ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o. 459.

Neuer Beweis des von *Gauss* gefundenen Theorems in der Trigonometrie auf beliebigen krummen Oberflächen.

Von Herrn *Thomas Clausen*.
Observator an der Dorpater Sternwarte.

1. Der neue von *Gauss* gefundene Satz, wodurch der sphärische Excefs auf beliebigen krummen Oberflächen bestimmt wird, dessen Beweis er in den *Disquiss. generalibus circa superficies curvas* gegeben hat, ist zu einfach und zierlich, um nicht allgemeine Bewunderung zu erregen. Der von *Gauss* gegebene Beweis selbst mag aber leicht Manchen zu schwer sein, um ihn ganz klar und deutlich durchschauen zu können. Es dürfte daher nicht ganz überflüssig sein, das Theorem von einer andern Seite zu betrachten, und da überdies die Beleuchtung jedes mathematischen Satzes von verschiedenen Seiten ein besonderes und eigenthümliches Interesse darbietet; so glaube ich mir erlauben zu dürfen, den Beweis des Theorems, wie er sich mir klar und völlig überzeugend darstellt, im Folgenden zu entwickeln.

2. Ich nehme an, die krumme Oberfläche habe innerhalb des Theils, den ich betrachte, keine Kanten oder Spitzen; oder dafs kein Krümmungshalbmesser verschwinde. Man lege eine tangirende Ebene an den Anfangspunct A der auf der krummen Oberfläche gezogenen Curve. Die Tangente der Curve im Puncte A nehme ich als Axe der ξ , die Normale der krummen Oberfläche als Axe der ζ ; und den Punct A als Anfangspunct der Coordinaten. Die Länge der Curve von A an gemessen sei σ . Unter diesen Voraussetzungen kann man die Coordinaten folgendermaassen durch σ ausdrücken:

$$(1) \dots \begin{cases} \xi = \sigma + a\sigma^2 + b\sigma^3 + \dots \\ v = a'\sigma^2 + b'\sigma^3 + \dots \\ \zeta = a''\sigma^2 + b''\sigma^3 + \dots \end{cases}$$

Die Gröfsen $a, a', a''; b, b', b''$ sind constant und von der Natur der krummen Oberfläche und der Curve abhängig. Es folgt hieraus:

$$(2) \dots \begin{cases} \frac{d\xi}{d\sigma} = 1 + 2a\sigma + 3b\sigma^2 + \dots \\ \frac{dv}{d\sigma} = 2a'\sigma + 3b'\sigma^2 + \dots \\ \frac{d\zeta}{d\sigma} = 2a''\sigma + 3b''\sigma^2 + \dots \end{cases}$$

und da $\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\sigma}\right)^2 = 1$, so ist allgemein für alle Curven von doppelter Krümmung, wenn man die Tangente an derselben als Axe der ξ annimmt:

$$4a = 0, \\ 6b + 4(a^2 + a'^2 + a''^2) = 0;$$

oder

$$\left. \begin{aligned} a &= 0 \\ b &= -\frac{2}{3}(a^2 + a'^2 + a''^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Es sei die Chorde der Curve χ , so ist $\chi^2 = \xi^2 + v^2 + \zeta^2$, oder wenn man die Gleichungen (3) berücksichtigt:

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sigma^2 - \frac{1}{3}(a'^2 + a''^2)\sigma^4 + \dots \\ \chi &= \sigma - \frac{1}{6}(a'^2 + a''^2)\sigma^3 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Es sei A' der zweite Endpunct des Elements σ , die kleinstmögliche Entfernung zwischen A und A' im Raume ist also χ . Soll die Länge des Elements σ auf der krummen Oberfläche zwischen A und A' ein kleinstes sein, oder das Element selbst zu einer kürzesten Linie gehören, so muß $\sigma - \chi = \frac{1}{6}(a'^2 + a''^2)\sigma^3 + \dots$ ein kleinstmöglichstes sein.

Man kann die Gleichung für die krumme Oberfläche in Beziehung auf die Coordinaten ξ, v, ζ so ausdrücken:

$$\zeta = l\xi\xi + 2m\xi v + n v v + \dots \dots \dots (5)$$

worin blofs Glieder von den dritten und höheren Dimensionen vernachlässigt sind, und l, m und n constante Gröfsen bedeuten. Substituirt man darin die Werthe von ξ, v, ζ aus (1), so findet man

$$a'' = l \dots \dots \dots (6)$$

Der Coefficient a'' ist also blofs von der Natur der krummen Oberfläche abhängig, a' hingegen von der Natur der Curven. Soll diese eine kürzeste Linie sein, so muß natürlicherweise $a' = 0$, und da ohnehin (3) $a = 0$ ist: $\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} = 0, \frac{d^2v}{d\sigma^2} = 0$ sein. Diese beiden Gleichungen finden nur Statt, wenn die Krümmungsebene senkrecht auf der krummen Oberfläche ist; oder wenn die Normalen der Curve und der krummen Oberfläche zusammenfallen, welches also die Bedingung für die kürzeste Linie ist.

3. Die Bedingungsgleichungen auf jedes beliebige Coordinatensystem bezogen, erhält man leicht auf folgende Art. Es sei:

$$\begin{aligned} dx &= \alpha d\xi + \beta dv + \gamma d\zeta \\ dy &= \alpha' d\xi + \beta' dv + \gamma' d\zeta \\ dz &= \alpha'' d\xi + \beta'' dv + \gamma'' d\zeta \end{aligned}$$

Die Gröſsen $\alpha, \alpha', \alpha''; \beta, \beta', \beta''; \gamma, \gamma', \gamma''$ sind Constanten. Da $dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\xi^2 + dv^2 + d\zeta^2$ ist; so hat man die bekannten Relationen:

$$\begin{aligned} \alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' &= 1, & \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' &= 0, \\ \beta\beta + \beta'\beta' + \beta''\beta'' &= 1; & \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' &= 0, \\ \gamma\gamma + \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma'' &= 1; & \gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' &= 0. \end{aligned}$$

Multiplirt man die Ausdrücke für dx, dy, dz resp. mit $\gamma, \gamma', \gamma''$ und berücksichtigt die dritte, fünfte und sechste dieser Gleichungen; so findet man:

$$d\zeta = \gamma dx + \gamma' dy + \gamma'' dz.$$

Da aber die Axe der ζ auf der krummen Oberfläche senkrecht ist, so ist $d\zeta = 0$; folglich die Gleichung

$$0 = \gamma dx + \gamma' dy + \gamma'' dz$$

mit der Gleichung für die krumme Oberfläche identisch. Sei diese:

$$(7) \dots\dots\dots 0 = P dx + Q dy + R dz,$$

so ist, weil $\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} = 0$, und $\frac{d^2v}{d\sigma^2} = 0$, wenn die Curve die kürzeste Linie sein soll, und also

$$\frac{d^2x}{d\sigma^2} = \gamma \frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}; \quad \frac{d^2y}{d\sigma^2} = \gamma' \frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}; \quad \frac{d^2z}{d\sigma^2} = \gamma'' \frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}$$

ist:

$$(8) \dots\dots\dots \frac{d^2x}{d\sigma^2} : \frac{d^2y}{d\sigma^2} : \frac{d^2z}{d\sigma^2} = P : Q : R,$$

welches die bekannte Bedingungsgleichung für die kürzeste Linie ist.

4. Es sei auf der krummen Oberfläche ein von drei Elementen von kürzesten Linien gebildetes Dreieck A, A', A'' beschrieben, dessen Chorden die resp. Winkel $u, u',$ und u'' einschließen. Der Unterschied des Curvenwinkels oder des von den beiden Tangenten gebildeten Winkels von dem Winkel, den die Chorden einschließen, läßt sich in zwei verschiedene Theile trennen. 1) Die Winkel, die je zwei zusammengehörende Ebenen bilden, deren Durchschnitt die Normale ist, und in deren einer die Chorde, in der andern die dazu gehörende Tangente liegt. Dieser Winkel ist dem Winkel zwischen der Projection der Chorde auf der tangirenden Ebene und der dazu gehörenden Tangente gleich. Die Tangente desselben ist $\frac{v}{\xi} = b' \sigma^2 + \dots (1)$ da $a' = 0$ ist, und bis auf Gröſsen dritter Ordnung in Beziehung auf σ eben so groſs in A' für

die Chorde AA' , da b' in beiden Puncten bloſ um Gröſsen erster Ordnung unterschieden sein können. Die Summe aller drei Curvenwinkel ist von der Summe aller drei Winkel zwischen den durch je zwei Chorden gelegten Ebenen, die sich in der Normale schneiden, um b solche Winkel unterschieden; von denen aber je zwei sich gegenseitig bis auf Gröſsen dritter Ordnung in Beziehung auf σ aufheben, da der eine innerhalb, der andere auſerhalb des Curvenwinkels liegt. Es ist nemlich die Gleichung für die Projection des Elements σ auf die Ebene der ξ, v von A aus $v = b' \xi^3$, mithin liegen die Puncte der projecirten Curve auf beiden Seiten von A auf verschiedenen Seiten der Tangente, und eben so auf die in A' tangirende Ebene projecirt. 2) Die Unterschiede der Winkel, die die durch die Normale und die beiden Chorden gelegten Ebenen bilden, von den ebenen durch die Chorde gebildeten Winkeln. Diese sind den Unterschieden der sphärischen Winkel von den gegenüberliegenden sphärischen Seiten in sphärischen Dreiecken gleich, deren beide übrige Seiten wenig von einem Quadranten verschieden sind. Seien die Winkel zwischen der Normale an A und den beiden Chorden AA' und AA'' : $90^\circ + \theta''$ und $90^\circ + \theta'$ resp.; den Winkel zwischen den beiden Chorden oder die sphärische Seite haben wir schon oben u gesetzt. Sei der sphärische Winkel zwischen den durch die Normale und die beiden Chorden gelegten Ebenen $u + v$; so ist:

$$\begin{aligned} \cos u &= \cos(u+v) \cos \theta' \cos \theta'' + \sin \theta' \sin \theta'' \\ \cos u &= (\cos u - v \sin u) (1 - \frac{1}{2} \theta'^2 + \dots) (1 - \frac{1}{2} \theta''^2 + \dots) + \theta' \theta'' + \dots \\ v &= \frac{2 \theta' \theta'' - \cos u (\theta'^2 + \theta''^2)}{2 \sin u} \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

bis auf Gröſsen dritter Ordnung genau, da $\theta' = \frac{\zeta}{\xi} = u'' \sigma$ oder von erster Ordnung ist. Der Winkel der Normale in A' mit der Chorde AA' ist ebenfalls $90^\circ + \theta''$ bis auf Gröſsen zweiter Ordnung und eben so die Winkel der Normale in A'' mit der Chorde AA'' : $90^\circ + \theta'$. Es seien demnach die Winkel zwischen den Chorden $AA'', A''A, AA'$ und den Normalen an ihren Endpuncten $90 + \theta, 90 + \theta', 90 + \theta''$ resp.; so sind die drei Unterschiede v, v', v'' zwischen den ebenen Chordenwinkeln und den durch die Flächen gebildeten Winkel, die sich in der Normale schneiden, und durch die Chorden gelegt sind:

$$\begin{aligned} v &= \frac{2 \theta' \theta'' - \cos u (\theta'^2 + \theta''^2)}{2 \sin u} \\ v' &= \frac{2 \theta'' \theta - \cos u' (\theta''^2 + \theta^2)}{2 \sin u'} \\ v'' &= \frac{2 \theta \theta' - \cos u'' (\theta^2 + \theta'^2)}{2 \sin u''} \end{aligned}$$

Addirt man sie und berücksichtigt, daſs $u + u' + u'' = 180^\circ$ sind; so findet man:

$$(10) \dots \nu + \nu' + \nu'' = \frac{2\theta\theta' \sin u \sin u' + 2\theta'\theta'' \sin u' \sin u'' + 2\theta\theta'' \sin u'' \sin u - \theta^2 \sin u^2 - \theta'^2 \sin u'^2 - \theta''^2 \sin u''^2}{2 \sin u \cdot \sin u' \cdot \sin u''}.$$

5. Um die Größen θ , θ' , θ'' einfach ausdrücken zu können, beziehe man die Gleichung (5) auf ein anderes Axensystem. Die Axe der x bilde mit der Axe der ξ den Winkel ε ; so daß

$$\begin{aligned}\xi &= x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon \\ \nu &= x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon,\end{aligned}$$

wodurch die Gleichung (5) sich in folgende verwandelt:

$$\begin{aligned}z &= (l \cos \varepsilon^2 + 2m \cos \varepsilon \sin \varepsilon + n \sin \varepsilon^2) x^2 \\ &+ 2(-l \sin \varepsilon \cos \varepsilon + m(\cos \varepsilon^2 - \sin \varepsilon^2) + n \sin \varepsilon \cos \varepsilon) xy \\ &+ (l \sin \varepsilon^2 - 2m \sin \varepsilon \cos \varepsilon + n \cos \varepsilon^2) y^2 \\ &+ \dots\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}z &= \frac{1}{2}(l+n+(l-n) \cos 2\varepsilon + 2m \sin 2\varepsilon) x^2 \\ &+ (2m \cos 2\varepsilon - (l-n) \sin 2\varepsilon) xy \\ &+ \frac{1}{2}(l+n-(l-n) \cos 2\varepsilon - 2m \sin 2\varepsilon) y^2 \\ &+ \dots\end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned}l-n &= k \cos 2\varepsilon; \quad l+n+k = L; \\ 2m &= k \sin 2\varepsilon; \quad l+n-k = M.\end{aligned}$$

so wird:

$$(11) \dots z = \frac{1}{2}Lx^2 + \frac{1}{2}My^2 + \dots$$

Da $\theta = \alpha''\sigma + \dots = l\sigma + \dots$, wenn man

$$z = l\xi\xi + 2m\xi\nu + n\nu\nu + \dots$$

hat, und die Tangente der Curve als Axe der ε , die Normale der krummen Oberfläche als Axe der z annimmt, so wird, wenn diese Tangente mit der Axe der x den Winkel φ bildet:

$$\begin{aligned}x &= \xi \cos \varphi - \nu \sin \varphi \\ y &= \xi \sin \varphi + \nu \cos \varphi\end{aligned}$$

folglich:

$$l = \frac{1}{2}L \cos \varphi^2 + \frac{1}{2}M \sin \varphi^2,$$

$$(12) \dots \theta = \frac{1}{2}(L \cos \varphi^2 + M \sin \varphi^2)\sigma + \dots$$

Es bilden die drei Chordenrichtungen von A' nach A'' , $A''A$, AA' mit der Axe der x in A die Winkel φ , φ' , φ'' resp. so, daß die drei Winkel des Dreiecks $u = 180^\circ + \varphi'' - \varphi'$; $u' = 180^\circ + \varphi - \varphi''$; $u'' = 180^\circ + \varphi' - \varphi$ werden. Man kann dieselben Größen in Beziehung auf die Hauptachsen der Krümmungen in A' und A'' anwenden, da sie nur um Größen erster Ordnung unterschieden sein können. Eben so sind L und M in Beziehung auf die Punkte A' und A'' bloß um Größen erster Ordnung von denen, die für A gelten, unterschieden. Sei der Durchmesser des um das Chordendreieck beschriebenen Kreises ρ ; so sind die drei Chorden oder Seiten $AA' = \sigma''$; $A'A'' = \sigma$; $A''A = \sigma'$;

$$(13) \dots \begin{cases} \sigma = \rho \sin u = \rho \sin(\varphi' - \varphi'') \\ \sigma' = \rho \sin u' = \rho \sin(\varphi'' - \varphi) \\ \sigma'' = \rho \sin u'' = \rho \sin(\varphi - \varphi') \end{cases}$$

mithin sind die drei Größen θ , θ' , θ'' bis zur dritten Ordnung excl. genau:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{1}{2}\rho(L \cos \varphi^2 + M \sin \varphi^2) \sin(\varphi' - \varphi''); \\ \theta' &= \frac{1}{2}\rho(L \cos \varphi'^2 + M \sin \varphi'^2) \sin(\varphi'' - \varphi); \\ \theta'' &= \frac{1}{2}\rho(L \cos \varphi''^2 + M \sin \varphi''^2) \sin(\varphi - \varphi').\end{aligned} \dots (14)$$

6. Der in (10) gegebene Ueberschuß der Summe der drei Curvenwinkel über die Summe der drei Chordenwinkel oder 180° wird nach Substitution der Gleichungen (14), wenn man den Inhalt des Dreiecks $AA'A'' = i = \frac{1}{2}\rho\rho \sin u \sin u' \sin u''$ setzt, und den Inhalt eines Dreiecks, dessen Seiten

$$\begin{aligned}\sigma \sqrt{L \cos \varphi^2 + M \sin \varphi^2} \\ \sigma' \sqrt{L \cos \varphi'^2 + M \sin \varphi'^2} \\ \sigma'' \sqrt{L \cos \varphi''^2 + M \sin \varphi''^2}\end{aligned} \dots (15)$$

sind, durch S bezeichnet, da der mit $\rho\rho$ multiplicirte Zähler in (10) dem vierfachen Quadrate des Inhalts eines solchen Dreiecks gleich ist:

$$\nu + \nu' + \nu'' = \frac{S^2}{i} \dots (16)$$

Beschreibt man eine Kugelfläche mit dem Halbmesser $= 1$, und zieht alle mit den Normalen an dem Umfange des Curvendreiecks $AA'A''$ parallele Halbmesser, so liegen die Endpunkte derselben in einer dreiseitigen Figur $\alpha\alpha'\alpha''$ dessen Inhalt man folgendermaßen findet. Seien die Coordinaten in A' von dem Anfangspunct A bezogen x , y , so ist, da (11)

$$dz = Lx dx + My dy + \dots$$

ist, wenn man

$$\begin{aligned}dx &= \cos \lambda \cdot ds; & Lx &= p \cos \psi \\ dy &= \sin \lambda \cdot ds; & My &= p \sin \psi\end{aligned}$$

setzt

$$\frac{dz}{ds} = p \cos(\lambda - \psi) = \sqrt{L^2 x^2 + M^2 y^2} \cos(\lambda - \psi).$$

Das Maximum dieses Werthes $\sqrt{L^2 x^2 + M^2 y^2}$ ist die Tangente des Winkels, den die beiden in A und A' tangirenden Ebenen bilden, bis auf Größen zweiter Ordnung excl. gleich, und also auch dem Winkel, den die Normalen an diesen beiden Punkten bilden, oder dem Bogen $\alpha\alpha'$ gleich. Folglich ist, da

$$\begin{aligned}x &= \sigma'' \cos \varphi'' = \rho \sin(\varphi - \varphi') \cos \varphi'' \\ y &= \sigma'' \sin \varphi'' = \rho \sin(\varphi - \varphi') \sin \varphi'' \\ \alpha\alpha' &= \sigma'' \sqrt{L^2 \cos \varphi''^2 + M^2 \sin \varphi''^2}\end{aligned}$$

und eben so

$$\begin{aligned}\alpha'\alpha'' &= \sigma \sqrt{L^2 \cos \varphi^2 + M^2 \sin \varphi^2} \\ \alpha''\alpha &= \sigma' \sqrt{L^2 \cos \varphi'^2 + M^2 \sin \varphi'^2}\end{aligned} \dots (17)$$

7. Um den Inhalt der Dreiecke (15) und (17) einfacher ausdrücken zu können, bemerke ich, daß wenn die rechtwinklichten Coordinaten der drei Spitzen eines beliebigen Dreiecks $AA'A''$ in der Ebene x , y ; x' , y' ; x'' , y'' sind und

$$\begin{aligned}x'-x &= \sigma'' \cos \varphi''; & x''-x' &= \sigma \cos \varphi; & x-x'' &= \sigma' \cos \varphi' \\ y'-y &= \sigma'' \sin \varphi''; & y''-y' &= \sigma \sin \varphi; & y-y'' &= \sigma' \sin \varphi'\end{aligned}$$

gesetzt wird; so ist der Inhalt

$$i = \frac{1}{2} \sigma' \sigma'' \sin(\Phi' - \Phi'') \\ = \frac{1}{2} [(y' - y'')(x' - x) - (y' - y)(x - x'')]$$

projicirt man dieses Dreieck auf eine andere Ebene, so daß allen Puncten desselben, deren Coordinaten x, y , sind, auf der andern Ebene die Coordinaten ξ, ν , entsprechen, und

$$\xi_i = p_i x_i; \nu_i = q_i y_i,$$

worin p , und q , für alle Puncte constant sind; so werden die graden Linien in graden Linien projicirt und der Inhalt i , des projicirten Dreiecks vom Inhalte i :

$$i_i = p_i q_i i.$$

Die Seiten des projicirten Dreiecks werden:

$$\sigma_i'' = \sigma'' \sqrt{p_i^2 \cos^2 \Phi'' + q_i^2 \sin^2 \Phi''}$$

$$\sigma_i = \sigma \sqrt{p_i^2 \cos^2 \Phi + q_i^2 \sin^2 \Phi}$$

$$\sigma_i' = \sigma' \sqrt{p_i^2 \cos^2 \Phi' + q_i^2 \sin^2 \Phi'}.$$

Vergleicht man dieses mit dem Dreiecke (15); so wird, da $p_i = \sqrt{L}$; $q_i = \sqrt{M}$ ist: $S = i \sqrt{LM}$ und folglich:

$$\nu + \nu' + \nu'' = L M i,$$

welcher Ausdruck positiv oder negativ ist, je nachdem L und M gleiche oder verschiedene Zeichen haben, oder je nachdem die beiden Hauptkrümmungen nach einer oder verschiedenen Seiten liegen.

Der Inhalt der Projection auf der sphärischen Oberfläche (17) wird ebenfalls $L M i$, da in den Ausdrücken für die Seiten $p_i = L$, $q_i = M$ ist. Also folgt:

Der Ueberschuß der drei Winkel eines von kürzesten Linien auf einer beliebigen krummen Oberfläche gebildeten kleinen Dreiecks über 180° , wenn die beiden Hauptkrümmungen der krummen Oberfläche auf derselben Seite der Tangente liegen: im entgegengesetzten Falle das fehlende ist dem Inhalte eines auf der Sphäre beschriebenen Dreiecks bis auf Größen dritter Ordnung gleich, in dem die an dem Umfange gezogenen Halbmesser mit den Normalen an dem Umfange des auf der krummen Oberfläche beschriebenen Dreiecks von kürzesten Linien parallel sind. Es versteht sich von selbst, daß der Flächeninhalt der sphärischen Figur durch den Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks von gleichem Flächeninhalte zwischen

den beiden Schenkeln gemessen wird, wenn diese einem Quadranten gleich sind.

8. Es sei jetzt ein Dreieck von endlicher Größe $BB'B''$ auf der krummen Oberfläche von kürzesten Linien gebildet. Ich nehme an, daß die Projection desselben auf die Kugelfläche in keinem Theile doppelt wird, oder daß die Normalen von verschiedenen Puncten der krummen Oberfläche in dem Dreiecke nicht parallel sind; und daß die Hauptkrümmungshalbmesser in allen Puncten desselben auf derselben Seite, oder entgegengesetzten Seiten der tangirten Ebene liegen. Theilt man jede Seite in m Theile (m sei eine sehr große Zahl) und zieht durch die gleichtheiligen Puncte auf den Seiten BB' , BB'' kürzeste Linien, und eben so durch die gleichtheiligen Puncte BB' , $B'B''$, so entstehen $\frac{m-1 \cdot m-2}{2}$ neue

Puncte im Dreiecke. Zieht man noch in jedem so entstandenen kleinen Parallelogramme die Diagonale, die mit der Seite BB' parallel sein würde, wenn das Dreieck $BB'B''$ ein ebenes wäre und alle Theile der Seiten gleich; so hat man mm sehr kleine Dreiecke, deren sämtliche Winkel bis auf Größen von der Ordnung $mm \cdot \frac{1}{m^3} = \frac{1}{m}$ dem Flächeninhalte der Projection auf der Kugelfläche $+ mm \cdot 180^\circ$ gleich ist.

Die sämtlichen Winkel sind: 1) Die Winkel B, B', B'' ; 2) die Winkel an den $3(m-1)$ Puncten in den Seiten des Dreiecks, an jedem Puncte 180° ; 3) die Winkel an den $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ Puncten im Dreiecke, an jedem 360° . Addirt man sie, so erhält man:

$$(m^2 - 1) 180^\circ + B + B' + B'' = m^2 180^\circ + \text{sphärische Fläche,} \\ B + B' + B'' - 180^\circ = \text{sphärische Fläche,}$$

bis auf Größen von der Ordnung $\frac{1}{m}$; da man aber m unendlich groß annehmen kann; so folgt, daß der in (7) für sehr kleine Dreiecke gefundene Satz, in aller Schärfe für Dreiecke von jeder Größe gelte.

Th. Clausen.

U e b e r d a s M i k r o s c o p. (Beschlufs.)

Von Herrn Doctor Barfuss.

Körner in Jena hat ein Kron- und Flintglas dargestellt, wo die Brechungsverhältnisse für die mittleren Strahlen 1,519 und 1,635 waren; das Verhältniß der Zerstreuungsräume $\left(\frac{dm}{dn}\right)$ war 2,147. Nehme ich nun den Krümmungshalbmesser der Kronglaslinse zu 5 Linien, ihre Dicke zu 1 Linie,

die Dicke der Flintglaslinse zu $\frac{1}{2}$ Linie an und setze, daß das Bild 70 Linien vom Glase abstehen solle, so finde ich, daß das Objectiv achromatisch wird, wenn der äußere Halbmesser der Flintglaslinse 214,4640 Linien beträgt, die Entfernung des Objectes ist dann = 13,09321 Linien, und das Bild etwa 5 bis $5\frac{1}{2}$ mal vergrößert.