Blitz nur der besseren Leitung folge. Ueberdies ist es keineswegs nöthig, daß die Neusilberkette ununterbrochen fortläuft, denn wenn ich sie mit dem zweiten Funkenmesser in der Mitte unterbrach, so brauchte ich nur die Kugeln *A* näher an einander zu schrauben, um den Seitenschlag über beide Lücken zu führen.

Meiningen, im August 1845.

V. *Nachtrag zu dem Aufsätze: Ueber den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige ¹⁾*;
von Stud. Kirchhoff,

Mitglied des physikalischen Seminars zu Königsberg.

Ich habe mich in diesem Aufsätze damit beschäftigt, die Elektrizität zu ermitteln, die sich in einer Metallscheibe bildet, durch welche man einen constanten galvanischen Strom gehen läßt, und eine Beobachtungsmethode angegeben, durch welche ich das theoretisch gefundene Resultat experimentell geprüft habe. Es giebt noch ein anderes nahe liegendes Mittel, hier die Theorie mit dem Experimente zu vergleichen; nämlich die Beobachtung der Wirkung der Scheibe auf eine Magnetnadel; ich habe über diese Wirkung mit einer kreisförmigen Scheibe, bei der der Strom durch die beiden Endpunkte eines Durchmessers ein- und austrat, Experimente angestellt, und will jetzt angeben, in wie weit ich die Beobachtungen mit der Rechnung in Uebereinstimmung fand. Es ist meine Absicht zuerst die theoretischen Betrachtungen auseinanderzusetzen, die der Rechnung zum Grunde liegen, und dann die Versuche zu beschreiben, die ich gemacht habe.

Hängt man über einer horizontalen Scheibe, die von galvanischen Strömen durchflossen wird, eine Magnetnadel auf, so erleidet diese eine Ablenkung aus dem magnetischen Me-

¹⁾ Annalen, Bd. 64, S. 497.

Meridiane. Um diese berechnen zu können, ist es nöthig zuerst die Wirkung der Scheibe auf einen Magnetpol zu ermitteln, oder vielmehr nur die horizontale Componente dieser Wirkung. Wir wollen diese Aufgabe unter einer Voraussetzung behandeln, welche es möglich macht, sie sehr leicht allgemein zu lösen, nämlich unter der Voraussetzung, daß sich der Magnetpol unendlich nahe an der Scheibe befindet. In diesem Falle tragen zu der horizontalen Componente nur die Theile der Scheibe bei, welche unmittelbar unter dem Magnetpol liegen; alle entfernt liegenden Theile derselben geben nur eine verticale Componente, weil die Richtung der Kraft, mit der ein Stromelement auf einen Pol wirkt, senkrecht auf der durch beide gelegten Ebene ist. Die horizontale Componente ändert sich also nicht, wenn wir annehmen, daß die entfernt liegenden Theile auf eine andere, als die wirklich stattfindende, Weise von Strömen durchflossen werden; denken wir uns die Scheibe unbegrenzt, und überall in der Richtung und mit der Intensität von Elektricität durchströmt; als an dem unter dem Pole liegenden Theile, so kommt unsere Aufgabe darauf zurück: die Wirkung einer gleichmäßig von Elektricität durchflossenen, unbegrenzten Ebene auf einen Magnetpol zu ermitteln.

Wir machen die gegebene Ebene zur xy Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems, nennen die Coordinaten des Poles a, b, c , die Quantität magnetischer Flüssigkeit, die er enthält, μ , die Coordinaten eines Punktes der Ebene x, y , den Winkel, den die Richtung der Ströme mit der x Axe bildet φ und die Intensität derselben i ; dann sind die nach der x und y Axe genommenen Componenten der Kraft, welche von der Ebene auf den Pol ausgeübt wird:

$$X = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\mu i c \cdot \sin \varphi}{((x-a)^2 + (y-b)^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dx dy$$

$$Y = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu i c \cdot \cos \varphi}{((x-a)^2 + (y-b)^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dx dy.$$

Diese Integrale lassen sich leicht auflösen; ihre Werthe sind:

$$\begin{aligned} X &= -2\pi\mu i \sin \varphi \\ Y &= 2\pi\mu i \cos \varphi. \end{aligned}$$

Wir haben gesehen, daß dieselben Ausdrücke auch noch gelten werden, wenn die Scheibe nicht gleichmäßig von Elektrizität durchströmt wird, sobald sich der Pol nur nahe genug an derselben befindet; dann müssen aber für i und φ die Werthe gesetzt werden, die diesen Größen für die Projection des Poles auf die Scheibe zukommen. Befolgen die Ströme das Gesetz, daß die elektrische Spannung eines jeden Punktes $x, y = u(x, y)$ ist, so ist für diesen Punkt, wenn die Leitungsfähigkeit der Scheibe $= 1$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} i \sin \varphi &= -\frac{du}{dy} \\ i \cos \varphi &= -\frac{du}{dx} \end{aligned}$$

Sind also die horizontalen Coordinaten des Poles x und y , so sind die Kräfte, die auf ihn wirken:

$$\begin{aligned} X &= 2\pi\mu \frac{du}{dy} \\ Y &= -2\pi\mu \frac{du}{dx}. \end{aligned}$$

Hieraus findet man nun leicht, daß eine Magnetnadel, die sich sehr nahe an der Scheibe befindet, bei der man die magnetischen Flüssigkeiten in ihren Endpunkten concentrirt denken kann, und welche um ihren Mittelpunkt in einer horizontalen Ebene drehbar ist, ein Drehungsmoment erleidet, welches:

$$= \pi M \left(\frac{du(x', y')}{dl} + \frac{du(x'', y'')}{dl} \right)$$

ist, wo M das magnetische Moment der Nadel, x', y' und x'', y'' die horizontalen Coordinaten ihrer Endpunkte bezeichnen, und $\frac{d}{dl}$ die Differentiation nach der Richtung ihrer Axe andeuten soll.

Hat also die Nadel die Ablenkung ψ aus dem magnetischen Meridiane durch die Scheibe erlitten, so haben wir, wenn H die horizontale Componente des Erdmagnetismus bezeichuet, die Gleichung:

$$H \cdot \sin \psi = \pi \left(\frac{du(x', y')}{dl} + \frac{du(x'', y'')}{dl} \right)$$

Mit dieser Gleichung habe ich die Beobachtungen, welche ich gemacht habe, verglichen. Die Voraussetzungen, welche in der obigen Betrachtung über die Magnetnadel gemacht sind, suchte ich möglichst dadurch zu erfüllen, daß ich eine sehr kleine Nadel anwandte, und diese der Scheibe beinahe bis zur Berührung näherte. Bei der Kleinheit der Nadel (sie bestand aus einem $\frac{3}{4}$ Zoll langen, dünnen Drahtstücke) glaubte ich mich berechtigt, sie als eine magnetische Linie ansehen zu können, bei der die magnetischen Momente der einzelnen Moleküle constant wären, und die Axen derselben die Richtung der Linie selbst hätten; für eine solche Linie aber kann man immer zwei magnetische Pole substituiren, die sich in ihren Endpunkten befinden. Unter der Nadel befand sich eine kreisförmige Scheibe von Staniol, deren Durchmesser 10 Zoll war; sie war auf ein Stück Spiegelglas geklebt, und liefs sich mit diesem in einer gegen den magnetischen Meridian senkrechten Richtung so verschieben, daß der Mittelpunkt der Nadel immer in einem Durchmesser blieb. An den Enden *des* Durchmessers, welcher mit dem magnetischen Meridiane zusammenfiel, waren die Enden zweier Drähte festgeklemmt, die den Strom einer Daniell'schen Kette durch die Scheibe hindurchleiteten. Um den Einfluß dieser Drähte auf die Ablenkung der Nadel möglichst zu beseitigen, wurden dieselben in der Ebene der Scheibe gehalten. Das Experiment wurde nun so angestellt, daß mittelst eines Spiegelapparats die verschiedenen Ablenkungswinkel, ψ , beobachtet wurden, die verschiedenen Abständen des Mittelpunktes der Nadel von dem Mittelpunkte der Platte, ρ , entsprachen. Wurde die Richtung des Stromes umgekehrt, oder wurde aus ρ , $-\rho$ gemacht, so hätte die Gröfse der Ablenkung ungeändert bleiben müssen, wenn keine störenden Einflüsse da gewesen wären; die Ablenkung änderte sich aber, theils deswegen, weil die Verbindungslinie der Einstromungspunkte nicht genau mit dem magnetischen Meridiane zu-

sammenfiel, theils wegen eines constanten Fehlers von ϱ , theils wegen des Einflusses der zuleitenden Drähte, theils endlich wegen der Ungleichmäßigkeit der Staniolscheibe. Die Ablenkungen waren:

	Bei posit. Strom.	Bei negat. Strom.
für $\varrho = 0$	94,8	96,2
1	90,0	93,8
2	87,8	89,2
3	80,6	81,6
4	71,4	72
5	61,0	61,6
für $\varrho = -1$	93,4	96,3
-2	89,9	90,9
-3	83,0	83,3
-4	74,0	74,8
-5	64,2	64,5.

Ich glaubte den Werthen, welche die Ablenkungen erhalten hätten, wenn die angedeuteten Störungen nicht da gewesen wären, nahe zu kommen, indem ich aus den je vier zusammengehörigen Werthen die arithmetischen Mittel nahm. Dadurch erhielt ich folgende Werthe für ψ :

für $\varrho = 0$	95,5
1	93,4
2	89,5
3	82,2
4	73,1
5	62,8.

Ich will über die angegebenen Beobachtungen noch bemerken, daß nach je zweien die Intensität des Stromes und die Richtung des magnetischen Meridians an demselben Apparate beobachtet, und durch Interpolation gefunden wurde, welchen Werth die Intensität, und welche Lage der Meridian zur Zeit einer jeden Ablenkungsbeobachtung hatte. Die angegebenen Zahlen sind auf eine constante Intensität reducirt. (Die Einheit für ψ ist 2,6, für $\varrho \frac{1}{2}$ Zoll.) Um nun die Beobachtungen mit der Theorie zu vergleichen, berechnen wir ψ aus der Gleichung:

$$H \sin \psi = \pi \cdot \left(\frac{du(x', y')}{dl} + \frac{du(x'', y'')}{dl} \right).$$

Legen wir den Anfauspunkt der Coordinaten in den Mit-

telpunkt der Scheibe, und die x Axe in den magnetischen Meridian, so ist, wenn wir den Radius der Scheibe R nennen:

$$u = A + B \cdot \log \frac{(x+R)^2 + y^2}{(x-R)^2 + y^2},$$

wo A und B unbekannte Constanten sind. Da der Ablenkungswinkel der Nadel sehr klein ist, so können wir:

$$x' = \frac{L}{2} \quad x'' = -\frac{L}{2}$$

$$y' = \varrho \quad y'' = \varrho$$

setzen, wo L die Länge der Magnetnadel, ϱ den Abstand ihres Mittelpunktes vom Mittelpunkte der Scheibe bezeichnet.

Schreiben wir ferner noch $\frac{d}{dx}$ für $\frac{d}{dl}$ und ψ für $\sin \psi$, so erhalten wir:

$$\psi = K \cdot \frac{\left(R - \frac{L}{2}\right)\left(R + \frac{L}{2}\right) + \varrho^2}{\left\{\left(R - \frac{L}{2}\right)^2 + \varrho^2\right\} \left\{\left(R + \frac{L}{2}\right)^2 + \varrho^2\right\}}$$

Berechnen wir nach dieser Formel ψ , indem wir dem ϱ die verschiedenen Werthe geben, für welche wir die Ablenkung der Nadel beobachtet haben, so finden wir, wenn wir K passend bestimmen, folgende Uebereinstimmung zwischen der Rechnung und den Beobachtungen:

ϱ .	Rechnung	Beobachtet.	Fehler.
0	96,3	95,5	+0,8
1	94,4	93,4	+1,0
2	88,8	89,5	-0,7
3	81,3	82,2	-0,9
4	72,4	73,1	-0,7
5	63,5	62,8	+0,7