DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XXVI.

I. Theorie der Newton'schen Farbenringe im durchgehenden Lichte; von Ernst Gumlich.

(Hierzu Taf. IV Fig. 1–6.)

Von den Herren Sohncke und Wangerin¹⁾ wurden in den letzten Jahren mehrere Untersuchungen über die Newton'schen Farbenringe veröffentlicht, worin von Hrn. Wangerin auf theoretischem, von Hrn. Sohncke auf experimentellem Wege durch äusserst genaue Messungen nachgewiesen wurde, dass die bisher gebräuchliche Ansicht von der Gestalt und Lage dieser Ringe im reflectirten Lichte eine unrichtige war, dass diese Ringe im allgemeinen nicht Kreise sind, die auf der unteren Fläche der Glasplatte zu Stande kommen und sich concentrisch um den Berührungspunkt gruppieren, sondern vielmehr Curven doppelter Krümmung, die sämmtlich durch elliptische Cylinder, deren Leitlinie parallel ist der Axe des beobachtenden Instrumentes — Mikroskopes oder Fernrohres — herausgeschnitten werden aus einer geradlinigen Fläche dritter Ordnung, der sogenannten Interferenzfläche.

Auf die gütige Anregung des Hrn. Sohncke hin habe ich es versucht, die Untersuchung der analogen Erscheinung im durchgehenden Lichte durchzuführen — zunächst freilich nur auf theoretischem Wege, da mir die nöthigen Mittel zur experimentellen Prüfung der gefundenen Resultate leider zur Zeit nicht zu Gebote stehen — und habe mich dabei, soweit dies thunlich, der besseren Vergleichung halber möglichst genau an den Gang der Wangerin'schen Arbeit gehalten, auch die Bezeichnungen möglichst

1) Sohncke u. Wangerin, Wied. Ann. 12. p. 1. 1881 u. 20. p. 177. 1883.

entsprechend gewählt. Im übrigen konnte ich mich hierbei auf die Betrachtung der Erscheinung beschränken, welche beim Durchgange des Lichtes durch eine planparallele Platte und eine sie mit der convexen Fläche berührende planconvexe Linse entsteht.

Hr. Wangerin machte bei seiner ersten Abhandlung über diesen Gegenstand die Annahme, dass von den sämtlichen, ins Mikroskop gelangenden Strahlenpaaren, die in einem Punkte des Systems zur Interferenz gekommen sind, hauptsächlich diejenigen beiden für das Zustandekommen heller und dunkler Punkte wesentlich und deshalb besonders in Rechnung zu ziehen seien, von denen je ein Strahl in der Richtung der Mikroskopaxe verläuft, während der Einfluss der anderen Strahlenpaare, welche mit den oben erwähnten beiden Hauptstrahlenpaaren sehr kleine Winkel bilden und sämtlich in einem sehr kleinen Kegelraume enthalten sind, in Bezug auf die Intensität erst in zweiter Linie berücksichtigt zu werden brauchen. Diese Theorie ergab Resultate, welche von den genauen experimentellen Untersuchungen des Hrn. Sohncke auf das vollkommenste bestätigt wurden. Trotzdem nun schon hierdurch die Berechtigung seiner Annahme als nachgewiesen gelten konnte, zeigte Herr Wangerin doch in einer zweiten Arbeit zur Beseitigung des gegen ihn erhobenen Vorwurfes, als sei seine Annahme eine willkürliche und unberechtigte, dass ein vollkommen strenges Verfahren, welches sofort die sämtlichen interferirenden und ins Auge gelangenden Strahlenpaare berücksichtigt, auf genau dieselben Formeln und Resultate führt.

Eben diesen Weg habe auch ich eingeschlagen — zunächst die ganze Ableitung nach der früheren, Wangerin'schen Hypothese durchgeführt und dann erst kurz mit Herbeiziehung der zweiten Wangerin'schen Ableitung auf dem vollkommen strengen Wege die Gültigkeit der gewonnenen Formeln nachgewiesen, wodurch ich gleichzeitig einen neuen Beweis für die Berechtigung der ursprünglichen Annahme Wangerin's geliefert zu haben glaube.

Treten wir nun letzterer selbst näher:

Gegeben ist uns nicht eine punktförmige, sondern eine ausgedehnte Lichtquelle, deren Strahlen etwa durch eine Linse nahezu parallel gemacht sein mögen — vollkommen parallel verlassen die Linse ja nur Strahlen, die genau vom Brennpunkte derselben ausgehen; wir sind aber doch berechtigt, voranzusetzen, dass die gesammten Strahlen oder, was dasselbe ist, die zu diesen gehörigen Wellenebenen nur sehr geringe Winkel miteinander bilden — ihre Anzahl ist natürlich unendlich gross.

Fassen wir nun irgend einen Punkt F ins Auge (Fig. 1), der entweder oberhalb oder unterhalb der Ebene $W-W$ liegen kann, so werden durch diesen im allgemeinen sehr viele Strahlen gehen — entweder direct oder doch rückwärts verlängert —, in letzterem Falle ist der betrachtete Punkt ein virtueller Schnittpunkt.

Halten wir zunächst eine beliebige Wellenebene fest, deren untereinander parallele Strahlen also aus einem und demselben Punkte der Lichtquelle stammen, mithin ursprünglich gleiche Phase besitzen, so wird ein Strahl derselben nach directem Durchgange durch das System F treffen ($L'-A'-B'-C'-G'-H'$), ein anderer ($L-A-B-C-B_1-C_1-G-H$) wird einmal, ein zweiter zweimal, ein k . k mal an der Oberfläche der Linse reflectirt werden, ehe er ebenfalls durch den Punkt F geht. Hier werden diese sämtlichen Strahlen interferiren, also, für sich betrachtet, Licht oder Dunkelheit erzeugen, und zwar werden wir die durch die mehrfach reflectirten Strahlen erzeugten Interferenzerscheinungen auf diejenigen zurückführen können, welche durch den direct hindurchgegangenen und den einmal an der Linse reflectirten Strahl hervorgerufen werden. Wir betrachten also zunächst nur diese beiden und denken uns die Axe des Beobachtungsinstrumentes in die Richtung dieses direct hindurchgegangenen Strahles gebracht. Gehen wir nun zu irgend einer anderen der vorhin erwähnten Wellenebenen über, so wird keine derselben Strahlen aussenden, welche, direct hindurchgegangen, genau in der Richtung der Mikroskopaxe verlaufen und so gleichzeitig den Punkt F treffen, wohl aber wird ein Strahl nach einer einmaligen

Reflexion diese Richtung erhalten, ein zweiter nach einer zweifachen etc.; — zu jedem dieser Strahlen, die untereinander wieder verschiedenen Wellenebenen angehören, wird ein aus der betreffenden Wellenebene stammender Strahl gehören, der nach directem Durchgange ebenfalls durch F geht und dort mit seinem Axenstrahle interferirt: Wiederum beschränken wir uns hier auf den einmal reflectirten und den dazugehörigen, direct durchgegangenen, und haben auf diese Weise zwei Strahlenpaare gewonnen, von denen jedes, für sich genommen, in F zur Interferenz gelangt, die aber, da sie aus verschiedenen Wellen stammen, nicht untereinander interferiren, und von denen ferner je ein Strahl in der Richtung der Mikroskopaxe verläuft, die beiden anderen aber mit dieser zwei verschiedene, kleine Winkel bilden. Diese beiden Paare, die Hauptpaare, sind gerade wegen ihres Zusammenfallens mit der Richtung der Mikroskopaxe die wesentlichsten des ganzen Systems, um welche sich die übrigen, ebenfalls in F interferirenden Strahlenpaare im Inneren eines kleinen Kegels symmetrisch gruppiren werden. Jedes dieser beiden Hauptpaare kann nun, je nach der Lage des Punktes F , dort entweder vollkommene oder unvollkommene Helligkeit oder Dunkelheit hervorbringen, und zwar jedes der Hauptpaare unabhängig vom anderen und ohne Störung durch das andere. Nun wird es aber sicher solche Punkte F geben, wo die Interferenzerscheinungen beider Paare gleichzeitig Helligkeit oder Dunkelheit ergeben, das werden dann die hellsten und dunkelsten Punkte überhaupt sein, und sucht man deren Gesammtheit auf, so muss man auf die hellen und dunklen ringförmigen Gebilde kommen, die unter dem Namen der Newton'schen Ringe bekannt sind.

Bei der Untersuchung legen wir zunächst ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde, dessen Anfangspunkt O (Fig. 1) der Berührungspunkt von Platte und Linse sei, dessen EH -Ebene in der unteren Ebene der Glasplatte liege, dessen positive E -Axe nach der Lichtquelle hin, und dessen positive Z -Axe von O nach oben gerichtet sein möge.

Nennen wir die Richtungscosinus einer von O aus auf die Wellenebene eines einfallenden Bündels paralleler Lichtstrahlen gefällten Normalen: $+\alpha, +\beta, +\gamma$, so erhalten wir für die Richtungscosinus der einzelnen Strecken des einmal reflectirten und des durchgehenden Strahles.

$$(1) \left\{ \begin{array}{ll} LA : -\alpha, -\beta, -\gamma & L'A' : -\alpha, -\beta, -\gamma \\ AB : -\alpha_1, -\beta_1, -\gamma_1 & A'B' : -\alpha'_1, -\beta'_1, -\gamma'_1 \\ BC : -\alpha, -\beta, -\gamma & B'C' : -\alpha, -\beta, -\gamma \\ CB_1 : -\alpha_2, -\beta_2, +\gamma_2 & \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ B_1C_1 : -\alpha_3, -\beta_3, -\gamma_3 & \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ C_1G : -\alpha_4, -\beta_4, -\gamma_4 & C'G' : -\alpha'_4, -\beta'_4, -\gamma'_4 \\ GH : -\alpha_5, -\beta_5, -\gamma_5 & G'H' : -\alpha'_5, -\beta'_5, -\gamma'_5 \end{array} \right.$$

Aus dem Brechungsgesetze folgt sofort, dass: $\alpha'_1 = \alpha_1$; $\beta'_1 = \beta_1$; $\gamma'_1 = \gamma_1$ und:

$$(2) \quad \alpha_1 = \frac{1}{n} \alpha; \quad \beta_1 = \frac{1}{n} \beta, \quad \gamma_1 = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2}.$$

Nennen wir den Winkel, den der Krümmungsradius der Linse, vom Mittelpunkte nach C gezogen oder die in C nach aussen errichtete Normale mit der positiven Z -Axe einschliesst, $=\varphi$, denjenigen, den die Projection dieser Normalen auf die ΞH -Ebene mit der positiven Ξ -Axe bildet, $=\psi$, dann sind die drei Richtungscosinus dieser Normalen in C gegeben durch:

$$(3_a) \quad \sin \varphi \cos \psi; \quad \sin \varphi \sin \psi; \quad \cos \varphi$$

und nennen wir die entsprechenden Grössen für C_1 und C' , resp. φ_1, ψ_1 ; φ', ψ' , so haben wir für die Richtungscosinus der Normalen in C_1 und C' :

$$(3_b) \quad \sin \varphi_1 \cos \psi_1; \quad \sin \varphi_1 \sin \psi_1; \quad \cos \varphi_1,$$

$$(3_c) \quad \sin \varphi' \cos \psi'; \quad \sin \varphi' \sin \psi'; \quad \cos \varphi'.$$

Wir haben $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ auszudrücken durch $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi$; zu diesem Zwecke denken wir uns um den Punkt C eine Kugel mit dem Radius 1 construirt (Fig. 2); die Oberfläche derselben schneide den einfallenden Strahl in B , den reflectirten in B_1 , die in C errichtete Normale in P , die zur Ξ -Axe parallele Gerade in L . Dann ist nach dem Reflexionsgesetze:

$$\cos BCP = \cos PCB_1 = \underbrace{\alpha \sin \varphi \cos \psi + \beta \sin \varphi \sin \psi + \gamma \cos \varphi}_{U}$$

Diese Grösse nennen wir: U .

Dann ergibt sich nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos LCB_1 = -\alpha_2 = 2U \sin \varphi \cos \psi - \alpha$$

und entsprechend für die beiden anderen Richtungscosinus, oder:

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha_2 = \alpha - 2U \sin \varphi \cos \psi \\ \beta_2 = \beta - 2U \sin \varphi \sin \psi \\ \gamma_2 = -\gamma + 2U \cos \varphi. \end{cases}$$

Weiter ist nach den Reflexionsgesetzen:

$$\alpha_3 = \alpha_2; \quad \beta_3 = \beta_2; \quad \gamma_3 = \gamma_2.$$

Um $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4$ auf $\alpha, \beta, \gamma; \varphi, \psi; \varphi_1, \psi_1$ zurückzuführen, denken wir uns wieder um C_1 eine Kugelfläche construiert mit dem Radius 1 (Fig. 3), welche den einfallenden Strahl in B_1 , den gebrochenen in G , das in C_1 nach aussen errichtete Perpendikel mit den Richtungscosinus: $\sin \varphi_1 \cos \psi_1; \sin \varphi_1 \sin \psi_1; \cos \varphi_1$ in P_1 schneiden möge, die der $\tilde{z}$ -Axe parallele Gerade aber in L . Nun ist nach den Formeln der analytischen Geometrie:

$$\cos (B_1 C_1 P_1) = \alpha_3 \sin \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta_3 \sin \varphi_1 \sin \psi_1 + \gamma_3 \cos \varphi_1 = U_1.$$

Betrachtet man ferner, dass nach dem Brechungsgesetze:

$$\sin (G_1 C_1 P_1) = \frac{1}{n} \sqrt{1 - U_1^2},$$

und dass $\cos (G_1 C_1 L) = \alpha_4$, so findet sich nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie:

$$\alpha_4 = \frac{1}{n} \left\{ \sin \varphi_1 \cos \psi_1 (\sqrt{n^2 - 1 + U_1^2} - U_1) + \alpha_3 \right\} \quad \text{oder:}$$

$$(5) \quad \begin{cases} \alpha_4 = \frac{1}{n} \left\{ \sin \varphi_1 \cos \psi_1 (\sqrt{n^2 - 1 + U_1^2} - U_1) - 2U \sin \varphi \cos \psi + \alpha \right\}, \\ \beta_4 = \frac{1}{n} \left\{ \sin \varphi_1 \cos \psi_1 (\sqrt{n^2 - 1 + U_1^2} - U_1) - 2U \sin \varphi \sin \psi + \beta \right\}, \\ \gamma_4 = \frac{1}{n} \left\{ \cos \varphi_1 (\sqrt{n^2 - 1 + U_1^2} - U_1) + 2U \cos \varphi - \gamma \right\}, \end{cases}$$

endlich: $\alpha_5 = n\alpha_4; \beta_5 = n\beta_4; \gamma_5 = \sqrt{1 - n^2 + n^2\gamma_4^2}.$

Die Richtungscosinus von $C'G'$: $\alpha'_4, \beta'_4, \gamma'_4$ finden wir, ausgedrückt durch $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi'$ direct aus den Formeln (5),

wenn wir darin für $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \varphi_1, \psi_1$ setzen resp.: $\alpha, \beta, \gamma, \varphi', \psi'$, wodurch dann von selbst die Grösse:

$$U_1 = (\alpha_3 \sin \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta_3 \sin \varphi_1 \sin \psi_1 + \gamma_3 \cos \varphi_1) \\ = \{(\alpha - 2 U \sin \varphi \cos \psi) \sin \varphi_1 \cos \psi_1 \\ + (\beta - 2 U \sin \varphi \sin \psi) \sin \varphi_1 \sin \psi_1 + (2 U \cos \varphi - \gamma) \cos \varphi_1\}$$

übergeht in:

$$U' = (\alpha \sin \varphi' \cos \psi' + \beta \sin \varphi' \sin \psi' + \gamma \cos \varphi').$$

Es wird demnach:

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha'_4 = \frac{1}{n} \left\{ \sin \varphi' \cos \psi' (\sqrt{n^2 - 1 + U'^2} - U') + \alpha \right\}, \\ \beta'_4 = \frac{1}{n} \left\{ \sin \varphi' \sin \psi' (\sqrt{n^2 - 1 + U'^2} - U') + \beta \right\}, \\ \gamma'_4 = \frac{1}{n} \left\{ \cos \varphi' (\sqrt{n^2 - 1 + U'^2} - U') + \gamma \right\}. \end{cases}$$

Endlich liefert wieder das Brechungsgesetz:

$$\alpha'_5 = n \alpha'_4; \quad \beta'_5 = n \beta'_4; \quad \gamma'_5 = \sqrt{1 - n^2 + n^2 \gamma'^2_4}.$$

Es sei der Ort der Interferenz F (Fig. 1) bestimmt durch die Coordinaten Ξ, H, Z , die Punkte C, C_1 und C' durch resp.: $\xi, \eta, \zeta; \xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi', \eta', \zeta'$.

Dann haben wir zunächst die Grössen: $\varphi, \psi; \varphi_1, \psi_1; \varphi', \psi'$ auszudrücken durch die Grössen: $\Xi, H, Z, \alpha, \beta, \gamma$. Es ist aber:

$$(7) \quad \begin{cases} \xi = r \sin \varphi \cos \psi; \quad \eta = r \sin \varphi \sin \psi; \quad \zeta = -r + r \cos \varphi = -2r \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \\ \xi_1 = r \sin \varphi_1 \cos \psi_1; \quad \eta_1 = r \sin \varphi_1 \sin \psi_1; \quad \zeta_1 = -2r \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}, \\ \xi' = r \sin \varphi' \cos \psi'; \quad \eta' = r \sin \varphi' \sin \psi'; \quad \zeta' = -2r \sin^2 \frac{\varphi'}{2}. \end{cases}$$

Ferner erhalten wir für:

$$(8) \quad CB_1 = -\frac{\xi}{\gamma_3}; \quad B_1 C_1 = -\frac{\xi_1}{\gamma_3}; \quad C_1 G = \frac{d' + \xi_1}{\gamma_4}; \quad FG' = \frac{d' + Z}{\gamma_5},$$

wenn wir mit d' die Dicke der Glaslinse — natürlich an ihrer dicksten Stelle, dem Berührungspunkt O bezeichnen, während d die Dicke der Glasplatte bezeichnen soll. Berechnen wir mit Hülfe dieser Werthe die Grössen ξ, η, ζ und setzen die so gefundenen Werthe dann gleich den Grössen (7), so werden wir die gesuchte Relation zwischen φ, ψ und $\Xi, H, Z, \alpha, \beta, \gamma$ finden. Da jedoch in der ent-

stehenden Formel nicht nur φ , ψ , sondern auch φ_1 , ψ_1 vorkommen wird, so müssen wir zuvor noch das letztere auf das erstere zurückzuführen suchen. Es gilt aber wegen der Gleichungen (7) und (8):

$$(\xi - \xi_1) = \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \cdot 2r \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{\alpha_3}{\gamma_3} \cdot 2r \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \quad \text{oder:}$$

$$r(\sin \varphi \cos \psi - \sin \varphi_1 \cos \psi_1) = 2r \cdot \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \left(\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \right),$$

endlich:

$$(9) \quad \begin{cases} \sin \varphi_1 \cos \psi_1 = \sin \varphi \cos \psi - 2 \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \left(\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \right), \\ \sin \varphi_1 \sin \psi_1 = \sin \varphi \sin \psi - 2 \frac{\beta_2}{\gamma_2} \left(\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \right), \\ \cos \varphi_1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}. \end{cases}$$

Nun sind $\sin \varphi$, $\sin \varphi_1$ und $\sin \varphi'$ nur sehr kleine Grössen, — $\sin \varphi = \sqrt{(\xi^2 + \eta^2)}/r$, wenn wir mit r den Krümmungsradius der Linse bezeichnen, und dieser muss ja, soll die Erscheinung überhaupt zu Stande kommen, die Grösse der Ringdurchmesser gegenüber sehr bedeutend sein. Fassen wir demnach die Grössen φ auf als unendlich klein von der ersten Ordnung, so sagen uns die Gleichungen (9), dass sich $\sin \varphi_1 \cos \psi_1$ und $\sin \varphi_1 \sin \psi_1$ von $\sin \varphi \cos \psi$, $\sin \varphi \sin \psi$ unterscheiden durch Grössen zweiter Ordnung.

Weiter ergibt sich mit Hülfe der Werthe (8):

$$(10) \quad \begin{cases} \xi = \tilde{\xi} - \frac{\alpha_5}{\gamma_5} (d' + Z) + \frac{\alpha_4}{\gamma_4} (d' + \xi_1) - \frac{\alpha_3}{\gamma_3} (\xi_1 + \xi), \\ \eta = H - \frac{\beta_5}{\gamma_5} (d' + Z) + \frac{\beta_4}{\gamma_4} (d' + \xi_1) - \frac{\beta_3}{\gamma_3} (\xi_1 + \xi). \end{cases}$$

Hierin sind die Werthe von α_5 , β_5 , γ_5 etc., die wir in den Gleichungen (4), (5) etc. fanden, einzusetzen und sämtliche Grössen nach Potenzen von φ zu entwickeln, was wegen der Kleinheit des Winkels φ sehr rasch zum Ziele führen wird; es wird genügen, wenn wir noch die Glieder zweiter Ordnung beibehalten, und zwar dürfen wir, da auch die Dicke der Glaslinse gegen deren Krümmungsradius sehr klein ist und weiter die Ringe immer in der Nähe der unteren Fläche der Glaslinse zum Vorschein kommen, also auch Z nur sehr

kleine Werthe haben wird, sowohl d'/r als auch $(d' + Z)/r$ als von der Ordnung der Grösse φ auffassen. Hierdurch geht unser obiger Ausdruck für ξ über in:

$$\begin{aligned}\xi = \Xi - \frac{\sin \varphi_1 \cos \psi_1 (\sqrt{n^2 - 1 + U_1^2} - U_1) - 2U \sin \varphi \cos \psi + \alpha (d' + Z)}{\sqrt{(1 - n^2 + [\cos \varphi_1 (\sqrt{n^2 - 1 + U_1^2} - U_1) + 2U \cos \varphi - \gamma]^2)}} (d' + Z) \\ + \frac{\sin \varphi_1 \cos \psi_1 (\sqrt{n^2 - 1 + U_1^2} - U_1) - 2U \sin \varphi \cos \psi + \alpha}{\cos \varphi_1 (\sqrt{n^2 - 1 + U_1^2} - U_1) + 2U \cos \varphi - \gamma} (d' + \zeta_1) \\ - \frac{(\alpha - 2U \sin \varphi \cos \psi)}{2U \cos \varphi - \gamma} (\zeta + \zeta_1).\end{aligned}$$

Den entsprechenden Werth für η erhalten wir hieraus, wenn wir Ξ , α , $\sin \varphi_1 \cos \psi_1$, $\sin \varphi \cos \psi$ vertauschen mit resp.: H , β , $\sin \varphi_1 \sin \psi_1$, $\sin \varphi \sin \psi$. Die Grössen U und U_1 sind hierbei die früher bereits angegebenen Ausdrücke (cf. 5). Unter Berücksichtigung der Werthe für $\sin \varphi_1 \cos \psi_1$ etc. (cf. 9) und des Umstandes, dass wir wegen Beschränkung des gesuchten Resultates für $\sin \varphi$ direct den Winkel φ selbst setzen dürfen, geht obige Gleichung über in:

$$\begin{aligned}r \cdot \varphi \cos \psi = \Xi - \frac{1}{\gamma} \left[\varphi \cos \psi (\sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2} - 3\gamma) \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{\gamma^2} (\alpha \varphi \cos \psi + \beta \varphi \sin \psi) (\sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2} - 3\gamma) + \alpha \right] (d' + Z) \\ + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2}} \left[\varphi \cos \psi (\sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2} - 3\gamma) \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{(n^2 - 1 + \gamma^2)} (\alpha \varphi \cos \psi + \beta \varphi \sin \psi) (\sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2} - 3\gamma) + \alpha \right] \left(d' - \frac{r \varphi^2}{2} \right) \\ + \frac{\alpha}{\gamma} \cdot r \varphi^2,\end{aligned}$$

oder, wenn wir wieder nach den Anfangsformeln setzen:
 $\sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2} = n\gamma_1$:

$$\begin{aligned}r \cdot \varphi \cos \psi = \Xi - \frac{\alpha}{\gamma} \left[d' \left(1 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) + Z \right] + \varphi \cos \psi \left(3 - \frac{n\gamma_1}{\gamma} \right) \left[d' \left(1 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) + Z \right] \\ + \left(\frac{\alpha}{\gamma} \varphi \cos \psi + \frac{\beta}{\gamma} \varphi \sin \psi \right) \frac{\alpha}{\gamma} \left(3 - \frac{n\gamma_1}{\gamma} \right) \left[d' \left(1 - \frac{\gamma^3}{n^3 \gamma_1^3} \right) + Z \right] \\ + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\gamma} r \varphi^2 \left(2 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right).\end{aligned}$$

Wir führen jetzt, analog der Bezeichnung bei Wangerin, ein die Grössen:

$$(11) \left\{ \begin{aligned} u_1 &= \frac{\bar{\varepsilon} - \frac{\alpha}{\gamma} \left[d' \left(1 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) + Z \right]}{r}; \quad v_1 = \frac{H - \frac{\beta}{\gamma} \left[d' \left(1 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) + Z \right]}{r}, \\ \delta_1 &= d' \left(1 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right), \quad \delta_2 = d' \left(1 - \frac{\gamma^3}{n^3\gamma_1^3} \right), \\ \varepsilon_1 &= \left(1 - \frac{n\gamma_1}{\gamma} \right), \quad \varepsilon_2 = \left(2 - \frac{n\gamma_1}{\gamma} \right) \cdots \text{allgem. } \varepsilon_h = \left(h - \frac{n\gamma_1}{\gamma} \right). \end{aligned} \right.$$

Es bildet der Werth u_1 eine erste Annäherungsformel für $\varphi \cos \psi$. Setzen wir dies ein, so erhalten wir die gesuchten Werthe genau bis auf Grössen zweiter Ordnung:

$$(12) \left\{ \begin{aligned} \varphi \cos \psi &= \frac{u_1}{r} + \varepsilon_3 \frac{u_1}{r} \left(\frac{\delta_1 + Z}{r} \right) + \varepsilon_3 \frac{\alpha}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \left(\frac{\delta_2 + Z}{r} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\gamma} \left(2 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) \left(\frac{u_1^2 + v_1^2}{r^2} \right), \\ \varphi \sin \psi &= \frac{v_1}{r} + \varepsilon_3 \frac{v_1}{r} \left(\frac{\delta_1 + Z}{r} \right) + \varepsilon_3 \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \left(\frac{\delta_2 + Z}{r} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\gamma} \left(2 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) \left(\frac{u_1^2 + v_1^2}{r^2} \right). \end{aligned} \right.$$

Auf ganz analoge Weise haben wir weiter die Grössen $\varphi' \cos \psi'$ aus $\varphi' \sin \psi'$ zu berechnen und finden aus:

$$\begin{aligned} \xi' &= \bar{\varepsilon} - \frac{\alpha_5'}{\gamma_5'} (d' + Z) + \frac{\alpha_4'}{\gamma_4'} (d' + \zeta'), \\ \eta' &= H - \frac{\beta_5'}{\gamma_5'} (d' + Z) + \frac{\beta_4'}{\gamma_4'} (d' + \zeta') \end{aligned}$$

durch Entwicklungen, ganz analog den oben durchgeführten:

$$(13) \left\{ \begin{aligned} \varphi' \cos \psi' &= \frac{u_1}{r} + \varepsilon_1 \frac{u_1}{r} \left(\frac{\delta_1 + Z}{r} \right) + \varepsilon_1 \frac{\alpha}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \left(\frac{\delta_2 + Z}{r} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{n\gamma_1} \left(\frac{u_1^2 + v_1^2}{r^2} \right), \\ \varphi' \sin \psi' &= \frac{v_1}{r} + \varepsilon_1 \frac{v_1}{r} \left(\frac{\delta_1 + Z}{r} \right) + \varepsilon_1 \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \left(\frac{\delta_2 + Z}{r} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\beta}{n\gamma_1} \left(\frac{u_1^2 + v_1^2}{r^2} \right). \end{aligned} \right.$$

Wir haben nach diesen vorbereitenden Formeln, wie schon früher angedeutet, die Wegdifferenz Δ_1 der beiden Strahlen, des einmal reflectirten und des direct durchgegangenen, und zwar beide bezogen auf die Luft, zu berechnen, Nennen wir LL' (cf. Fig. 1) irgend eine zu beiden Strahlen

senkrechte Ebene, also eine Wellenebene derselben, so hat nach seiner Ankunft in F der reflectirte Strahl zurückgelegt den Weg: $LA + BC + CB_1 + B_1C \pm GF$ in der Luft, $AB + C_1G$ im Glase; der direct durchgegangene den Weg $L'A' + B'C' \pm G'F$ in der Luft, $A'B' + C'G'$ im Glase, wobei das obere, resp. untere Zeichen gilt, je nachdem der Punkt F unterhalb, resp. oberhalb der Ebene $W-W$ liegt. Wollen wir die im Glase zurückgelegte Strecke ebenfalls auf die Luft beziehen, so müssen wir bedenken, dass ein Strahl, während er eine gewisse Strecke im Glase durchläuft, mit derselben Anzahl von Schwingungen und in derselben Zeit das n -fache dieser Strecke in der Luft durch-eilen würde, wenn wir mit n den Brechungsexponenten des Glases in Bezug auf Luft bezeichnen. Wir erhalten also, da $A'B' = AB$, als Wegdifferenz beider Strahlen, bezogen auf Luft:

$$A_1 = BC + CB_1 + B_1C_1 - B'C' - (L'A' - LA) \pm (GF - G'F) + n(C_1G - C'G').$$

Nun sind die absoluten Längen von:

$$BC = \frac{-\xi}{\gamma}; \quad CB_1 = \frac{-\xi_1}{\gamma_2}; \quad B_1C_1 = \frac{-\xi_1}{\gamma_2}; \quad B'C' = \frac{-\xi'}{\gamma}.$$

Um ferner $(L'A' - LA)$ zu berechnen, führen wir die Gleichung der betreffenden Wellenebene LL' ein durch $\alpha x + \beta y + \gamma z = l$, wobei l die Länge des vom Coordinatenanfangspunkt O aus auf diese Ebene gefällten Perpendikels bedeutet. Es habe weiter der Punkt A die Coordinaten ξ_2, η_2, ζ_2 , der Punkt A' die Coordinaten ξ_3, η_3, ζ_3 , die von diesen Punkten auf dieselbe Wellenebene gefällten Perpendikel seien resp. l_2, l_3 , dann erhalten wir:

$$l_2 = \alpha(\xi - \xi_2) + \beta(\eta - \eta_2) + \gamma(\zeta - \zeta_2) = l - (\alpha\xi_2 + \beta\eta_2 + \gamma\zeta_2),$$

$$l_3 = \alpha(\xi - \xi_3) + \beta(\eta - \eta_3) + \gamma(\zeta - \zeta_3) = l - (\alpha\xi_3 + \beta\eta_3 + \gamma\zeta_3).$$

Demnach wird:

$$(A'L' - AL) = (l_3 - l_2) = \alpha(\xi_2 - \xi_3) + \beta(\eta_2 - \eta_3) + \gamma(\zeta_2 - \zeta_3).$$

Das letzte Glied aber fällt fort wegen $\zeta_2 = \zeta_3 = d$. Ferner ist:

$$C_1G = \frac{d' + \zeta_1}{\gamma_4}; \quad C'G' = \frac{d' + \zeta'}{\gamma_4}; \quad GF = \frac{d' + Z}{\gamma_6}; \quad G'F = \frac{d' + Z}{\gamma_6}.$$

Führen wir dies alles in Δ_1 ein, so erhalten wir:

$$\Delta_1 = -\left(\frac{\zeta}{\gamma} + \frac{\zeta + \zeta_1}{\gamma_2}\right) + \frac{\zeta'}{\gamma} + \alpha(\xi_3 - \xi_2) + \beta(\eta_3 - \eta_2) \\ - \frac{d' + Z}{\gamma_5} + \frac{d' + Z}{\gamma_5} + \frac{n(d' + \zeta_1)}{\gamma_4} - \frac{n(d' + \zeta')}{\gamma_4'}.$$

Nun ist, wie sich aus der Figur ergibt:

$$\xi_3 = \xi' - \frac{\alpha}{\gamma} \zeta' + \frac{\alpha_1}{\gamma_1} d; \quad \xi_2 = \xi - \frac{\alpha}{\gamma} \zeta + \frac{\alpha_1}{\gamma_1} d.$$

$$\eta_3 = \eta' - \frac{\beta}{\gamma} \zeta' + \frac{\beta_1}{\gamma_1} d; \quad \eta_2 = \eta - \frac{\beta}{\gamma} \zeta + \frac{\beta_1}{\gamma_1} d,$$

$$\alpha(\xi_3 - \xi_2) + \beta(\eta_3 - \eta_2) = \alpha(\xi' - \xi) + \beta(\eta' - \eta) + \frac{1-\gamma^2}{\gamma}(\zeta - \zeta'),$$

ferner:

$$\alpha(\xi' - \xi) = \alpha \left[\bar{\varepsilon} - \frac{\alpha_5'}{\gamma_5'} (d' + Z) + \frac{\alpha_4'}{\gamma_4'} (d' + \zeta') - \bar{\varepsilon} + \frac{\alpha_5'}{\gamma_5'} (d' + Z) \right. \\ \left. - \frac{\alpha_4}{\gamma_4} (d' + \zeta_1) + \frac{\alpha_2}{\gamma_2} (\zeta + \zeta_1) \right].$$

und ganz entsprechend der Werth für $\beta(\eta' - \eta)$.

Fassen wir dies alles in passender Weise zusammen, so kommen wir schliesslich zu der symmetrisch gebauten Formel:

$$(14) \left\{ \begin{aligned} \Delta_1 &= (d' + Z) \left[\frac{\alpha\alpha_5 + \beta\beta_5 - 1}{\gamma_5} - \frac{(\alpha\alpha_5' + \beta\beta_5' - 1)}{\gamma_5'} \right] \\ &+ (d' + \zeta') \frac{[\alpha\alpha_4' + \beta\beta_4' - n]}{\gamma_4'} - (d' + \zeta_1) \frac{[\alpha\alpha_4 + \beta\beta_4 - n]}{\gamma_4} \\ &+ (\zeta + \zeta_1) \frac{(\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 - 1)}{\gamma_2} + \gamma(\zeta' - \zeta). \end{aligned} \right.$$

Dieser Ausdruck ist, um ihn auf die früher gebrauchten Grössen u_1, v_1 zu bringen, nach Potenzen von φ zu entwickeln. Es ergibt sich dabei, ganz analog der entsprechenden Entwicklung in der Wangerin'schen Abhandlung, dass sich die sämmtlichen ersten Potenzen von φ heben; wir werden daher nicht nur die zweiten, sondern auch die dritten Potenzen beibehalten müssen. Mit Anwendung der früher (cf. (9) und (13)) gefundenen Werthe für φ_1 und φ' , sowie der Abkürzungen (11) und Uebergang der ziemlich umfangreichen Einzelberechnungen kommen wir schliesslich auf die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta_1 = -\gamma \left[2 \cdot \varepsilon_2 \left(\frac{\alpha}{\gamma} \varphi \cos \psi + \frac{\beta}{\gamma} \varphi \sin \psi \right)^2 (\delta_2 + Z) \right. \\ \left. + 2\varepsilon_2 \varphi^2 (\delta_1 + Z) + \varepsilon_1 (\zeta_1 - \zeta') + 2\zeta \right] \end{aligned}$$

oder bei Einführung der Grössen u_1, v_1 :

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_1 = \frac{\gamma}{r} \left[(u_1^2 + v_1^2) + 2\varepsilon_2 (u_1^2 + v_1^2) \frac{(\delta_1 + Z)}{r} \right. \\ \left. + 2\varepsilon_2 \left(\frac{\alpha}{\gamma} u_1 + \frac{\beta}{\gamma} v_1 \right)^2 \frac{(\delta_2 + Z)}{r} + \left(2 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) (u_1^2 + v_1^2) \right]. \end{aligned} \right.$$

Diese Formel bildet für unsere Untersuchungen einen bequemen Ausgangspunkt zur Gewinnung weiterer Ausdrücke: Einmal müssen wir nämlich, um das so gewonnene Resultat zur Vergleichung mit der Wegdifferenz des zweiten Hauptpaares tauglich zu machen, Δ_1 ausdrücken durch $\alpha'_5, \beta'_5, \gamma'_5$ statt durch α, β, γ , wodurch natürlich auch die Grössen u_1, v_1 in andere, entsprechende Grössen übergehen werden, und dann noch durch $\alpha_5; \beta_5; \gamma_5$. Zum Zwecke dieses Ueberganges von α nach α'_5 haben wir genau so zu verfahren, wie im Anfange unserer Untersuchungen, nur dass wir hier, abweichend von dem früheren Wege, den Richtungscosinus mit dem höheren Index als gegeben und den mit dem niedrigeren als gesucht zu betrachten haben. Nennen wir:

$$U_4' = \alpha'_4 \sin \varphi' \cos \psi' + \beta'_4 \sin \varphi' \sin \psi' + \gamma'_4 \cos \varphi',$$

dann ergibt sich mit Hülfe des Brechungsgesetzes und der schon früher benutzten Formeln aus der sphärischen Trigonometrie:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= n\alpha'; & \beta &= n\beta'; & \gamma &= \sqrt{1 - n^2 + n^2\gamma'^2}; \\ \alpha &= n \left[\sin \varphi' \cos \psi' \left(\frac{1}{n} \sqrt{1 + n^2(U_4'^2 - 1)} - U_4' \right) + \alpha'_4 \right], \\ \beta &= n \left[\sin \varphi' \sin \psi' \left(\frac{1}{n} \sqrt{1 + n^2(U_4'^2 - 1)} - U_4' \right) + \beta'_4 \right], \\ \gamma &= n \left[\cos \varphi' \left(\frac{1}{n} \sqrt{1 + n^2(U_4'^2 - 1)} - U_4' \right) + \gamma'_4 \right]; \\ \alpha'_4 &= \frac{1}{n} \alpha'_5; & \beta'_4 &= \frac{1}{n} \beta'_5; & \gamma'_4 &= \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_5'^2}. \end{aligned} \right.$$

Berechnen wir aus:

$$\xi' = \Xi - \frac{\alpha_5'}{\gamma_5'}(d' + Z) + \frac{\alpha_4'}{\gamma_4'}(d' + \zeta);$$

$$\eta' = H - \frac{\beta_5'}{\gamma_5'}(d' + Z) + \frac{\beta_4'}{\gamma_4'}(d' + \zeta)$$

wieder $\varphi' \cos \psi'$; $\varphi' \sin \psi'$, ausgedrückt durch α_5' , β_5' , γ_5' , so erhalten wir:

$$r \sin \varphi' \cos \psi' = \Xi - \frac{\alpha_5'}{\gamma_5'} \left[d' \left(1 - \frac{\gamma_5'}{n\gamma_4'} \right) + Z \right] - 2r \frac{\alpha_5'}{n\gamma_4'} \sin^2 \frac{\varphi'}{2},$$

oder, setzen wir:

$$(17) \quad \begin{cases} d' \left(1 - \frac{\gamma_5'}{n\gamma_4'} \right) = \delta_1'; & d' \left(1 - \frac{\gamma_5'^3}{n_3\gamma_4'^3} \right) = \delta_2', \\ \left(1 - \frac{n\gamma_4'}{\gamma_5'} \right) = \varepsilon_1' \dots \dots \dots \left(h - \frac{n\gamma_4'}{\gamma_5'} \right) = \varepsilon_h', \\ \Xi - \frac{\alpha_5'}{\gamma_5'}(\delta_1' + Z) = u'; & H - \frac{\beta_5'}{\gamma_5'}(\delta_1' + Z) = v', \end{cases}$$

so folgt:

$$(18) \quad \begin{cases} \varphi' \cos \psi' = \frac{u'}{r} - \frac{1}{2} \frac{\alpha_5'}{n\gamma_4'} \cdot \frac{u'^2 + v'^2}{r^2}, \\ \varphi' \sin \psi' = \frac{v'}{r} - \frac{1}{2} \frac{\beta_5'}{n\gamma_4'} \cdot \frac{u'^2 + v'^2}{r^2}. \end{cases}$$

Hierbei sind natürlich u'/r , v'/r Grössen von der Ordnung u_1/r , v_1/r oder φ .

Wir können direct von den Grössen u_1 , v_1 übergehen zu u' , v' . Es war ja:

$$u_1 = \Xi - \frac{\alpha}{\gamma} \left[d' \left(1 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) + Z \right]; \quad v_1 = H - \frac{\beta}{\gamma} \left[d' \left(1 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) + Z \right].$$

Setzen wir hierin die Werthe von (16) und (18) ein und entwickeln wie früher, dann erhalten wir mit Beibehaltung von Grössen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} u_1 &= u' - \varphi' \cos \psi' \cdot \varepsilon_1'(\delta_1' + Z) - \varepsilon_1' \cdot \frac{\alpha_5'}{\gamma_5'} \left(\frac{\alpha_5'}{\gamma_5'} \varphi' \cos \psi' + \frac{\beta_5'}{\gamma_5'} \varphi' \sin \psi' \right) (\delta_2' + Z) \\ v_1 &= v' - \varphi' \sin \psi' \cdot \varepsilon_1'(\delta_1' + Z) - \varepsilon_1' \cdot \frac{\beta_5'}{\gamma_5'} \left(\frac{\alpha_5'}{\gamma_5'} \varphi' \cos \psi' + \frac{\beta_5'}{\gamma_5'} \varphi' \sin \psi' \right) (\delta_2' + Z) \\ \hline (u_1^2 + v_1^2) &= (u'^2 + v'^2) - 2\varepsilon_1'(u'^2 + v'^2) \frac{(\delta_1' + Z)}{r} - 2 \left(\frac{\alpha_5'}{\gamma_5'} u' + \frac{\beta_5'}{\gamma_5'} v' \right)^2 \varepsilon_1' \frac{(\delta_2' + Z)}{r} \end{aligned}$$

Diesen Werth haben wir in die Gleichung für Δ_1 (cf. 15) einzuführen; bei den sämmtlichen Gliedern dritter Ordnung geht, da wir nur Grössen dritter Ordnung in Betracht ziehen

wollen, sofort $u_1, v_1, \varepsilon, \delta$ über in resp. $u', v', \varepsilon', \delta'$, und wir erhalten somit das Gesuchte: A ausgedrückt durch die Grössen $\Xi, H, Z, \alpha'_5, \beta'_5, \gamma'_5$ als:

$$(19) \left\{ \begin{aligned} A_1 = \frac{\gamma'_5}{r} \left[u'^2 + v'^2 + 2(u'^2 + v'^2) \frac{(\delta'_1 + Z)}{r} + 2 \left(\frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} u' + \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} v' \right)^2 \frac{(\delta'_2 + Z)}{r} \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{n^2 - 1}{n \gamma'_4 \gamma'_5} \right) (u'^2 + v'^2) \left(\frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} \frac{u'}{r} + \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} \frac{v'}{r} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Letztere Formel können wir auch direct aus (14) erhalten und uns auf diese Weise von der Richtigkeit der angewandten Umformungen überzeugen. Zu diesem Zwecke haben wir zunächst die Grössen $\varphi \cos \psi, \varphi \sin \psi$ durch $u', v', \alpha'_5, \beta'_5, \gamma'_5$ auszudrücken, und zwar folgt sofort aus den Formeln:

$$\begin{aligned} \varphi \cos \psi &= \frac{u_1}{r} + \frac{u_1}{r} \cdot \varepsilon_3 \cdot \frac{(\delta_1 + Z)}{r} + \frac{\alpha}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \varepsilon_3 \cdot \frac{(\delta_2 + Z)}{r} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\gamma} \left(2 - \frac{\gamma}{n \gamma_1} \right) \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2}, \\ \varphi \sin \psi &= \frac{v_1}{r} + \frac{v_1}{r} \cdot \varepsilon_3 \cdot \frac{(\delta_1 + Z)}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \varepsilon_3 \cdot \frac{(\delta_2 + Z)}{r} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\gamma} \left(2 - \frac{\gamma}{n \gamma_1} \right) \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2}, \end{aligned}$$

und:

$$\varphi' \cos \psi' = \frac{u'}{r} - \frac{1}{2} \frac{\alpha'_5}{n \gamma'_4} \frac{(u'^2 + v'^2)}{r^2},$$

$$\varphi' \sin \psi' = \frac{v'}{r} - \frac{1}{2} \frac{\beta'_5}{n \gamma'_4} \frac{(u'^2 + v'^2)}{r^2}, \quad \text{endlich:}$$

$$u_1 = u' - \varphi' \cos \psi' \cdot \varepsilon'_1 (\delta'_1 + Z) - \frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} \left(\frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} \varphi' \cos \psi' + \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} \varphi' \sin \psi' \right) \varepsilon'_1 (\delta'_2 + Z),$$

$$v_1 = v' - \varphi' \sin \psi' \cdot \varepsilon'_1 (\delta'_1 + Z) - \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} \left(\frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} \varphi' \cos \psi' + \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} \varphi' \sin \psi' \right) \varepsilon'_1 (\delta'_2 + Z),$$

dass:

$$\begin{aligned} \varphi \cos \psi &= \frac{u'}{r} + 2 \frac{u'}{r} \frac{(\delta'_1 + Z)}{r} + 2 \frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} \left(\frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} \frac{u'}{r} + \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} \frac{v'}{r} \right) \frac{(\delta'_2 + Z)}{r} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} \left(2 - \frac{\gamma'_5}{n \gamma'_4} \right) \frac{(u'^2 + v'^2)}{r^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi \sin \psi &= \frac{v'}{r} + 2 \frac{v'}{r} \frac{(\delta'_1 + Z)}{r} + 2 \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} \left(\frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} \frac{u'}{r} + \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} \frac{v'}{r} \right) \frac{(\delta'_2 + Z)}{r} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} \left(2 - \frac{\gamma'_5}{n \gamma'_4} \right) \frac{(u'^2 + v'^2)}{r^2}. \end{aligned}$$

Diese Formeln sind, abgesehen vom letzten Gliede, das einen Summand mehr enthält, den entsprechenden bei Hrn. Wangerin ganz analog gebaut. Führen wir mit ihnen die Entwicklung von (14) durch, so kommen wir genau wieder auf den Ausdruck (19) von Δ_1 .

Nachdem wir so in Δ_1 die Wegdifferenz des ersten Hauptpaares gefunden, haben wir auch die des zweiten zu ermitteln. Dies wird gebildet aus einem direct durchgegangenen und einem einmal an der Linse reflectirten Strahle, welch letzterer ebenfalls in der Richtung $\alpha'_5, \beta'_5, \gamma'_5$ die Linse verlassen soll.

Nennen wir für den Augenblick die Richtungscosinuse der einfallenden Strahlen des zweiten Hauptpaares $-a, -b, -c$, die des austretenden reflectirten Strahles $-a_5, -b_5, -c_5$, die des direct durchgegangenen $-a'_5, -b'_5, -c'_5$, so ist nach unserer Annahme $a_5 = \alpha'_5, b_5 = \beta'_5, c_5 = \gamma'_5$; wir haben also die Wegdifferenz dieses Strahlenpaares für a_5, b_5, c_5 zu berechnen und darin dann die Grössen α'_5 etc. einzuführen.

Um die Operation mit ganz neuen Grössen zu umgehen, denken wir uns die vorige Wegdifferenz Δ_1 berechnet für $\alpha_5, \beta_5, \gamma_5$, also für die Richtungscosinuse des reflectirt austretenden Strahles, sodann für α_5 etc. α_6 gesetzt und hierfür wieder α'_6 etc. Als Ausgangspunkt dient uns wieder Formel (15), wir haben in ihr nur von α, β, γ überzugehen auf $\alpha_5, \beta_5, \gamma_5$. Dazu gelangen wir abermals mit Berücksichtigung der Fig. 2 und 3 durch Anwendung desselben Verfahrens wie früher, mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie und finden successive:

$$(20) \begin{cases} \alpha = \alpha_2 - 2(\alpha_2 \varphi \cos \psi + \beta_2 \varphi \sin \psi - \gamma_2 \cos \varphi) \varphi \cos \psi, \\ \beta = \beta_2 - 2(\alpha_2 \varphi \cos \psi + \beta_2 \varphi \sin \psi - \gamma_2 \cos \varphi) \varphi \cos \psi, \\ \gamma = -\gamma_2 - 2(\alpha_2 \varphi \cos \psi + \beta_2 \varphi \sin \psi - \gamma_2 \cos \varphi) \cos \varphi. \\ \alpha_2 = \alpha_3; \quad \beta_2 = \beta_3; \quad \gamma_2 = \gamma_3. \\ \alpha_3 = n \left[\varphi_1 \cos \psi_1 \left(\frac{1}{n} \sqrt{1 - n^2 (1 - U_4^2)} - U_4 \right) + \alpha_4 \right], \\ \beta_3 = n \left[\varphi_1 \sin \psi_1 \left(\frac{1}{n} \sqrt{1 - n^2 (1 - U_4^2)} - U_4 \right) + \beta_4 \right], \end{cases}$$

$$(20) \begin{cases} \gamma_3 = n \left[\cos \varphi_1 \left(\frac{1}{n} \sqrt{1 - n^2(1 - U_4^2)} - U_4 \right) + \gamma_1 \right]; \\ \alpha_4 = \frac{1}{n} \alpha_3; \quad \beta_4 = \frac{1}{n} \beta_3; \quad \gamma_4 = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1} + \gamma_3^2. \end{cases}$$

Hierbei ist: $U_4 = \alpha_4 \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta_4 \varphi_1 \sin \psi_1 + \gamma_1 \cos \varphi_1$.

Wir hatten früher gesetzt:

$$\varepsilon_1 = \left(1 - \frac{n\gamma_1}{\gamma} \right); \quad \delta_1 = d' \left(1 - \frac{\gamma_1}{n\gamma_1} \right).$$

Dementsprechend führen wir ein:

$$(21) \begin{cases} \vartheta_1 = d' \left(1 - \frac{\gamma_5}{n\gamma_4} \right); & \vartheta_2 = d' \left(1 - \frac{\gamma_5^3}{n^3\gamma_4^3} \right), \\ v_{1h} = \left(1 - \frac{n\gamma_4}{\gamma_5} \right) \dots & v_{1h} = \left(h - \frac{n\gamma_4}{\gamma_5} \right), \\ u_2 = \Xi - \frac{\alpha_5}{\gamma_5} (\vartheta_1 + Z); & v_2 = H - \frac{\beta_5}{\gamma_5} (\vartheta_1 + Z), \end{cases}$$

wobei natürlich ϑ_1/r , u_2/r ganz von derselben Grössenordnung sind, wie δ_1/r , u_1/r etc.

Wandeln wir unter dieser Voraussetzung den Ausdruck (15) für Δ_1 um und bedenken, dass wir wiederum nur Grössen dritter Ordnung zu berücksichtigen haben, so ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 - \eta_3 \frac{u_2}{r} (\vartheta_1 + Z) - \eta_3 \cdot \frac{\alpha_5}{\gamma_5} \left(\frac{\alpha_5}{\gamma_5} \frac{u_2}{r} + \frac{\beta_5}{\gamma_5} \frac{v_2}{r} \right) (\vartheta_2 + Z), \\ v_1 &= v_2 - \eta_3 \frac{v_2}{r} (\vartheta_1 + Z) - \eta_3 \cdot \frac{\beta_5}{\gamma_5} \left(\frac{\alpha_5}{\gamma_5} \frac{u_2}{r} + \frac{\beta_5}{\gamma_5} \frac{v_2}{r} \right) (\vartheta_2 + Z); \\ \hline (u_1^2 + v_1^2) &= u_2^2 + v_2^2 - 2\eta_3(u_2^2 + v_2^2) \frac{\vartheta_1 + Z}{r} - 2\eta_3 \left(\frac{\alpha_5}{\gamma_5} u_2 + \frac{\beta_5}{\gamma_5} v_2 \right) \frac{(\vartheta_2 + Z)}{r}. \end{aligned}$$

Dies setzen wir ein und beachten noch $\gamma = \gamma_5 - \eta_3 \left(\alpha_5 (u_2/r) + \beta_5 (v_2/r) \right)$; gleichzeitig denken wir uns, wie vorher auseinandergesetzt, für α_5 , β_5 , γ_5 gesetzt a_5 , b_5 , c_5 und hierfür werden α_5' , β_5' , γ_5' , wodurch von selbst ϑ_1 und ϑ_2 , u_2 , v_2 , Δ_1 übergeht in δ_1' , δ_2' , u' , v' , Δ_1' , und erhalten somit als Wegdifferenz des zweiten Hauptpaares:

$$(22) \begin{cases} \Delta_1 = \frac{\gamma_5'}{r} \left[u'^2 + v'^2 - 2(u'^2 + v'^2) \frac{(\delta_1' + Z)}{r} - 2 \left(\frac{\alpha_5'}{\gamma_5'} u' + \frac{\beta_5'}{\gamma_5'} v' \right)^2 \frac{(\delta_2' + Z)}{r} \right. \\ \left. - (u'^2 + v'^2) \left(\frac{\alpha_5'}{\gamma_5'} \frac{u'}{r} + \frac{\beta_5'}{\gamma_5'} \frac{v'}{r} \right) + \frac{n^2 - 1}{n\gamma_4 n\gamma_5} (u'^2 + v'^2) \left(\frac{\alpha_5'}{\gamma_5'} \frac{u'}{r} + \frac{\beta_5'}{\gamma_5'} \frac{v'}{r} \right) \right]. \end{cases}$$

Die Wegdifferenz des ersten Hauptpaares war gegeben durch die Formel (19):

Nun ist in unserem Falle die Wegdifferenz der beiden Strahlen, die zu einem der beiden Hauptpaare gehören, allein massgebend für die Phasenänderung der Lichtwellen und somit für das Zustandekommen der Interferenzerscheinungen im Punkte F .

Es erleidet nämlich der reflectirte Strahl gegenüber dem direct durchgegangenen durch die doppelte Reflexion an einem optisch dichteren Mittel, der Glaslinse und der Glasplatte, einen Verlust von je einer halben, zusammen also von einer ganzen Wellenlänge; die durch den reflectirten Strahl hervorgerufene Bewegung des betreffenden Aethertheilchens in F ist also genau dieselbe, als ob auf dem durchlaufenen Wege gar kein Verlust durch Reflexion stattgefunden hätte. Wir sehen also, dass uns die Interferenz des ersten Hauptpaares in F Dunkelheit, resp. Helligkeit liefern wird, wenn die Wegdifferenz beider Strahlen beträgt ein ungerades, resp. ein gerades Vielfache einer halben Wellenlänge, und genau dasselbe gilt für das zweite Hauptpaar.

Es wird nach der früher gemachten Annahme derjenige Punkt F die grösste Dunkelheit, resp. Helligkeit zeigen, in dem die Interferenz beider Hauptpaare gleichzeitig Dunkelheit, resp. Helligkeit hervorruft, demnach wird für die dunkeln Punkte die Relation gelten:

$$\Delta_1 = \Delta_1' = (2h - 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Dies ist aber nur dann möglich, wenn die im Vorzeichen voneinander abweichenden Glieder dritter Ordnung in Δ_1 und Δ_2 für sich gewonnen gleich Null sind. Wir erhalten damit die beiden Gleichungen:

$$(23) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\gamma_s'}{r} \left[(u'^2 + v'^2) + \frac{n^2 - 1}{n\gamma_4' \gamma_5'} (u'^2 + v'^2) \left(\frac{\alpha_s'}{\gamma_5'} \frac{u'}{r} + \frac{\beta_s'}{\gamma_5'} \frac{v'}{r} \right) \right] = (2h - 1) \frac{\lambda}{2}, \\ & 2(u'^2 + v'^2) (\delta_1' + Z) + 2 \left(\frac{\alpha_s'}{\gamma_5'} u' + \frac{\beta_s'}{\gamma_5'} v' \right)^2 (\delta_2' + Z) \\ & \quad + (u'^2 + v'^2) \left(\frac{\alpha_s'}{\gamma_5'} u' + \frac{\beta_s'}{\gamma_5'} v' \right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Vergleichen wir dies Resultat mit dem entsprechenden von Hrn. Wangerin:

$$\frac{\lambda}{r}(u^2 + v^2) = h\lambda, \\ 2(u^2 + v^2)(\delta_1 - \zeta) + 2\left(\frac{\alpha}{\gamma}u + \frac{\beta}{\gamma}v\right)^2(\delta_2 - \zeta) + \left(\frac{\alpha}{\gamma}u + \frac{\beta}{\gamma}v\right)(u^2 + v^2) = 0,$$

so finden wir, abgesehen von dem Vorzeichen von Z , die beiden letzten Gleichungen vollkommen übereinstimmend, die beiden ersten dagegen ziemlich verschieden: Einmal haben wir in unserem Falle rechts $(2h - 1)(\lambda/2)$, beim reflectirten Lichte dagegen $h\lambda$; es ist dies natürlich darauf zurückzuführen, dass in dem von Hrn. Wangerin betrachteten Falle der an der Linse reflectirte Strahl gegenüber dem nur an der Glasplatte reflectirten wegen der einmaligen Reflexion an einem optisch dichteren Mittel einen Verlust von einer halben Wellenlänge erlitten hat, sodass die Interferenz der Hauptpaare da dunkle Punkte liefern wird, wo der Wegunterschied der beiden Strahlen nicht ein ungerades, sondern ein gerades Vielfache einer halben Wellenlänge, also $2h(\lambda/2) = h\lambda$ beträgt, wenn wir unter h jede beliebige ganze Zahl von 1 an bezeichnen. Ferner enthält unsere Gleichung noch ein ganzes Glied auf der linken Seite, das bei der entsprechenden Wangerin'schen Formel fehlt. Nun ist aber, wegen des Factors $[(\alpha'_6/\gamma'_6)(u'/r) + (\beta'_5/\gamma'_5)(v'/r)]$ das hinzugekommene Glied gegenüber dem ersten, unendlich klein; daran ändert auch der erste Factor $(n^2 - 1)/n\gamma'_4\gamma'_5$ nichts, da dieser nur für den Fall unendlich gross werden kann, wenn $\gamma'_5 = 0$ oder der Einfallswinkel des Lichtes 90° betrüge, ein Fall, von dem wir füglich absehen können. Aus diesem Grunde dürfen wir überhaupt, da wir in dem $(2h - 1)(\lambda/2)$ einen Maassstab für die Grösse $(u'^2 + v'^2)/r$ gefunden haben, das im Vergleiche hiermit unendlich kleine zweite Glied vernachlässigen, wodurch unsere Gleichung nicht nur der bei Hrn. Wangerin ganz entsprechend, sondern auch zum Gebrauche vollkommen tauglich wird.

Ehe wir jedoch dieses Resultat weiter ausnützen, untersuchen wir noch, welchen Einfluss die von derselben Wellenebene stammenden, durch F gehenden, aber mehrmals in

$$(26) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_3 \sin \psi_3 = \varphi_1 \sin \psi_1 - 2 \frac{\beta}{\gamma} \varphi_1^2 \quad \text{und allgemein:} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \varphi_h \cos \psi_h = \varphi_1 \cos \psi_1 - (h-1) \frac{\alpha}{\gamma} \varphi_1^2, \\ \varphi_h \sin \psi_h = \varphi_1 \sin \psi_1 - (h-1) \frac{\beta}{\gamma} \varphi_1^2, \end{array} \right.$$

und ganz entsprechend:

$$(27) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 \cos \psi_1 = \varphi_2 \cos \psi_2 + \frac{\alpha}{\gamma} \varphi_2^2, \\ \varphi_1 \sin \psi_1 = \varphi_2 \sin \psi_2 + \frac{\beta}{\gamma} \varphi_2^2, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \varphi_1 \cos \psi_1 = \varphi_h \cos \psi_h + (h-1) \frac{\alpha}{\gamma} \varphi_h^2, \\ \varphi_1 \sin \psi_1 = \varphi_h \sin \psi_h + (h-1) \frac{\beta}{\gamma} \varphi_h^2. \end{array} \right.$$

Weiter hängt a_h von a_{h-1} , b_h von b_{h-1} , c_h von c_{h-1} , ($h \leq k$) ebenso ab, wie früher $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ von resp. α, β, γ ; ferner $a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}$ von a_k, b_k, c_k und wieder $a_{k+2}, b_{k+2}, c_{k+2}$ von $a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}$, wie früher: $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4$ von $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ und $\alpha_5, \beta_5, \gamma_5$ von $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4$.

Wenden wir dies an, so finden wir für die verschiedenen a, b, c die Recursionsformeln:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha - 2\gamma \varphi_1 \cos \psi_1 - 2\varphi_1 \cos \psi_1 (\alpha \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta \varphi_1 \sin \psi_1) \\ b_1 &= \beta - 2\gamma \varphi_1 \sin \psi_1 - 2\varphi_1 \sin \psi_1 (\alpha \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta \varphi_1 \sin \psi_1) \\ c_1 &= \gamma + 2(\alpha \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta \varphi_1 \sin \psi_1) - 2\gamma \varphi_1^2, \\ a_2 &= a_1 - 2c_1 \varphi_2 \cos \psi_2 - 2\varphi_2 \cos \psi_2 (a_1 \varphi_2 \cos \psi_2 + b_1 \varphi_2 \sin \psi_2), \end{aligned}$$

oder durch Einsetzen der Werthe a_1, φ, ψ und mit Berücksichtigung der Grössen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} a_2 &= \alpha - 2.2\gamma \varphi_1 \cos \psi_1 - 2^2.2\varphi_1 \cos \psi_1 (\alpha \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta \varphi_1 \sin \psi_1) + 2\alpha \varphi_1^2 \\ b_2 &= \beta - 2.2\gamma \varphi_1 \sin \psi_1 - 2^2.2\varphi_1 \sin \psi_1 (\alpha \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta \varphi_1 \sin \psi_1) + 2\beta \varphi_1^2 \\ c_2 &= \gamma + 2.2(\alpha \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta \varphi_1 \sin \psi_1) - 2^2.2\gamma \varphi_1^2 - 2 \frac{(1-\gamma^2)}{\gamma} \varphi_1^2 \\ &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \text{und allgemein:} \\ (28) \left\{ \begin{array}{l} a_h = \alpha - h.2\gamma \varphi_1 \cos \psi_1 - h^2.2\varphi_1 \cos \psi_1 (\alpha \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta \varphi_1 \sin \psi_1) + h(h-1)\alpha \varphi_1^2 \\ b_h = \beta - h.2\gamma \varphi_1 \sin \psi_1 - h^2.2\varphi_1 \sin \psi_1 (\alpha \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta \varphi_1 \sin \psi_1) + h(h-1)\beta \varphi_1^2 \\ c_h = \gamma + h.2(\alpha \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta \varphi_1 \sin \psi_1) - h^2.2\gamma \varphi_1^2 - h(h-1) \frac{1-\gamma^2}{\gamma} \varphi_1^2. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ferner haben wir φ und ψ auszudrücken durch unsere früher gebrauchten Grössen $u_1, v_1, \alpha, \beta, \gamma$.

Nun ist, wie früher abgeleitet:

$$\xi_{k+1} = r \cdot \varphi_{k+1} \cos \psi_{k+1} = \Xi - \frac{a_{k+2}}{c_{k+2}}(d' + Z) + \frac{a_{k+1}}{c_{k+1}}(d' - \frac{1}{2}r\varphi_{k+1}^2)$$

oder:

$$\begin{aligned} & r \varphi_{k+1} \cos \psi_{k+1} \\ = & \Xi - \frac{\varphi_{k+1} \cos \psi_{k+1} (\sqrt{n^2 - 1 + U_{k+1}^2} - U_{k+1}) + a_k}{\sqrt{1 - n^2 + [\cos \varphi_{k+1} (\sqrt{n^2 - 1 + U_{k+1}^2} - U_{k+1}) + c_k]^2}} (d' + Z) \\ & + \frac{\varphi_{k+1} \cos \psi_{k+1} (\sqrt{n^2 - 1 + U_{k+1}^2} - U_{k+1}) + a_k}{\cos \varphi_{k+1} (\sqrt{n^2 - 1 + U_{k+1}^2} - U_{k+1}) + c_k} (d' - \frac{1}{2}r\varphi_{k+1}^2), \end{aligned}$$

wobei: $U_{k+1} = a_k \varphi_{k+1} \cos \psi_{k+1} + b_k \varphi_{k+1} \sin \psi_{k+1} + c_k \cos \varphi_{k+1}$.

Führen wir in diese Formeln die Werthe (26) und (28) ein und entwickeln ganz wie früher, nach Potenzen φ , so erhalten wir, mit Berücksichtigung der Grössen zweiter Ordnung und gleichzeitiger Anwendung der Werthe u_1, v_1 :

$$(29) \left\{ \begin{aligned} \varphi_{k+1} \cos \psi_{k+1} &= \frac{u_1}{r} + \varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{u_1}{r} \cdot \frac{(\delta_1 + Z)}{r} \\ &+ \varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \frac{(\delta_2 + Z)}{r} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{n\gamma_1} \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2}, \\ \varphi_{k+1} \sin \psi_{k+1} &= \frac{v_1}{r} + \varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{v_1}{r} \cdot \frac{(\delta_1 + Z)}{r} \\ &+ \varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \frac{(\delta_2 + Z)}{r} - \frac{1}{2} \frac{\beta}{n\gamma_1} \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2}. \end{aligned} \right.$$

Hier ist, wie früher:

$$\varepsilon_{2k+1} = \left(2k + 1 - \frac{n\gamma_1}{\gamma} \right), \quad \delta_1 = d' \left(1 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right), \quad \delta_2 = d' \left(1 - \frac{\gamma^2}{n^2\gamma_1^2} \right)$$

etc. gesetzt. Wenden wir darauf die Gleichung (27) an, so erhalten wir:

$$(30) \left\{ \begin{aligned} \varphi_1 \cos \varphi_1 &= \frac{u_1}{r} + \varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{u_1}{r} \cdot \frac{(\delta_1 + Z)}{r} + \varepsilon_{2k+1} \frac{\alpha}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \frac{(\delta_2 + Z)}{r} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\gamma} \left(2k - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2}, \\ \varphi_1 \sin \psi_1 &= \frac{v_1}{r} + \varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{v_1}{r} \cdot \frac{(\delta_1 + Z)}{r} + \varepsilon_{2k+1} \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \frac{(\delta_2 + Z)}{r} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\beta}{\gamma} \left(2k - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2} \end{aligned} \right.$$

und endlich allgemein:

$$(30) \left\{ \begin{aligned} q_h \cos \psi_h &= \frac{u_1}{r} + \varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{u_1 (\delta_1 + Z)}{r} + \varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \frac{(\delta_2 + Z)}{r} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\gamma} \left(2k - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2} - (h-1) \frac{\alpha}{\gamma} \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2}, \\ q_h \sin \psi_h &= \frac{v_1}{r} + \varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{v_1 (\delta_1 + Z)}{r} + \varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \frac{(\delta_2 + Z)}{r} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\gamma} \left(2k - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2} - (h-1) \frac{\beta}{\gamma} \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2}. \end{aligned} \right.$$

Durch Quadriren und Addiren ergeben sich hieraus die Werthe:

$$\begin{aligned} q_1^2 &= \frac{u_1^2 + v_1^2}{r^2} + 2\varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{(u_1^2 + v_1^2) (\delta_1 + Z)}{r^2} + 2\varepsilon_{2k+1} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right)^2 \frac{(\delta_2 + Z)}{r} \\ &\quad + \left(2k - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2}, \\ q_h^2 &= \frac{u_1^2 + v_1^2}{r^2} + 2\varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{(u_1^2 + v_1^2) (\delta_1 + Z)}{r^2} + 2\varepsilon_{2k+1} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right)^2 \frac{(\delta_2 + Z)}{r} \\ &\quad + \left(2k - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2} - 2(h-1) \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2}. \end{aligned}$$

Setzen wir in den soeben gewonnenen Formeln für $q_1 \cos \psi_1$; $q_1 \sin \psi_1$; q_1^2 : k einmal $= 1$ und dann $= 0$, so kommen wir, wie dies ja auch sein muss, genau auf die früher (cf. 12 und 13) berechneten Gleichungen für $q \cos \psi$, $q \sin \psi$; q^2 ; $q' \cos \psi'$, $q' \sin \psi'$, q'^2 .

Wir haben nun alle nöthigen Vorbereitungsformeln gewonnen, um den Werth Δ_k (cf. 25) in u_1 , v_1 ausdrücken zu können. Zunächst ergibt sich noch:

$$\begin{aligned} (\xi' - \xi_1) &= \left[\Xi - \frac{\alpha_3'}{\gamma_3} (d' + Z) + \frac{\alpha_4'}{\gamma_4} (d' + \zeta') - \Xi + \frac{\alpha_{k+2}}{c_{k+2}} (d' + Z) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha_{k+1}}{c_{k+1}} (d' + \zeta_{k+1}) + \sum_{h=1}^{h=k} \frac{c_h}{c_h} (\zeta_h + \zeta_{h+1}) \right], \\ (\eta' - \eta_1) &= \left[H - \frac{\beta_3'}{\gamma_3} (d' + Z) + \frac{\beta_4'}{\gamma_4} (d' + \zeta') - H + \frac{\beta_{k+2}}{c_{k+2}} (d' + Z) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta_{k+1}}{c_{k+1}} (d' + \zeta_{k+1}) + \sum_{h=1}^{h=k} \frac{b_h}{c_h} (\zeta_h + \zeta_{h+1}) \right]. \end{aligned}$$

Fassen wir alles zusammen, so erhalten wir einen der Formel (14) vollkommen entsprechenden Ausdruck, der auch für $k = 1$ in den letzteren übergehen würde:

$$(31) \left\{ \begin{aligned} A_h &= (d' + Z) \left[\frac{\alpha a_{k+2} + \beta b_{k+2} - 1}{c_{k+2}} - \frac{\alpha \alpha'_5 + \beta \beta'_5 - 1}{\gamma'_5} \right] \\ &+ (d' + \zeta) \left[\frac{\alpha \alpha'_4 + \beta \beta'_4 - n}{\gamma'_4} \right] - (d' + \zeta_{k+1}) \left[\frac{\alpha a_{k+1} + \beta b_{k+1} - n}{c_{k+1}} \right] \\ &+ \gamma (\zeta' - \zeta_1) + \sum_{h=1}^{h=k} \left(\frac{\alpha a_h + \beta b_h - 1}{c_h} \right) (\zeta_h + \zeta_{h+1}). \end{aligned} \right.$$

Hierin haben wir die kurz vorher abgeleiteten Reducionsformeln der Grössen a, b, c auf α, β, γ und der verschiedenen φ und ψ auf φ_1 und ψ_1 einzuführen. Dann gelangen wir für die einzelnen Summanden der Gleichung stets auf Ausdrücke, welche in die entsprechenden der bei der Auswerthung der Gl. (14) gefundenen übergehen, wenn wir in unseren jetzigen: $k = 1$ setzen, sodass wir darin eine gewisse Controle für die Rechnung sehen dürfen. Weiter ergibt sich, dass auch hier bei der Entwicklung nach φ_1 die sämmtlichen Grössen erster Ordnung wegfallen, wir haben also wieder Grössen dritter Ordnung zu berücksichtigen. Dabei reducirt sich der Ausdruck: $(\alpha a_h + \beta b_h - 1)/c_h$ auf $-\gamma$; ausserdem haben wir noch zu bedenken, dass nach den Formeln (30) die Ausdrücke φ_h^2 das h überhaupt nur im letzten Gliede enthalten, sonst aber ganz unabhängig davon sind. Danach wird, da wir die Grösse $(\alpha a_h + \beta b_h - 1)/c_h = -\gamma$ als constant vor das Summenzeichen setzen können:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{h=k} (\varphi_h^2 + \varphi_{h+1}^2) &= 2k \left[\frac{u_1^2 + v_1^2}{r^2} + 2 \cdot \varepsilon_{2k+1} \frac{(u_1^2 + v_1^2)(\delta_1 + Z)}{r} \right] \\ &+ 2 \cdot \varepsilon_{2k+1} \left(\frac{\alpha u_1}{\gamma r} + \frac{\beta v_1}{\gamma r} \right)^2 \frac{(\delta_2 + Z)}{r} + \left(2k - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) \left(\frac{\alpha u_1}{\gamma r} + \frac{\beta v_1}{\gamma r} \right) \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2} \\ &- 2 \left(\frac{\alpha u_1}{\gamma r} + \frac{\beta v_1}{\gamma r} \right) \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2} \left[\sum_{h=1}^{h=k} (h-1) + \sum_{h=1}^{h=k} (h) \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Es ist aber: } \left[\sum_{h=1}^k (h-1) + \sum_{h=1}^k (h) \right] = k^2.$$

Führen wir endlich auch in den übrigen Summanden von Δ_k für die $\varphi_1 \cos \psi_1$ und $\varphi_1 \sin \psi_1$ etc. ihre Ausdrücke in u_1, v_1 ein, so ergibt sich schliesslich das Resultat:

$$\begin{aligned} \Delta_k = & \frac{\gamma}{r} \cdot k \left\{ (u_1^2 + v_1^2) + 2 \cdot \varepsilon_{k+1} (u_1^2 + v_1^2) \frac{(\delta_1 + Z)}{r} \right. \\ & + 2 \varepsilon_{k+1} \left(\frac{\alpha}{\gamma} u_1 + \frac{\beta}{\gamma} v_1 \right)^2 \frac{(\delta_2 + Z)}{r} \\ & \left. + \left(k + 1 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) (u_1^2 + v_1^2) \right\} \end{aligned}$$

oder, wenn man mit Hülfe der früher gewonnenen Formeln (cf. 18 etc.) von den Grössen u_1, v_1 (α, β, γ) übergeht zu u', v' (α', β', γ'):

$$\begin{aligned} \Delta_k = & k \cdot \frac{\gamma'}{r} \left\{ (u'^2 + v'^2) + 2k (u'^2 + v'^2) \frac{(\delta_1' + Z)}{r} \right. \\ & + 2k \left(\frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} u' + \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} v' \right)^2 \frac{(\delta_2' + Z)}{r} + \left(k + \frac{n^2 - 1}{n\gamma'_4 \gamma'_5} \right) \left(\frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} \frac{u'}{r} + \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} \frac{v'}{r} \right) (u'^2 + v'^2) \Big\} \\ & = k \Delta_1 + k(k-1) \cdot \frac{\gamma'_5}{r} \left\{ 2 (u'^2 + v'^2) \frac{(\delta_1' + Z)}{r} \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} u' + \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} v' \right)^2 \frac{(\delta_2' + Z)}{r} + \left(\frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} \frac{u'}{r} + \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} \frac{v'}{r} \right) (u'^2 + v'^2) \right\}. \end{aligned}$$

Dieser letzte Klammerausdruck ist aber wegen (23) = Null, wir erhalten demnach:

$$(32) \quad \left\{ \Delta_k = k \cdot \Delta_1 = k(2h-1) \frac{\lambda}{2} \right.$$

Dieses Resultat: $\Delta_k = k \Delta_1$, stimmt, äusserlich betrachtet, mit dem von Wangerin für reflectirtes Licht gefundenen vollkommen überein, es wäre jedoch falsch, wollten wir mit ihm daraus den Schluss ziehen, dass, wie dort, die sämtlichen übrigen, mehrfach in der Luftlamelle reflectirten Strahlen an dem Resultate, das uns die beiden Hauptstrahlenpaare liefern, nichts mehr ändern können: Im reflectirten Lichte findet nämlich, wie schon früher erwähnt, in denjenigen Punkten durch Interferenzerscheinungen Dunkelheit statt, in denen die Wegdifferenz der interferirenden Strahlen ein beliebiges Vielfache einer ganzen Wellenlänge beträgt, — dieser Bedingung genügt aber auch $\Delta_k = k \Delta_1 = k \cdot h \cdot \lambda$, wo k und h beliebige, ganze Zahlen sind; es ist also der

Schluss jedenfalls berechtigt, dass es im reflectirten Lichte nahezu absolut dunkle Punkte gibt. (Uns sagt u.)

Anders dagegen beim durchgehenden Lichte. Uns sagt nämlich Gleichung (32), dass der gefundene Werth von A_k nur dann der Forderung absoluter Dunkelheit entsprechen würde, wenn k eine ungerade Zahl wäre; ist dagegen k eine gerade Zahl, so ist A_k gleich einem Vielfachen einer ganzen Wellenlänge, die Interferenz des mehrfach reflectirten mit dem direct durchgegangenen Strahle wird deshalb kein Minimum, sondern ein Maximum von Licht verursachen. Nun aber gehen neben dem gar nicht reflectirten Strahle durch den Punkt F im allgemeinen eine grosse Menge von Strahlen, die von derselben Wellenebene stammen, also untereinander interferiren, und von dem der eine einmal, der andere zweimal, ein k . k mal an der Linse reflectirt war. Fassen wir, wie bisher, den direct durchgegangenen und den einmal reflectirten Strahl zusammen und nehmen an, ihre Wegdifferenz sei $= (2h - 1) \cdot \lambda/2$, so wird, was diese Hauptstrahlen betrifft, in dem betreffenden Punkte F Dunkelheit herrschen; — zwar, genau genommen, auch nicht vollkommen, denn der reflectirte Strahl hat durch eine doppelte Reflexion an Glasplatte und Linse eine nicht unbedeutende Schwächung seiner Intensität erfahren, es wird also die durch den direct hindurchgegangenen Strahl bewirkte Bewegung des Aethertheilchens in F durch den einmal reflectirten Strahl auch nicht vollkommen aufgehoben werden können. Nehmen wir dann die zwei- und dreimal an der Linse reflectirten Strahlen zusammen, so haben diese in F untereinander wieder eine Wegdifferenz von $(2h - 1)/2$ Wellenlänge, sie würden also, für sich betrachtet, wieder Dunkelheit geben, die nur dadurch wieder unvollkommen ist, weil der eine der Strahlen gegenüber dem zweiten durch eine um 2 vermehrte Anzahl von Reflexionen einen Theil seiner Intensität eingebüsst hat, — und so können wir weiter verfahren, bis wir schliesslich bei höheren Werthen von k auf Strahlen kommen, deren Intensität durch die grosse Anzahl von Reflexionen so gering ist, dass wir sie überhaupt nicht mehr zu berücksichtigen brauchen. Wir werden also allgemein

auch trotz der Einwirkung der mehrfach reflectirten Strahlen da Dunkelheit haben, wo die beiden Hauptpaare allein sie hervorbringen würden, — aber eben nicht vollkommene. (Dieselbe Betrachtungsweise, die wir für die mehrfach reflectirten Strahlen des einen Hauptpaares angewendet, gilt natürlich auch für die des zweiten und führt zu demselben Resultate.)

Im Gegensatze hierzu haben wir ganz helle Stellen, denn diese finden sich überall da, wo $\mathcal{A}_1 = h\lambda$, wobei h eine beliebig ganze Zahl sein kann, und dieser Bedingung genügt ja auch $\mathcal{A}_k = k.h\lambda$. Bei dem von Hrn. Wangerin untersuchten Falle des reflectirten Lichtes dagegen sind umgekehrt die hellen Stellen nicht vollkommen hell, denn er hat für das Zustandekommen der hellen Stellen dieselbe Bedingung, wie wir für das Zustandekommen der dunklen, es werden also dort die mehrfach reflectirten Strahlen etwas störend wirken.

Wir gehen nun weiter zur genauen Untersuchung der Lage der dunklen Punkte, wie dieselben durch die Interferenz der massgebenden Hauptpaare hervorgebracht werden.

Wir hatten in (23) die beiden Bedingungsgleichungen für das Zustandekommen der dunklen Punkte, resp. Ringe, gefunden und können diese zunächst noch dadurch etwas umformen, dass wir den bisher beliebig in der $\mathcal{Z}$ - H -Ebene angenommenen Axen eine bestimmte Richtung geben, und zwar soll die $\mathcal{Z}$ -Axe parallel sein der Projection der Mikroskopaxe ($\alpha'_5, \beta'_5, \gamma'_5$) auf die $\mathcal{Z}$ - H -Ebene, und, wie bisher, ihr positiver Theil der Lichtquelle zugekehrt. Nennen wir dann den Winkel zwischen der Z -Axe und der Richtung der in der Mikroskopaxe verlaufenden Hauptstrahlen, die sich von der der einfallenden Strahlen nur um kleine Grössen von der Ordnung ϑ unterscheidet, $= \vartheta$, den dazu gehörigen Brechungswinkel in der Linse $= \vartheta_1$, so haben wir zu setzen:

$$\begin{aligned}\alpha'_5 &= \sin \vartheta; & \beta'_5 &= 0; & \gamma'_5 &= \cos \vartheta; \\ \gamma'_1 &= \cos \vartheta_1 = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1 + \cos^2 \vartheta}.\end{aligned}$$

Hierdurch gehen unsere obigen Formel über in:

$$(33_a) \quad \left\{ [\bar{Z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta_1' + Z)]^2 + H^2 = \frac{(2h-1)r \cdot \lambda}{2 \cos \vartheta} = a_1^2, \right.$$

$$(33_b) \quad \left\{ \begin{aligned} & \operatorname{tg} \vartheta [\bar{Z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta_1' + Z)] + 2(\delta_1' + Z) \\ & + 2(\delta_2' + Z) \operatorname{tg}^2 \vartheta \frac{[\bar{Z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta_1' + Z)]^2}{[\bar{Z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta_1' + Z)]^2 + H^2} = 0, \end{aligned} \right.$$

$$\text{wobei: } \delta_1' = d' \left(1 - \frac{\cos \vartheta}{n \cos \vartheta_1} \right); \quad \delta_2' = d' \left(1 - \frac{\cos^3 \vartheta}{n^3 \cos^3 \vartheta_1} \right).$$

Vergleichen wir damit die entsprechenden von Hrn. Wangerin für reflectirtes Licht gefundenen Formeln:

$$[\bar{Z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta_1 - Z)]^2 + H^2 = \frac{hr\lambda}{\cos \vartheta} = a^2,$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \vartheta [\bar{Z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta_1 - Z)] + 2(\delta_1 - Z) \\ & + 2(\delta_2 - Z) \operatorname{tg}^2 \vartheta \frac{[\bar{Z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta_1 - Z)]^2}{[\bar{Z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta_1 - Z)]^2 + H^2} = 0, \end{aligned}$$

so ergibt sich, dass unsere beiden Gleichungen — abgesehen von der verschiedenen Bedeutung der Grössen a und a_1 und der in den δ enthaltenen Grössen d und d' , von denen das erste, bei Hrn. Wangerin, die Dicke der Glasplatte, das zweite, bei uns, die Dicke der Linse bezeichnet, vollkommen ineinander übergehen, wenn wir die positive Z -Axe, statt senkrecht nach oben, senkrecht nach unten legen. Diese Veränderung gestattet uns dann, die von Hrn. Wangerin gefundenen Resultate unter Berücksichtigung der oben angegebenen Abweichungen sofort auf unseren Fall zu übertragen.

Zuvor aber lassen sich die gefundenen Formeln noch in andere umwandeln, die zur Untersuchung der Interferenzfläche in mancher Beziehung noch mehr geeignet sind, als die Gleichungen (34). Wir erhalten dieselben, wenn wir von dem rechtwinkligen Coordinatensystem $\bar{Z}, H, Z$ zu einem schiefwinkligen X, Y, Z übergehen, dessen Anfangspunkt in dem scheinbaren Berührungspunkte P_1 von Linse und Platte liegt (cf. Fig. 5), und der gegeben ist durch die Gleichungen:

$$\bar{Z}_0 = -d' (n^2 - 1) \operatorname{tg}^3 \vartheta_1; \quad Z_0 = d' \left(1 - \frac{\cos^3 \vartheta}{n^3 \cos^3 \vartheta_1} \right).$$

Hierbei mögen die X - und Y -Axe den bisherigen $\bar{Z}$ - und H -Axen parallel sein, die Z -Axe dagegen die Richtung der

Mikroskopaxe haben, wodurch wir die Transformationsformeln erhalten:

$$\Xi = \Xi_0 + x - z \sin \vartheta; \quad H = y; \quad Z = Z_0 + z \cos \vartheta.$$

Damit aber werden unsere Formeln (34) zu:

$$(34) \begin{cases} x^2 + y^2 = a_1^2 \\ x(x^2 + y^2) \sin \vartheta - 2z(x^2 + y^2 \cos^2 \vartheta) + 2(\delta_1 - \delta_2)y^2 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta = 0. \end{cases}$$

Auch diese Formeln stimmen mit den Wangerin'schen vollkommen überein, und sie sind es auch, auf welche wir kommen, wenn wir den vollkommen strengen, von Hrn. Wangerin in der 2. Abhandlung¹⁾ eingeschlagenen Weg betreten. Hierbei dürfen wir uns jedoch darauf beschränken, den Gang nur kurz zu skizziren, da es sich sofort ergibt, dass wir mit einigen geringen Aenderungen die ganze Wangerin'sche Ableitung für unseren Fall benutzen dürfen, ausserdem aber die für unseren Fall nothwendige und von der Wangerin'schen mitunter abweichende Ableitung der Wegdifferenz Δ schon oben gegeben wurde.

Zunächst gilt für unseren Fall, dass durch das Zusammenwirken zweier beliebiger, im Punkte F interferirender Strahlen, von denen der eine direct durchgegangen, der andere ein- oder mehreremal in der Lamelle reflectirt wurde, eine Intensität entsteht, die gegeben ist durch einen Ausdruck der Form:

$$M^2 + N^2 + 2MN \cos\left(\frac{\Delta}{\lambda} 2\pi\right),$$

wobei Δ wieder die Wegdifferenz der betreffenden Strahlen in F , λ die Wellenlänge und M und N die Amplituden der componirenden Wellenbewegungen bedeuten. Der Unterschied von der entsprechenden Formel beim reflectirten Licht beruht auf dem Vorzeichen des dritten Gliedes, das dort $-$, hier aber wegen der doppelten Reflexion des einen Strahles an Glasplatte und Linse und der sich daraus ergebenden doppelten Phasenänderung $= +$ sein muss. Dieser Unterschied ist eigentlich der einzige in Betracht kommende, der sich aber durch die ganze folgende Entwicklung hindurchzieht.

1) Wangerin, Wied. Ann. 20. p. 177. 1883.

Es wird nun die Intensität, hervorgerufen durch die Gesammtheit aller in F interferirenden Strahlenpaare, die nur kleine Winkel miteinander bilden — und nur diese kommen ja in Betracht —, gegeben durch den Ausdruck:

$$J = m \iint \left\{ M^2 + N^2 + 2MN \cos \left(\frac{A}{\lambda} 2\pi \right) \right\} dF$$

$$= m\pi\varphi_1^2 \left\{ M^2 + N^2 + 2MN \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot A \right) 2 \cdot \frac{J_1(u_1)}{u_1} \right\}.$$

Hierbei ist m ein constanter Factor, J_1 die Bessel'sche Function mit dem Index 1, deren Argument:

$$u_1 = \varphi_1 \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{B^2 + C^2};$$

φ_1 ist der Winkel, unter welchem die Oeffnung des Beobachtungsinstrumentes, — resp. der beobachtenden Pupille, vom Punkte F aus erscheint, also jedenfalls eine sehr kleine Grösse, A , B , C aber sind Grössen, hergenommen aus dem Ausdrucke:

$$A = A + B\varphi \cos \psi + C\varphi \sin \psi,$$

in welcher Form, wie Hr. Wangerin nachweist, der Wegunterschied der betreffenden Strahlen sich jederzeit darstellen lässt, wenn man unter φ und ψ Kugelkoordinaten versteht mit demjenigen Punkte als Pol, der gegeben ist durch den Durchschnitt eines von F ausgehenden Axenstrahls und einer um F beschriebenen Kugelschale mit dem Radius 1. Dieser Axenstrahl kann dann betrachtet werden als die Axe eines Rotationskegels, in dem sämmtliche das Auge treffende, wirksame und direct hindurchgegangene Strahlen sich befinden, zu deren jedem ein reflectirter, mit dem ersteren interferirender Strahl gehört, und zwar wird dieser Kegel, dessen Winkel an der Spitze $= \varphi_1/2$ natürlich eine sehr kleine Oeffnung haben.

Aus der letzten Gleichung geht direct hervor, dass $J = \text{Minimum}$ in den Fällen, wo gleichzeitig $J_1(u_1)/u_1 = \text{Maximum}$ und $\cos(2\pi/\lambda \cdot A) = -1$, d. h. wo $A = (2h-1)\lambda/2$, wobei h alle natürlichen Zahlen bedeuten kann, — es ist aber $J_1(u_1)/u_1 = \text{Maximum}$ für $\sqrt{B^2 + C^2} = \text{Minimum}$.

Nun hatten wir früher gefunden, dass $A = (\gamma'_s/r)(u'^2 + v'^2) + \text{Glieder dritter Ordnung}$, die, wie Hr. Wangerin nach-

weist, hier nicht zu berücksichtigen sind, da die Richtungsunterschiede der überhaupt wirksamen Strahlen selbst schon so unendlich gering sind, dass durch eine Berücksichtigung der höheren Glieder von A Werthe erhalten würden von einer Ordnung, die stets vernachlässigt wurde.

Wandeln wir den Ausdruck:

$$A = \frac{\gamma_s'}{r} (u'^2 + v'^2) = \frac{\gamma_s'}{r} \left\{ \left[\bar{z} - \frac{\alpha_s'}{\gamma_s'} (\delta_1' - Z) \right]^2 + \left[H - \frac{\beta_s'}{\gamma_s'} (\delta_1' - Z) \right]^2 \right\}$$

mit Hülfe des eben angegebenen Kugelkoordinatensystems um und führen ausserdem unsere früher angewandten Coordinaten x, y, z , sowie den Winkel ϑ ein, so folgt:

$$A = \frac{1}{r} [(x^2 + y^2) \cos \vartheta - 2xz \varphi \cos \psi + (x^2 + y^2) \sin \vartheta \varphi \cos \psi + 2y(z + z_1) \cos \vartheta \varphi \sin \psi].$$

Durch Vergleichung mit dem oben angegebenen allgemeinen Ausdrücke:

$$A = A + B \varphi \cos \psi + C \varphi \sin \psi$$

finden wir aber:

$$A = \frac{(2h-1)\lambda}{2} = \frac{(x^2 + y^2) \cos \vartheta}{r},$$

$$B = \frac{1}{r} [(x^2 + y^2) \sin \vartheta - 2xz \varphi \cos \psi]; \quad C = \frac{2y(z + z_1) \cos \vartheta}{r}.$$

Nun war für die Stellen der Minima von Lichtintensität die Bedingung gültig, dass $B^2 + C^2 = \text{Minimum}$, — wir haben also z , das durch die Bedingung $A = (x^2 + y^2) \cos \vartheta / r$ gar nicht berührt wird, so zu bestimmen, dass für gegebene Werthe von x, y eben $B^2 + C^2 = \text{Minimum}$, d. h. dass:

$$B \cdot \frac{\partial B}{\partial z} + C \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Daraus erhalten wir aber:

$$(x^2 + y^2) x \sin \vartheta - 2z(x^2 + y^2 \cos^2 \vartheta) + 2(\delta_1 - \delta_2) y^2 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta = 0.$$

Dies ist aber genau die Gleichung unserer Interferenzfläche (cf. 34_b), während uns der Werth von A direct die zweite, früher gefundene Formel liefert:

$$x^2 + y^2 = \frac{(2h-1)\lambda r}{2 \cos \vartheta} = a_1^2.$$

Es erübrigt noch, bevor wir aus (33) und (34) die allgemeinen Schlüsse ziehen, auf die Strahlenpaare Rücksicht zu nehmen, die zwar auch im Punkte F zur Interferenz gelangen, von denen aber kein Strahl vollkommen in der Richtung der Mikroskopaxe verläuft, sondern die sämtlich sehr kleine Winkel mit derselben einschliessen, — denn dass nur solche in unser Auge gelangen und zu berücksichtigen sind, liegt bei unserer Annahme von dem nahezu parallelen Einfall der Strahlen sowie bei dem relativ geringen Durchmesser des beobachtenden Instrumentes, resp. unserer Pupille, auf der Hand. Nun hatten wir gefunden (cf. 19 und 22):

$$\Delta = \frac{\gamma'_5}{r} \left[u'^2 + v'^2 + (u'^2 + v'^2) \left(\frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} \frac{u'}{r} + \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} \frac{v'}{r} \right) \frac{n^2 - 1}{n \gamma'_4 \cdot \gamma'_5} \right] + \text{andere}$$
 Glieder dritter Ordnung], oder, wenn wir mit k_1 das in Δ_1 und Δ'_1 übereinstimmende, mit k_2 die in beiden verschiedenen Glieder dritter Ordnung bezeichnen:

$$\Delta_1 = \frac{\gamma'_5}{r} [u'^2 + v'^2 + k_1 + k_2]; \quad \Delta'_1 = \frac{\gamma'_5}{r} [u'^2 + v'^2 + k_1 - k_2].$$

Wir wollen die Werthe $\alpha'_5, \beta'_5, \gamma'_5$ um sehr kleine Grössen $\delta\alpha'_5, \delta\beta'_5, \delta\gamma'_5$ verändern, wodurch gleichzeitig u' in $u' + \delta u'$; v' in $v' + \delta v'$ übergeht, k_1 und k_2 in resp. $k_1 + \delta k_1$; $k_2 + \delta k_2$. Dann erhalten wir für alle beliebige solcher, durch den Punkt F gehender Strahlenpaare eine Wegdifferenz, gegeben durch:

$$\Delta' = \frac{\gamma'_5 + \delta\gamma'_5}{r} [(u' + \delta u')^2 + (v' + \delta v')^2 + (k_1 + \delta k_1) \pm (k_2 + \delta k_2)].$$

Hierbei dürfen wir sicher annehmen, dass die Werthe der Grössen $\delta\alpha$ etc. die Grösse u'/r , die wir ja als sehr klein, und zwar von der Ordnung φ betrachtet hatten, nicht übersteigen; dann aber werden die Grössen $\delta u'^2, \delta v'^2, \delta k_1, \delta k_2$ einer höheren Ordnung des unendlich Kleinen angehören, als wir sie bisher in die Untersuchung aufgenommen hatten, sie sind also zu vernachlässigen, und es ergibt sich:

$$\Delta' = \frac{\gamma'_5}{r} [u'^2 + v'^2 + k_1 \pm k_2 + 2(u' \delta u' + v' \delta v')] + \frac{\delta\gamma'_5}{r} (u'^2 + v'^2),$$

oder, wegen $\gamma'_5/r (u'^2 + v'^2 + k_1) = (2h - 1)\lambda/2$ und $k_2 = 0$:

$$\Delta' = \frac{(2h - 1)\lambda}{2} + \frac{2\gamma'_5}{r} (u' \delta u' + v' \delta v') + \frac{\delta\gamma'_5}{r} (u'^2 + v'^2).$$

Die Punkte, für welche $\mathcal{A}' = (2h - 1)\lambda/2$, würden also diejenigen sein, in denen nicht nur die Hauptstrahlenpaare, sondern sämtliche in den betreffenden Punkten interferierenden und ins Auge gelangenden Strahlenpaare ein Minimum der Intensität lieferten. Für die anderen Punkte, in welchen:

$$\frac{2\gamma'_5}{r}(u'\delta u' + v'\delta v') + \frac{\delta\gamma'_5}{r}(u'^2 + v'^2) \text{ zwar nicht } = 0,$$

aber doch sehr klein ist, werden wir auch kein Minimum der Intensität, aber doch nur eine geringe Intensität des Lichtes, d. h. immerhin noch verhältnissmässige Dunkelheit haben. Wir müssen also untersuchen:

Wann wird $\mathcal{A}' - (2h - 1)\lambda/2 = 0$ oder sehr klein?

Zu diesem Zwecke führen wir für $\alpha'_5, \beta'_5, \gamma'_5$ neue Variablen ein, indem wir setzen:

$\alpha'_5 = \sin \vartheta \cos \mu, \quad \beta'_5 = \sin \vartheta \sin \mu, \quad \gamma'_5 = \cos \vartheta$
und untersuchen, welchen Werth $\mathcal{A}' - (2h - 1)\lambda/2$ erhält bei Veränderung der Grössen ϑ, μ um die kleinen Werthe $\delta\vartheta, \delta\mu$, wobei wir dann das Coordinatensystem so legen, dass die Ξ -Axe wieder parallel der Projection der Mikroskopaxe auf die Ξ -H-Ebene wird, ϑ den Winkel zwischen der Z-Axe und der Mikroskopaxe bezeichnet und $\mu = 0$ wird (aber nicht $\delta\mu$!). Hierdurch erhalten wir:

$$\mathcal{A}' - \frac{(2h-1)\lambda}{2} = \delta\vartheta \left\{ -\operatorname{tg} \vartheta \cdot \frac{(2h-1)\lambda}{2} + \frac{2}{r \cos \vartheta} [\bar{z} + \operatorname{tg} \vartheta (Z - \delta_1)] (Z - Z_0) \right\} \\ + \delta\mu \cdot \frac{2 \sin \vartheta \cdot H(Z - \delta_1)}{r}.$$

Führen wir hier unser früheres Coordinatensystem X, Y, Z ein und benutzen noch Gleichung (34_b), so folgt endlich:

$$(35_a) \left\{ \begin{aligned} & r \left(\mathcal{A}' - \frac{(2h-1)\lambda}{2} \right) \\ & = \left[\frac{(x^2 + y^2) \sin \vartheta + 2z_1 x}{x^2 + y^2 \cos^2 \vartheta} \right] y \cdot \cos \vartheta \left[-y \cos \vartheta \cdot \delta\vartheta + x \sin \vartheta \cdot \delta\mu \right] \end{aligned} \right.$$

$$(35_b) \left\{ \begin{aligned} & = \frac{2(z + z_1) y \cdot \cos \vartheta}{x} \cdot (-y \cos \vartheta \cdot \delta\vartheta + x \sin \vartheta \cdot \delta\mu), \end{aligned} \right.$$

wobei:

$$z_1 = \frac{(\delta_2' - \delta_1') \sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta}.$$

War dieser Ausdruck $= 0$ für irgend einen Punkt x, y, z , — welchen Werth dabei auch $\delta\vartheta, \delta\mu$ haben mag, — natürlich innerhalb der oben angegebenen beschränkten Grenzen, dann findet also nicht nur für die beiden Hauptstrahlenpaare, sondern auch für jedes andere in Betracht kommende Strahlenpaar in diesem Punkte eine vollkommene Interferenz statt, d. h. wir haben dann einen dunklen Punkt vor uns.

Wir können die Schlüsse, die sich aus den Gleichungen (33), (34), (35) wegen deren Analogie mit den entsprechenden für reflectirtes Licht ohne weiteres ziehen lassen, folgendermassen kurz zusammenfassen:

Auch beim durchgehenden, — ebenso wie beim reflectirten Lichte liegen die Newton'schen Farbenringe auf einer Regelfläche dritter Ordnung, die sich nur in dem Falle auf eine Ebene reducirt, wenn der Einfallswinkel $= 0$ ist. Sie entsteht in der Weise, dass eine Gerade, die auf der einen unendlich grossen Directrix $R_1 M_1' \dots$ (cf. Fig. 5) hingleitet, zugleich die zweite, endliche Directrix $P_1 Q_1$ so schneidet, dass:

$$R_1 M_1' = \pm \frac{2 \cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta} \cdot P_1 Q_1 \sqrt{\frac{P_1 M_1}{P_1 Q_1}}.$$

Diese zweite, endliche Directrix hat die Richtung der Mikroskopaxe, der Punkt P_1 ist der scheinbare Berührungspunkt von Linse und Platte, den Punkt Q_1 erhalten wir, wenn wir das auf den Punkt P_1 eingestellte Mikroskop um das Stück:

$$P_1 Q_1 = z_1 = \frac{(n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \vartheta_1}{n \cos \vartheta_1} d' = \frac{(\delta_2' - \delta_1') \sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta}$$

in der Richtung seiner Axe verschieben.

Die erste unendlich grosse Directrix $R_1 M_1'$ verläuft parallel zur Y -Axe; der Punkt R_1 liegt auf der sogenannten Hauptgeraden $H_1 - H_1$, deren Gleichung wir aus (33_b) erhalten, wenn wir darin $H = O$ setzen, und die mit der Z -Axe einen Winkel ω bildet, der gegeben ist durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{1 + \cos^2 \vartheta}.$$

Das Stück $R_1 P_1$ ergibt sich aus der Gleichung:

$$R_1 P_1 = \frac{P_1 Q_1 \cdot \cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta}.$$

Diese so erhaltene Interferenzfläche unterscheidet sich nun von der beim reflectirten Lichte nur dadurch, dass letztere unter anderem nur abhängt von der Dicke der Glasplatte, erstere dagegen von der Dicke der Glaslinse. Sind beide Dicken gleich, so stimmen auch beide Interferenzflächen mit ihren sämtlichen ausgezeichneten Linien und Punkten vollkommen überein, dagegen liegen beide entgegengesetzt, so zwar, dass die eine genau das Spiegelbild der anderen in Bezug auf die untere Fläche der Glasplatte darstellt. Wir würden also nach (33) die Gleichung für beide Interferenzflächen zusammenschreiben können:

$$\begin{aligned} & 2\{[\bar{z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta_1 \pm Z)]^2 + H^2\} (\delta_1 \pm Z) \\ & + 2 \operatorname{tg}^2 \vartheta [\bar{z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta_1 \pm Z)]^2 (\delta_2 \pm Z) \\ & + \operatorname{tg} \vartheta [\bar{z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta_1 \pm Z)] \{[\bar{z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta_1 \pm Z)]^2 + H^2\} = 0, \end{aligned}$$

wobei das obere Zeichen für die Interferenzfläche des reflectirten, das untere für die des durchgehenden Lichtes gilt und bei ersterer das in den δ enthaltene d die Dicke der Glasplatte, bei letzterer die der Glaslinse bezeichnet.

Schneiden wir die Interferenzfläche durch Ebenen, parallel der centralen Einfallsebene, welch letztere characterisirt ist durch die Gleichung $H = 0$, so erhalten wir Curven von der Form Fig. 6, die wieder als Spiegelbilder der entsprechenden Curven beim reflectirten Lichte anzusehen sind. In Fig. 6 sind zwei solcher Curven in einer Ebene gezeichnet; dieselben schneiden sich, — so viele man deren auch zeichnen wollte, sämtlich in R_1 , haben eine gemeinschaftliche Tangente in Q_1 und die Hauptgerade $H_1 - H_1$ zur Asymptote.

Die XZ -Ebene ist eine Symmetrieebene für die Fläche, nicht aber die YZ -Ebene (centrale Querebene) und die XY -Ebene (Horizontalebene). Die durch die Hauptgerade und die Y -Axe gelegte Ebene (die Hauptebene) schneidet die Fläche in einer Geraden, die durch R_1 senkrecht zur Einfallsebene geht und als die eine Directrix bereits früher erwähnt wurde. Die Entfernung der Curven, die durch

Schnitte parallel der XZ -Ebene gebildet sind, von der Hauptebene, gemessen in der Richtung unserer Z -Axe, hat zwei Maxima, ein kleineres unterhalb und ein grösseres oberhalb der Hauptebene, und zwar liegen diese Maxima um so näher an der centralen Querebene, je näher der betreffende Schnitt der XZ -Ebene kommt, sie werden aber auch um so kleiner und schliesslich $= 0$. Je weiter man sich umgekehrt von derselben, der centralen Einfallsebene, entfernt, desto mehr nimmt die Senkung der lichtnahen Hälfte unter die Hauptebene und die Entfernung der lichtfernen Hälfte über dieselbe zu, — an Grösse überwiegt immer die letztere.

Auf dieser Interferenzfläche liegen sämtliche Ringe. Diese sind Curven doppelter Krümmung, und zwar Durchschnitte der coaxialen, elliptischen Cylinder, deren Leitlinien parallel der Mikroskopaxe laufen, mit der Interferenzfläche. Die Projection der Ringe in der Richtung der Mikroskopaxe auf eine Horizontalebene ergibt ein System von concentrischen Kreisen. Die in der centralen Einfallsebene befindlichen Ringdurchmesser liegen alle auf der Hauptgeraden, deren Neigung gegen die Horizontalebene, — ebenfalls abhängig vom Einfallswinkel des Lichtes, genau übereinstimmt mit den entsprechenden beim reflectirten Lichte und gleichfalls als deren Spiegelbild angesehen werden kann. Infolge dessen sinkt zwar, — umgekehrt wie beim reflectirten Lichte, die der Lichtquelle zugewandte Hälfte der Durchmesser unter die Horizontale, die andere steigt darüber, aber man muss bei Beobachtungen dem Verlaufe dieser Hauptgeraden nach das Mikroskop ganz in demselben Sinne, wie dort, verschieben, da es ja auf der entgegengesetzten Seite des Linsensystems steht.

Die Durchmesser der einzelnen dunklen Ringe, gemessen auf der Horizontalebene, sind proportional den Quadratwurzeln aus den ungeraden Zahlen, ihr Mittelpunkt ist der scheinbare Berührungspunkt von Platte und Linse.

In der zur centralen Einfallsebene senkrechten Richtung findet sich hier, wie beim reflectirten Lichte, eine Quergerade, welche sämtliche Ringe trifft. Die auf dieser gemessenen Durchmesser der Ringe sind ganz gleich den

entsprechenden Durchmessern der in der Richtung der Mikroskopaxe auf die Horizontalebene projecirten Kreise.

Die lichtnahe Hälfte der Ringe senkt sich langsamer und weniger tief unter die senkrecht zur centralen Einfallsebene durch die Hauptgerade gelegte Ebene (Hauptebene), als sich die lichtferne darüber erhebt, und einzelne Ringe können, — namentlich bei kleinen Einfallswinkeln, ganz oberhalb derselben liegen.

Der Mittelpunkt des Ringsystems, — der scheinbare Berührungspunkt von Platte und Linse, erscheint natürlich im durchgehenden Lichte hell, nicht, wie beim reflectirten, dunkel, aber auch für ihn gilt der von Hrn. Wangerin gefundene Satz, dass man das auf den scheinbaren Berührungspunkt P_1 eingestellte Mikroskop beliebig längs seiner Axe verschieben kann, ohne dass der helle Fleck verschwindet.

Im allgemeinen können wir sagen, dass beim durchgehenden Lichte von den dunklen Ringen dasselbe gilt, was beim reflectirten für die hellen gelten würde.

Fassen wir wieder unsere Interferenzfläche als Spiegelbild derjenigen des reflectirten Lichtes auf, so würden unsere dunklen Ringe die Spiegelbilder der hellen im reflectirten Lichte sein, nicht nur ihrer Lage, sondern auch ihrer Beschaffenheit nach: Denn, wie beim reflectirten Lichte die dunklen Ringe nahezu vollkommen dunkel, die hellen dagegen nur unvollkommen hell erscheinen können; so sind umgekehrt in unserem Falle die hellen Ringe vollkommen hell, die dunklen dagegen nur unvollkommen dunkel, beides infolge des Einflusses der in der Luftlamelle mehrfach reflectirten Strahlen.

Was die einzelnen Ringe betrifft, so liegen die Helligkeitsminima sämmtlicher Ringe in der centralen Einfallsebene, weiterhin aber zeigen noch die innersten Ringe auf der von der Lichtquelle abgewandten Seite je zwei in Bezug auf die Einfallsebene symmetrisch liegende Minimalpunkte. Die sämmtlichen übrigen Punkte sind — wegen der anderen, nicht in der Richtung der Mikroskopaxe verlaufenden Strahlenpaare — weniger deutlich und nehmen an Deutlichkeit

ab, je grösser die Ringzahl und der Einfallswinkel des Lichtes wird.

Der Grund endlich für den Umstand, dass im durchgehenden Lichte die Newton'schen Farbenringe viel weniger deutlich sind, als im reflectirten, ist wohl darin zu suchen, dass in ersterem Falle der zweimal reflectirte Strahl eines jeden interferirenden Strahlenpaares gegenüber dem direct durchgehenden eine doppelte, bedeutende Schwächung seiner Intensität durch die doppelte Reflexion — an Linse und Glasplatte — erleidet, und die Interferenz deshalb nicht eine nahezu vollkommene sein wird, wie beim reflectirten Lichte, wo beide Strahlen, sowohl der an der Glasplatte wie der an der Linse reflectirte, durch eine einmalige Reflexion eine gleichmässige Schwächung erleiden; die von Fresnel für die Intensität des reflectirten und gebrochenen Lichtes aufgestellten Formeln gewähren hierzu leicht eine deutliche Veranschaulichung durch Zahlen.

II. *Intensitätsmessungen des diffusen Tageslichtes; von Leonhard Weber.*

(Hierzu Taf. IV Fig. 7—16.)

Die wenigen bisher vorliegenden Messungen der Intensität des diffusen Lichtes leiden einerseits an dem Mangel einer präzisen Definition dessen, was unter jener Intensität zu verstehen ist, andererseits an einer passenden Auswahl derjenigen Hülfsheile, welche den gebräuchlichen photometrischen Apparaten zu gedachtem Zwecke hinzuzufügen sind. Die nachfolgenden Mittheilungen versuchen es, diesen Mängeln in etwas abzuhefen, und es soll deswegen im Abschnitt I eine Definition und geometrische Darstellung der Intensität des diffusen Lichtes, in II eine Methode der Beobachtung desselben und in III eine Anwendung auf die Ausmessung des diffusen Tageslichtes beschrieben werden.