U'' die Winkel am Cometen, in dem Dreiecke sein, welches durch die Seiten r , r'' und k gebildet wird, so dass man folglich auch haben wird:

$$180^\circ + U'' + \nu'' = U + \nu \dots\dots\dots (337)$$

oder wenn man die Richtung von k durch ξ bezeichnet, und unsere frühere Bezeichnungsweise beibehält, so folgt auch, dass:

$$\left. \begin{aligned} \xi r &= U \\ \xi r'' &= U'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (338)$$

wobei man zugleich U und U'' durch folgende Formeln bestimmen kann, in denen $\nu'' - \nu$ nicht explicite vorkommt, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} U &= + \frac{\sqrt{[(r'' + r - k)(r'' - r + k)]}}{2 \sqrt{(rk)}} \\ \cos \frac{1}{2} U &= - \frac{\sqrt{[(r + k + r'')(r + k - r'')]}{2 \sqrt{(rk)}} \\ tg \frac{1}{2} U &= - \sqrt{\frac{(r'' + r - k)(r'' - r + k)}{(r'' + r + k)(r + k - r'')}} \end{aligned} \right\} \dots\dots (339)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} U'' &= + \frac{\sqrt{[(r + r'' - k)(r - r'' + k)]}}{2 \sqrt{(r''k)}} \\ \cos \frac{1}{2} U'' &= + \frac{\sqrt{[(r'' + r + k)(r'' + k - r)]}}{2 \sqrt{(r''k)}} \\ tg \frac{1}{2} U'' &= + \sqrt{\frac{(r + r'' - k)(r - r'' + k)}{(r'' + r + k)(r'' + k - r)}} \end{aligned} \right\} \dots\dots (340)$$

Aus der Formel (334) folgt aber, mit Rücksicht auf (335) und (336), dass:

$$\delta k = \cos U \delta r + \cos U'' \delta r'' + r'' \sin U'' \delta(\nu'' - \nu) \dots\dots (341)$$

wobei ferner zu bemerken ist, dass:

$$r \sin U = - r'' \sin U'' \dots\dots\dots (342)$$

und also auch, dass:

$$r \sin \xi r = - r'' \sin \xi r'' \dots\dots\dots (343)$$

Erinnert man sich nun, dass:

$$\delta r = \delta A \text{ nach § 18. Formel (122)}$$

$$\delta r'' = \delta A'' \text{ nach § 18. Formel (127) und}$$

$$\delta(\nu'' - \nu) = \frac{\delta B''}{r''} - \frac{\delta B}{r} \text{ nach § 18. Formel (162),}$$

so folgt aus (341) mit Rücksicht auf (338) und (343):

$$\delta k = \cos \mathfrak{f} r \cdot \delta A + \sin \mathfrak{f} r \cdot \delta B + \cos \mathfrak{f} r'' \cdot \delta A'' + \sin \mathfrak{f} r'' \cdot \delta B'' \dots\dots\dots (344)$$

Nun ist aber die Richtung, welche auf r senkrecht steht, und

$$\delta k = \Delta \cos \mathfrak{f} f \cos b \cdot \delta l + \Delta \cos \mathfrak{f} e \cdot \delta b + \cos \mathfrak{f} d \cdot \delta \Delta + \Delta'' \cos \mathfrak{f} f'' \cos b'' \cdot \delta l'' + \Delta'' \cos \mathfrak{f} e'' \cdot \delta b'' + \cos \mathfrak{f} d'' \cdot \delta \Delta'' \dots (347)$$

indem nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \cos \mathfrak{f} f &= \cos \mathfrak{f} r \cos r f + \cos \mathfrak{f} \mathfrak{s} \cos \mathfrak{s} f + \cos \mathfrak{f} w \cos w f = \cos r f \cos U + \cos \mathfrak{s} f \sin U \\ \cos \mathfrak{f} e &= \cos \mathfrak{f} r \cos r e + \cos \mathfrak{f} \mathfrak{s} \cos \mathfrak{s} e + \cos \mathfrak{f} w \cos w e = \cos r e \cos U + \cos \mathfrak{s} e \sin U \\ \cos \mathfrak{f} d &= \cos \mathfrak{f} r \cos r d + \cos \mathfrak{f} \mathfrak{s} \cos \mathfrak{s} d + \cos \mathfrak{f} w \cos w d = \cos r d \cos U + \cos \mathfrak{s} d \sin U \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (348)$$

u. s. w. u. s. w. u. s. w.

wobei man sich ferner zur Bestimmung der Hülfswinkel $r f$, $\mathfrak{s} f$, $r e$ etc., der Formeln (272), (273) und (274) in § 22. bedienen kann, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \cos r f &= \sin w f \sin M \\ \cos \mathfrak{s} f &= \sin w f \cos M \\ \cos r e &= \sin w e \sin N \\ \cos \mathfrak{s} e &= \sin w e \cos N \\ \cos r d &= \sin w d \sin P \\ \cos \mathfrak{s} d &= \sin w d \cos P \\ \cos r'' f'' &= \sin w'' f'' \sin M'' \\ \cos \mathfrak{s}'' f'' &= \sin w'' f'' \cos M'' \\ \cos r'' e'' &= \sin w'' e'' \sin N'' \\ \cos \mathfrak{s}'' e'' &= \sin w'' e'' \cos N'' \\ \cos r'' d'' &= \sin w'' d'' \sin P'' \\ \cos \mathfrak{s}'' d'' &= \sin w'' d'' \cos P'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (349)$$

wo die Hülfswinkel M , N , P und M'' , N'' , P'' , durch die Formeln (269), (270) und (271) in § 22 näher zu bestimmen sind. Substituiert man nun die Werthe unter (349) und (350) in (348), so folgt ferner:

$$\left. \begin{aligned} \cos \mathfrak{f} f &= \sin w f \sin (M + U) \\ \cos \mathfrak{f} e &= \sin w e \sin (N + U) \\ \cos \mathfrak{f} d &= \sin w d \sin (P + U) \\ \cos \mathfrak{f} f'' &= \sin w'' f'' \sin (M'' + U'') \\ \cos \mathfrak{f} e'' &= \sin w'' e'' \sin (N'' + U'') \\ \cos \mathfrak{f} d'' &= \sin w'' d'' \sin (P'' + U'') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (351)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \mathfrak{f} f'' &= \sin w'' f'' \sin (M'' + U'') \\ \cos \mathfrak{f} e'' &= \sin w'' e'' \sin (N'' + U'') \\ \cos \mathfrak{f} d'' &= \sin w'' d'' \sin (P'' + U'') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (352)$$

zugleich in der Bahnebene liegt, schon früher in § 18. mit $\mathfrak{s}$ bezeichnet worden, und es wird daher:

$$\mathfrak{f} \mathfrak{s} = r \mathfrak{s} - \mathfrak{f} r = 90^\circ - \mathfrak{f} r \dots\dots\dots (345)$$

mithin hat man:

$$\cos \mathfrak{f} \mathfrak{s} = \sin \mathfrak{f} r \dots\dots\dots (346)$$

und wenn man zugleich bedenkt, dass $\mathfrak{f} w = 90^\circ$, und also auch, dass $\cos \mathfrak{f} w = 0$, so folgt aus der Formel (344), mit Rücksicht auf die Ausdrücke für δA , δB , $\delta A''$ und $\delta B''$ in § 18. Formeln 123 und 128, dass:

und damit hat man endlich für die totale Variation der Chorde k , nach den beiden geocentrischen Oertern l , b , Δ , und l'' , b'' , Δ'' , folgenden einfachen Ausdruck, nämlich:

$$\delta k = \Delta \sin w f \sin (M + U) \cos b \cdot \delta l + \Delta \sin w e \sin (N + U) \cdot \delta b + \sin w d \sin (P + U) \cdot \delta \Delta + \Delta'' \sin w'' f'' \sin (M'' + U'') \cos b'' \cdot \delta l'' + \Delta'' \sin w'' e'' \sin (N'' + U'') \cdot \delta b'' + \sin w'' d'' \sin (P'' + U'') \cdot \delta \Delta'' \dots\dots\dots (353)$$

Es wird hier zugleich der passende Ort sein, die Bemerkung zu machen, dass die in § 9 unter (33) und (34) eingeführten Hülfswinkel ψ und ψ'' , die folgende geometrische Bedeutung haben, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \mathfrak{f} d \\ \psi'' &= \mathfrak{f} d'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (354)$$

welches leicht zu erweisen ist, denn da nach § 9. Formeln (35) und (36):

$$\left. \begin{aligned} \cos \psi &= \left(\frac{dk}{d\Delta} \right) = \frac{E + \Delta}{k} \\ \cos \psi'' &= \left(\frac{dk}{d\Delta''} \right) = \frac{E'' + \Delta''}{k} \end{aligned} \right\} \dots\dots (355)$$

so folgt auch mit Rücksicht auf (347), dass:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dk}{d\Delta} \right) &= \cos \psi = \cos \mathfrak{f} d = \sin w d \sin (P + U) = \frac{E + \Delta}{k} \\ \left(\frac{dk}{d\Delta''} \right) &= \cos \psi'' = \cos \mathfrak{f} d'' = \sin w'' d'' \sin (P'' + U'') = \frac{E'' + \Delta''}{k} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (356)$$

woraus unter anderen auch deutlich hervorgeht, dass:

$$\psi = \mathfrak{f} d \text{ und } \psi'' = \mathfrak{f} d''$$

§ 31.

Über die Variation der verfloßenen Zeit in der Parabel, nach zwei vollständigen, geocentrischen Örtern eines Cometen im Raume.

1) Wir haben schon früher § 13. Formel 71 gesehen, dass:

$$\delta \theta = \lambda \sin \frac{1}{2} \varphi \cdot \delta(r'' + r) + \lambda \cos \frac{1}{2} \varphi \cdot \delta k \dots \dots \dots (361)$$

wo $\theta = \lg \text{brig}(\tau'' - \tau)$ und $\lambda = \{1,1011729\} \cdot \frac{\sqrt{(r'' + r)}}{\tau'' - \tau}$ gesetzt worden ist. Es ist aber zufolge der Gleichungen 123 und 128 in § 18, wenn man sich erinnert, dass $\delta A = \delta r$ und $\delta A'' = \delta r''$ ist:

$$\delta(r'' + r) = \Delta \cos rf \cos b \cdot \delta l + \Delta \cos re \cdot \delta b + \cos rd \cdot \delta \Delta + \Delta'' \cos r''f'' \cos b'' \cdot \delta l'' + \Delta'' \cos r''e'' \cdot \delta b'' + \cos r''d'' \cdot \delta \Delta'' \quad (362)$$

und ebenso nach (347) in § 30:

$$\delta k = \Delta \cos f'f \cdot \cos b \cdot \delta l + \Delta \cos f'e \cdot \delta b + \cos f'd \cdot \delta \Delta + \Delta'' \cos f''f'' \cos b'' \cdot \delta l'' + \Delta'' \cos f''e'' \cdot \delta b'' + \cos f''d'' \cdot \delta \Delta'' \dots (363)$$

mithin hat man durch Substitution dieser Werthe in (361):

$$\delta \theta = \lambda \Delta (\cos rf \sin \frac{1}{2} \varphi + \cos f'f \cos \frac{1}{2} \varphi) \cos b \cdot \delta l + \lambda \Delta (\cos re \sin \frac{1}{2} \varphi + \cos f'e \cos \frac{1}{2} \varphi) \cdot \delta b + \lambda (\cos rd \sin \frac{1}{2} \varphi + \cos f'd \cos \frac{1}{2} \varphi) \delta \Delta + \lambda \Delta'' (\cos r''f'' \sin \frac{1}{2} \varphi + \cos f''f'' \cos \frac{1}{2} \varphi) \cos b'' \cdot \delta l'' + \lambda \Delta'' (\cos r''e'' \sin \frac{1}{2} \varphi + \cos f''e'' \cos \frac{1}{2} \varphi) \cdot \delta b'' + \lambda (\cos r''d'' \sin \frac{1}{2} \varphi + \cos f''d'' \cos \frac{1}{2} \varphi) \cdot \delta \Delta'' \dots (364)$$

Setzt man nun:

$$\left. \begin{aligned} \pi \sin \Pi &= \sin U \cos \frac{1}{2} \varphi \\ \pi \cos \Pi &= \sin \frac{1}{2} \varphi + \cos U \cos \frac{1}{2} \varphi \\ \pi^2 &= 1 + \sin \varphi \cos U \end{aligned} \right\} \dots (365)$$

$$\left. \begin{aligned} \pi'' \sin \Pi'' &= \sin U'' \cos \frac{1}{2} \varphi \\ \pi'' \cos \Pi'' &= \sin \frac{1}{2} \varphi + \cos U'' \cos \frac{1}{2} \varphi \\ \pi''^2 &= 1 + \sin \varphi \cos U'' \end{aligned} \right\} \dots (366)$$

so folgt endlich aus der Formel (364), wenn man gehörige Rücksicht auf die Bedeutung von rf, re etc. unter (349), (350), (351) und (352) nimmt, dass:

$$\delta \theta = \lambda \pi \Delta \sin wf \sin (M + \Pi) \cos b \cdot \delta l + \lambda \pi \Delta \sin we \sin (N + \Pi) \cdot \delta b + \lambda \pi \sin wd \sin (P + \Pi) \cdot \delta \Delta + \lambda \pi'' \Delta'' \sin w''f'' \sin (M'' + \Pi'') \cos b'' \cdot \delta l'' + \lambda \pi'' \Delta'' \sin w''e'' \sin (N'' + \Pi'') \cdot \delta b'' + \lambda \pi'' \sin w''d'' \sin (P'' + \Pi'') \cdot \delta \Delta'' \dots (367)$$

durch welche Formel die totale Variation der verfloßenen Zeit in der Parabel nach den beiden geocentrischen Örtern l, b, Δ und l'', b'', Δ'' , auf eine sehr elegante Art ausgedrückt wird.

Um die Formel (367) durch eine numerische Rechnung zu erläutern, wollen wir sie auf dieselben beiden geocentrischen Oerter als im vorigen Paragraphen anwenden, nämlich:

$\tau = 1840 \text{ Nov. } 2,0$	$\tau'' = 1841 \text{ Jan. } 21,0$
$l = 287^\circ 24' 15'' 76$	$l'' = 32^\circ 48' 34'' 22$
$b = +60 \ 53 \ 29,34$	$b'' = +12 \ 54 \ 4,17$
$\Delta = 1,0648000$	$\Delta'' = 1,3932637$
$\lg \sin wf = 9,83128$	$\lg \sin w''f'' = 9,94040$
$\lg \sin we = 9,91775$	$\lg \sin w''e'' = 9,83466$
$\lg \sin wd = 9,96611$	$\lg \sin w''d'' = 9,94410$
$M = 62^\circ 10' 36$	$M'' = 37^\circ 11' 51$
$N = 19 \ 31,56$	$N'' = 164 \ 5,40$
$P = 125 \ 43,19$	$P'' = 109 \ 27,71$
$U = 289 \ 24,10$	$U'' = 53 \ 34,70$

dabei fand sich ferner nach § 15, dass für die obigen Werthe von Δ und Δ'' :

$$\begin{aligned} \lg(r'' + r) &= 0,51254 \\ \varphi &= 28^\circ 15' 01 \\ \lg(\tau'' - \tau) &= 1,90309 \end{aligned}$$

mit welchen Werthen sich zuerst λ , und dann π, Π, π'' und Π'' nach (365) und (366) findet:

$$\begin{aligned} \lg \text{constans} &= 1,10117 \\ \lg \sqrt{(r'' + r)} &= 0,25627 \\ \text{Comp. } \lg(\tau'' - \tau) &= 8,09691 \\ \lg \lambda &= 9,45435 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg \pi \sin \Pi &= 9,96128n \\ \lg \pi \cos \Pi &= 9,75295 \\ \Pi &= 301^\circ 45' 38 \\ \lg \pi &= 0,03171 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg \pi'' \sin \Pi'' &= 9,89229 \\ \lg \pi'' \cos \Pi'' &= 9,91371 \\ \Pi'' &= 43^\circ 35' 26 \\ \lg \pi'' &= 0,05378 \end{aligned}$$

Man hat nunmehr:

$M + \Pi = 3^\circ 55' 74$	$M'' + \Pi'' = 80^\circ 46' 77$
$N + \Pi = 321 \ 16,94$	$N'' + \Pi'' = 207 \ 40,66$
$P + \Pi = 67 \ 28,57$	$P'' + \Pi'' = 153 \ 2,97$

und damit endlich nach (367):

$$\delta \theta = \{7,86748\} \delta l - \{9,22730\} \delta b + \{9,41771\} \delta \Delta + \{9,57582\} \delta l'' - \{9,15380\} \delta b'' + \{9,10854\} \delta \Delta''$$

Um den Gebrauch der Formel (353) durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir sie auf die beiden schon früher in § 8. zu Grunde gelegten Normalpositionen des *Bremiker'schen* Cometen anwenden; man hat also für:

$$\begin{aligned} & 1840 \text{ Nov. } 2,0 \\ l &= 287^{\circ}24'15''76 \\ b &= +60\ 53\ 29,34 \} \text{ nach § 8.} \\ \Delta &= 1,0648000 \\ r &= 1,4984538 \\ k &= 1,5406139 \} \text{ nach § 15.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1841 \text{ Janr. } 21,0 \\ l'' &= 32^{\circ}48'34''22 \\ b'' &= +12\ 54\ 4,17 \} \text{ nach § 8.} \\ \Delta'' &= 1,3932637 \\ r'' &= 1,7564485 \\ lg\ k &= 0,1876938 \} \text{ nach § 15.} \end{aligned}$$

woraus sich die Werthe von U und U'' unter (339) u. (340) am leichtesten bestimmen lassen, wenn man

$$\frac{r'' + r + k}{2} = s \dots\dots (357)$$

setzt, denn alsdann wird:

$$lg\ \frac{1}{2} U = - \sqrt{\left(\frac{(s-k)(s-r)}{s(s-r'')} \right)} \dots (358)$$

$$lg\ \frac{1}{2} U'' = + \sqrt{\left(\frac{(s-k)(s-r'')}{s(s-r)} \right)} \dots (359)$$

wo $\frac{1}{2} U$ immer im zweiten und $\frac{1}{2} U''$ immer im ersten Quadranten genommen werden muss. Will man ausser U und U'' zugleich $(\nu'' - \nu)$ bestimmen, so wird dieses am genauesten und zugleich am bequemsten geschehen können, durch die Formel:

$$lg\ \frac{1}{2} (\nu'' - \nu) = \sqrt{\left(\frac{(s-r)(s-r'')}{s(s-k)} \right)} \dots (360)$$

weil man die Logarithmen von s , $(s-k)$, $(s-r)$ und $(s-r'')$ schon stehen hat. Für unser Beispiel wird:

$$\begin{aligned} s &= 2,3977581 & lg\ 0,3798054 \\ s-k &= 0,8571442 & lg\ 9,9330539 \\ s-r &= 0,8993043 & lg\ 9,9539066 \\ s-r'' &= 0,6413096 & lg\ 9,8070677 \end{aligned}$$

und damit nach Formeln (358), (359) und (360), wenn man mit 7stelligen Logarithmen rechnet, obgleich 5 Decimalstellen zur Bestimmung von U und U'' mehr als genügend sind:

$$\delta k = -\{8,71151\} \delta l - \{9,83596\} \delta b + \{9,88012\} \delta \Delta + \{0,07329\} \delta l'' - \{9,76480\} \delta b'' + \{9,40904\} \delta \Delta''$$

in welcher Formel die Variationen δl , δb , $\delta l''$ und $\delta b''$ noch in Theilen des Radius ausgedrückt sind, will man sie lieber in Bogensecunden ausgedrückt haben, so wird man ihre respectiven Coefficienten mit $arc\ 1''$ multipliciren müssen, und dann folgt endlich:

$$\delta k = -\{3,39708\} \delta l - \{4,52153\} \delta b + \{9,88012\} \delta \Delta + \{4,75886\} \delta l'' - \{4,45037\} \delta b'' + \{9,40904\} \delta \Delta''.$$

$$\begin{aligned} lg\ (s-k)(s-r) &= 9,8869605 \\ lg\ s(s-r'') &= 0,1868731 \\ lg\ tg^2(180^{\circ} - \frac{1}{2} U) &= 9,7000874 \\ lg\ tg(180^{\circ} - \frac{1}{2} U) &= 9,8500437n \\ \frac{1}{2} U &= 144^{\circ}42'3''08 \\ U &= 289\ 24\ 6,16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} lg\ (s-k)(s-r'') &= 9,7401216 \\ lg\ s(s-r) &= 0,3337120 \\ lg\ tg^2 \frac{1}{2} U'' &= 9,4064096 \\ lg\ tg \frac{1}{2} U'' &= 9,7032048 \\ \frac{1}{2} U'' &= 26^{\circ}47'21''06 \\ U'' &= 53\ 34\ 42,12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} lg\ (s-r)(s-r'') &= 9,7609743 \\ lg\ s(s-k) &= 0,3128593 \\ lg\ tg^2 \frac{1}{2} (\nu'' - \nu) &= 9,4481150 \\ lg\ tg \frac{1}{2} (\nu'' - \nu) &= 9,7240575 \\ \frac{1}{2} (\nu'' - \nu) &= 27^{\circ}54'42''02 \\ (\nu'' - \nu) &= 55\ 49\ 24,04 \end{aligned}$$

wo also nach (337) die angenehme Prüfung stattfindet, dass:

$$180^{\circ} + U'' - U + \nu'' - \nu = 0$$

die anderen Werthe, welche in der Formel (353) vorkommen, sind schon früher in § 22 bestimmt worden, indem nämlich nach den dortigen Beispielen für die beiden Momente:

$$\begin{aligned} & 1840 \text{ November } 2,0 \\ lg\ \sin w f &= 9,83128 & M &= 62^{\circ}10'36 \\ lg\ \sin w e &= 9,91775 & N &= 19\ 31,56 \\ lg\ \sin w d &= 9,96611 & P &= 125\ 43,19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1841 \text{ Januar } 21,0 \\ lg\ \sin w f'' &= 9,94040 & M'' &= 37^{\circ}11'51 \\ lg\ \sin w e'' &= 9,83466 & N'' &= 164\ 5,40 \\ lg\ \sin w d'' &= 9,94410 & P'' &= 109\ 27,71 \end{aligned}$$

oder wenn man diese Werthe, in Verbindung mit den obig-gefundenen Werthen von U und U'' , in (351) und (352) einsetzt, so folgt:

$$\begin{aligned} lg\ \cos f f &= 8,99719n & lg\ \cos f f'' &= 9,94036 \\ lg\ \cos f e &= 9,80869n & lg\ \cos f e'' &= 9,62077n \\ lg\ \cos f d &= 9,88012 & lg\ \cos f d'' &= 9,40904 \end{aligned}$$

und damit aus der Formel (347) oder (353), dass:

wo δl , δb , $\delta l''$ und $\delta b''$ noch in Theilen des Radius ausgedrückt sind. Multiplicirt man daher die Coefficienten dieser Variationen mit $\text{arc } 1''$, so werden letztere alsdann auf eine Bogensecunde als Einheit bezogen sein, und es folgt:

$$\delta \theta = \{2,55305\} \delta l - \{3,91287\} \delta b + \{9,41771\} \delta \Delta + \{4,26139\} \delta l'' - \{3,83937\} \delta b'' + \{9,10854\} \delta \Delta''$$

2) Setzt man in der Formel (367) $\delta \theta = 0$, sowie auch zugleich $\delta l = 0$, $\delta b = 0$, $\delta l'' = 0$ und $\delta b'' = 0$, so erhält man den Excentricitätsmodulus q oder q'' für den besonderen Fall, dass man von der Parabel auf einen anderen Kegelschnitt übergehen will, indem nämlich:

$$q = \frac{1}{q''} = \frac{\delta \Delta''}{\delta \Delta} = - \frac{\pi \sin w \delta \sin (P + \Pi)}{\pi'' \sin w \delta'' \sin (P'' + \Pi'')}$$

welche Bestimmung von q oder q'' als eine angenehme Rechnungsprüfung bei der Anwendung der Formel (103) in § 16. gebraucht werden kann.

Für unser obiges Beispiel wird:

$$\begin{array}{rcl} \lg \pi & = & 0,03171 \\ \lg \sin w \delta & = & 9,96611 \\ \lg \sin (P + \Pi) & = & 9,96554 \\ \hline \lg \pi \sin w \delta \sin (P + \Pi) & = & 9,96336 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \lg \pi'' & = & 0,05378 \\ \lg \sin w \delta'' & = & 9,94410 \\ \lg \sin (P'' + \Pi'') & = & 9,65631 \\ \hline \lg \pi'' \sin w \delta'' \sin (P'' + \Pi'') & = & 9,65419 \end{array}$$

mithin wird:

$$\begin{array}{rcl} \lg q & = & 0,30917n \\ \lg q'' & = & 9,69083n \end{array}$$

welches mit den früheren in § 16. auf eine andere Weise gefundenen Werthen von q und q'' vollkommen übereinstimmt.

Nachschrift.

Die Anwendung der in diesem Abschnitte gelehrtten Methoden, zur allgemeinsten Bestimmung der Variationen einer beliebigen Coordinate eines Himmelskörpers, auf die II. Stufe der Bahnbestimmung, wird in den beiden folgenden Abschnitten abgehandelt werden, und es lässt sich nunmehr schon im Voraus ganz deutlich einsehen, dass das Problem der II. Stufe, ganz ähnlich wie das der IIIten, sich zuletzt auf blosse lineäre Gleichungen zurückführen lassen muss. Der ganze Unterschied wird offenbar nur darin bestehen, dass man bei der III. Stufe der Bahnbestimmung gewöhnlich mit einer Durchführung der ganzen Rechnung ausreicht, indem die Coefficienten der Unbekannten in den Bedingungsgleichungen, bei sehr genähert angenommenen Wer-

then der Elemente, von der Zeit abgesehen, als constant betrachtet werden können, während man bei der II. Stufe der Bahnbestimmung genöthigt sein wird, die Berechnung der Coefficienten der Unbekannten in den Bedingungsgleichungen, so lange zu wiederholen, als die Elemente sich bei den successiven Annäherungen noch beträchtlich ändern. Sehr viel hängt hierbei von der Wahl der Unbekannten ab, und überhaupt kommt es vorzüglich darauf an, nur ebenso viele Unbekannte einzuführen als durchaus nöthig sind; also zum Beispiel bei der Bestimmung einer scharfen Parabel nur eine, und bei Kegelschnitten im allgemeinen nur zwei.

Schluss des zweiten Abschnittes.

Wil. Charl. Goetze, Dr.

Elemente des von Herrn Dr. d'Arrest 1851 Juni 27 entdeckten Cometen.

Die Herren E. Vogel und G. Rümker haben mir unter dem 9ten Juli folgende Elemente des d'Arrest'schen Cometen gesandt, welche sie aus den Beobachtungen: Leipzig Juni 29, Leipzig und Berlin Juli 2 und Berlin Juli 5 berechnet haben.

$$\begin{array}{rcl} T & 1851 \text{ Juli } 6,14735 & \text{mittl. Zeit Berlin.} \\ \pi & 324^{\circ} 19' 44'' & \} \text{sch. Aeq.} \\ \Omega & 152 \ 40 \ 44 & \\ i & 14 \ 39 \ 36 & \\ \text{Log. } q & 0,089026 & \\ & \text{Direct.} & \end{array}$$

Für die mittlere Beobachtung geben diese Elemente

$$\begin{array}{rcl} \text{R. — B.} & dl & \dots + 7'' \\ & db & \dots + 0 \end{array}$$

P.