Auf Grund der geschilderten Versuche halte ich mich für berechtigt, folgende Sätze auszusprechen:

Es gibt doppelbrechende Flüssigkeiten. —

Die beiden Strahlen, in die ein — ordinärer oder linear polarisirter — Lichtstrahl in diesen Flüssigkeiten zerfällt, sind circular und einander entgegengesetzt polarisirt. —

Aus der ungleichen Geschwindigkeit dieser beiden Strahlen in der Flüssigkeit folgt eine, dem Wege in der Flüssigkeit proportionale Phasendifferenz, welche die ganze und einzige Ursache der Circumpolarisation dieser Flüssigkeiten ist. —

Die doppelbrechenden flüssigen Körper haben keine optische Axe; sondern die Wellenoberfläche des Lichtes in diesen Flüssigkeiten besteht aus zwei concentrischen Kugelflächen.

XIII. *Ueber die Bestimmung der Brechungsindices absorbirender Medien; von W. Voigt.*

(Aus den Nachr. der k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1804, Nr. 7 mitgetheilt vom Verfasser).

(Hierzu Taf. II Fig. 14—17.)

Die experimentelle Bestimmung der Brechungscoefficienten absorbirender Medien ist ein vielfach behandeltes und interessantes Problem. Nachdem ich in zwei Aufsätzen ¹⁾ eine Theorie der Absorptionerscheinungen isotroper Medien gegeben habe, welche einerseits streng auf mechanischer Grundlage entwickelt ist unter Benutzung von fundamentalen Hypothesen, die sich mit einer gewissen Nothwendigkeit aufdrängen, und welche andererseits in ihren Resultaten so vollständig mit den Beobachtungen übereinstimmt, dass man sie sowohl begründet als bestätigt nennen kann, scheint es an der Zeit, die gebräuchlichsten Methoden, die Brechungscoefficienten absorbirender Medien zu bestimmen, einmal mit der Theorie zu vergleichen. Den äusseren Anlass zu dieser Betrachtung gibt mir die soeben erschienene Ab-

1) W. Voigt, Wied. Ann. 23. p. 104 und 554. 1884.

handlung von Hrn. G. Sieben¹⁾, in welcher unter anderem versucht ist, den Beweis zu führen, dass, entgegen Hrn. v. Lang's²⁾ Behauptung, für stark absorbirende Medien ebenso wohl die Prismenmethode als die Methode der totalen Reflexion anwendbar sei.

Vor allen Dingen ist festzusetzen, was wir unter dem Brechungscoëfficienten verstehen wollen. Bei zwei vollkommen durchsichtigen Körpern definirt man ihn als das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ebener Wellen in beiden Medien und meint wohl vielfach, dass dies eine unzweideutige Definition sei. Dem ist aber nicht so, denn diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist keine für dasselbe Medium constante Grösse. Einmal kommen bei der totalen Reflexion im dünneren Medium ebene Wellen vor, die sich parallel der Grenze mit einer Geschwindigkeit fortpflanzen, die vom Einfallswinkel abhängt, andererseits werden wir im Folgenden (s. p. 153) Fälle kennen lernen, wo unter anderen Umständen ebenfalls variirende Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ebener Wellen auftreten. Um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer ebenen Welle unzweideutig zu bestimmen, ist noch eine Festsetzung über die Amplituden in der Wellenfläche hinzuzufügen. Bei der obigen Definition macht man stillschweigend diejenige ganz specielle Annahme darüber, welche im Folgenden ausdrücklich hervorgehoben ist.

Wir nennen Brechungsverhältniss eines Körpers (1) gegen einen Körper (2) das Verhältniss derjenigen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, welche in den Körpern (2) und (1) ebene Wellen mit in ihrer ganzen Ausdehnung gleicher Schwingungsamplitude besitzen.

Wenn bei durchsichtigen Körpern diese Annahme bisher immer stillschweigend als selbstverständlich gemacht ist, so ist nicht recht begreiflich, warum eine Anzahl Physiker sie beim Uebergang zu absorbirenden Medien stillschweigend fallen lassen und bei jenen von nach Umständen wechselnden Brechungsverhältnissen sprechen. Aber die Consequenz

1) G. Sieben, Ber. d. Oberh. Ges. für Natur- u. Heilkunde. 1884. p. 140. auch Wied. Ann. 23. p. 312. 1884.

2) v. Lang, Wien. Ber. (2) 84. p. 361. 1881.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXIV.

verlangt, dass wir diese Definition, wie bei durchsichtigen, so auch bei absorbirenden Medien, den völlig gleichen Umständen entsprechend, auch in gleicher Weise beibehalten.¹⁾ Dementsprechend habe ich in meiner Theorie der absorbirenden Medien auch die Festsetzungen getroffen.²⁾

Was nun die verschiedenen Methoden der Bestimmung des Brechungsindex betrifft, so ist für die meisten die Theorie bereits in meinem ersten bezüglichlichen Aufsatz³⁾ vollständig enthalten; ich kann mich also in betreff ihrer kurz fassen.

Die Methode der totalen Reflexion an durchsichtigen Medien knüpft daran an, dass bei der Reflexion an einem dünneren Medium die Intensität mit wachsendem Einfallswinkel sich unendlich schnell ändert, wenn man den Einfallswinkel $\varphi = \arcsin(n_1/n)$ passirt. Die Formeln für die Reflexion an absorbirenden Medien geben nichts dergleichen; an Stelle der unendlich schnellen Aenderung der Intensität tritt ein Maximum der Intensitätsänderung für einen bestimmten Einfallswinkel, welches auffällig ist, wenn die Absorption nur gering ist, das aber um so mehr verschwindet, je mehr dieselbe wächst. Darum hat z. B. Hr. Sieben⁴⁾ bei totaler Reflexion an einer Cyaninlösung für die am stärksten absorbirten Farben keine sogenannte Grenze der totalen Reflexion beobachten können.

Aber die Beobachtung jener Stelle stärkster Intensitätsänderung darf nicht ohne weiteres unter Anwendung der Formel für den ihr entsprechenden Einfallswinkel:

$$\sin \varphi = \frac{n_1}{n}$$

zur Bestimmung des Brechungsindex benutzt werden, denn sie ist gar nicht durch diese Gleichung definirt, sondern entspricht einem ganz anderen Einfallswinkel.

Um die merkwürdige Wirkung der Absorption auf den Vorgang der sogenannten totalen Reflexion recht anschaulich zu zeigen, habe ich zunächst auf Tafel II den Ver-

1) Die zahlreichen Bestimmungen von Brechungsverhältnissen haben ja auch nur einen Sinn, wenn man diese Grösse eindeutig definirt.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 23. p. 111. 1884.

3) W. Voigt, l. c. p. 114 u. f.

4) Sieben, l. c. p. 172.

lauf der Amplituden¹⁾ des reflectirten Lichtes graphisch dargestellt; in Fig. 14, wenn parallel der Einfallsebene polarisirtes Licht einfällt ($\mathfrak{R}_p$), in Fig. 15, wenn senkrecht polarisirtes ($\mathfrak{R}_s$), in Fig. 16 aber die reflectirte Intensität, wenn natürliches Licht einfällt ($J_r = ((\mathfrak{R}_s^2 + \mathfrak{R}_p^2)/2)$). Die Curven beziehen sich auf absorbirende Medien, welche den Brechungscoefficienten 0,8 gegen das umgebende durchsichtige und die Absorptionsconstante α , resp. gleich 0, 0,02, 0,05 und 0,10 besitzen. Die Curven sind nur soweit gezeichnet, als sie sich deutlich sondern. Man erkennt, wie die scharfe Ecke, welche bei durchsichtigen Medien den Beginn der totalen Reflexion bezeichnet, mit wachsender Absorption verschwindet und anscheinend die Stelle schnellster Aenderung der Intensität zugleich nach höheren Winkelwerthen hinrückt. In Fig. 17 sind dieselben Curven für die Reflexion von Licht der Linie *F* an Fuchsin in Crown Glas dargestellt²⁾, entsprechend $n=0,873$, $\alpha=0,34$. Sie zeigen ein Maximum der Intensitätsänderung bei einem Einfallswinkel von 90 Graden.

Die Methode der totalen Reflexion unter Zugrundelegung der Formel $n_1/n = \sin \varphi$ ist also zur exacten Bestimmung von Brechungscoefficienten absorbirender Medien nicht wohl anzuwenden. Die dadurch erhaltenen Werthe werden nahe richtig sein, wenn die Absorption gering und demzufolge die sogenannte Grenze der totalen Reflexion scharf ist, sie werden um so mehr zu gross ausfallen, je stärker die Absorption ist, während gleichzeitig die Grenze an Schärfe verliert. Der letztere Umstand zusammen mit der höchst complicirten theoretischen Definition der beobachteten Grenze lässt auch eine exacte Ausarbeitung der Methode kaum möglich erscheinen.

Grösser noch sind die Fehler, welche man begeht, wenn man den beobachteten Polarisationswinkel $\bar{\varphi}$, welcher einer gegenseitigen Verzögerung der reflectirten Componenten um $\pi/2$ entspricht, unter willkürlicher Uebertragung des für

1) Die Figuren stellen die absoluten Werthe der reflectirten Amplituden dar.

2) Gemäss den von mir (Wied. Ann. 23. p. 575. 1884) berechneten Beobachtungen von Lundquist.

durchsichtige Medien giltigen Brewster'schen Gesetzes $\operatorname{tg} \varphi = n_1/n$ zur Bestimmung des Brechungsindex benutzt. Für Silber gegen Luft gibt sich hierbei z. B. der Werth 3,6, während er in Wirklichkeit etwa 0,23 ist. Es lässt sich zwar aus dem Polarisationswinkel $\overline{\varphi}$ zusammen mit dem Hauptamplitudenverhältniss $\overline{\rho}$ nach den früher mitgetheilten Formeln¹⁾ sowohl der Brechungsindex als die Absorptionsconstante des Mediums berechnen und somit in allen Fällen das gestellte Problem exact lösen, aber die Methode ist sehr umständlich und die Beobachtung schwierig, sodass man immer nach einem bequemerem Verfahren suchen wird.

Die, soviel ich weiss, nur von Hrn. Wernicke²⁾ angewandte Methode, durch Beobachtung der Absorption bei normalem und schiefe Durchgange des Lichtes durch eine planparallele Schicht Brechungs- und Absorptionsconstanten zugleich zu bestimmen, ist in der von Hrn. Wernicke benutzten Art der Berechnung im Widerspruch mit der Theorie; die von mir angegebenen Formeln gestatten zwar eine Verwendung derartiger Beobachtungen zur Bestimmung beider Grössen, aber die Methode ist dann ebenso umständlich und an sich ebenso schwierig, wie die vorige.

Auch die Prismenmethode, welche bei durchsichtigen Medien die genauesten Resultate gibt, darf, wie sich zeigen wird, im allgemeinen nicht unter Benutzung der gebräuchlichen Formeln dafür auf absorbirende Medien angewandt werden.

Hrn. Sieben's Beweis für das Gegentheil ist nicht befriedigend. Denn die Beobachtung, dass für die wenig absorbirten Farben die Prismenmethode mit derjenigen der totalen Reflexion nahe gleiche Resultate gibt, gestattet einerseits keine Schlüsse auf das Verhalten der stärker absorbirten Farben, andererseits fehlt der Beweis, dass die Methode der totalen Reflexion selbst einwurfsfrei ist.

Da die Theorie der Prismenmethode für absorbirende Medien noch nicht geliefert ist, so werde ich sie im Folgenden

1) W. Voigt, l. c. p. 124.

2) W. Wernicke, Pogg. Ann. 155. p. 87. 1875; Ergbd. 8. p. 75. 1878.

den mittheilen und aus ihr die Consequenzen für die Beobachtung ziehen.

Diesem Problem schicke ich die Lösung einer Hilfsaufgabe voraus.

In einem absorbirenden isotropen Medium sei die XY -Ebene künstlich in einer Bewegung nach dem Gesetze:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} (u)_0 &= A e^{-\frac{\delta x}{\tau \omega}} \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha x}{\omega} + \vartheta_x \right), \\ (v)_0 &= B e^{-\frac{\delta x}{\tau \omega}} \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha x}{\omega} + \vartheta_y \right), \\ (w)_0 &= \Gamma e^{-\frac{\delta x}{\tau \omega}} \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha x}{\omega} + \vartheta_z \right) \end{aligned} \right.$$

erhalten; es ist die Fortpflanzung dieser Oscillation nach der Seite der positiven z -Axe zu bestimmen.

Wir betrachten nur die U -Componente.

Die Differentialgleichung, der wir zu genügen haben, ist¹⁾:

$$(2) \quad M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + c \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Sie wird in Uebereinstimmung mit der Nebenbedingung integrirt durch:

$$(3) \quad u = A e^{-\frac{z + \delta x}{\tau \omega}} \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha x}{\omega} + \gamma z + \vartheta_x \right),$$

falls gilt:

$$(4) \quad \begin{cases} M \omega^2 = A (\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \delta^2) + 2 c_1 (\alpha \delta + \gamma \beta) \\ 0 = 2 A (\alpha \delta + \gamma \beta) - c_1 (\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \delta^2). \end{cases}$$

worin kurz $c/\tau = c_1$ gesetzt ist.

Hierin sind die drei Grössen ω , β , γ unbestimmt, es ist also über eine von ihnen noch willkürlich zu verfügen. Wir nehmen daher für ω die Definition an, welche durch die Betrachtung der Fortpflanzung einer ebenen Welle mit überall gleichen Amplituden erhalten war²⁾, nämlich:

$$(5) \quad M \omega^2 = A (1 - \kappa^2) + 2 \kappa c_1, \quad 0 = 2 A \kappa - c_1 (1 - \kappa^2).$$

wo aus diesen Gleichungen κ (die Absorptionsconstante) zu eliminiren ist. Die Differenz der beiden Gleichungen (4) und (5) führt auf:

1) W. Voigt, l. c. p. 110. In die dortige Gleichung ist bereits die Specialisirung $\delta = 0$ gemäss p. 120 eingeführt.

2) W. Voigt, l. c. p. 109.

$$(6) \quad 1 - x^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - \delta^2 - \beta^2, \quad x = \alpha\delta + \beta\gamma,$$

welche die beiden einzigen noch verfügbaren Grössen β und γ durch α , δ und x , oder wegen (5) durch A und c_1 bestimmen.

Es folgt:

$$(7) \quad \begin{cases} 2\beta^2 = \sqrt{4(x - \alpha\delta)^2 + (1 + \delta^2 - x^2 - \alpha^2)^2} - (1 + \delta^2 - x^2 - \alpha^2) \\ 2\gamma^2 = \sqrt{4(x - \alpha\delta)^2 + (1 + \delta^2 - x^2 - \alpha^2)^2} + (1 + \delta^2 - x^2 - \alpha^2). \end{cases}$$

Das Einsetzen dieser Werthe in (3) gibt die gesuchte Lösung u ; analoge Ausdrücke folgen für v und w . Gilt der Aether als incompressibel, so müssen die Grössen Λ , Γ , ϑ_x und ϑ_z noch einer Bedingung genügen, die für unser Problem zu discutiren nicht nöthig ist.

Was den Inhalt des Resultates anbelangt, so sei nur darauf hingewiesen, dass die fortgepflanzte Oscillation in den Ebenen:

$$\alpha x + \gamma z = \text{Const.}$$

gleiche Phase, in den Ebenen:

$$\delta x + \beta z = \text{Const.}$$

gleiche Amplitude besitzt. Da nach Gleichung (6₂):

$$\alpha\delta + \beta\gamma = x$$

ist, so ist der Winkel zwischen den beiden Ebenenscharen um so mehr von $\pi/2$ verschieden, je grösser die Absorption des Mediums, d. h. x ist.

Das Resultat dieser Hilfsaufgabe ist nun bei dem eigentlich gestellten Problem des Durchganges durch ein Prisma einer absorbirenden Substanz zweimal in Anwendung zu bringen. Die zweite Grenzfläche des Prismas wird nämlich durch die von der ersten herkommenden Wellen in ebensolche Oscillationen versetzt, wie sie das Hilfsproblem in der XY -Ebene annimmt.¹⁾

Alle Grössen, die sich auf das absorbirende Medium beziehen, sollen, wie früher, durch den unteren Index ₁ ausgezeichnet werden, während die auf das umgebende durchsich-

1) Allerdings erstreckt sie sich nur von $x = 0$ bis $x = \infty$, nicht wie im Hilfsproblem von $-\infty$ bis $+\infty$. Indessen können wir, entsprechend der Erfahrungsthatfache, dass eine ebene Welle bei beliebiger Begrenzung sich nicht anders verhält als eine unbegrenzte, solange nur ihre Dimensionen gross gegen die Wellenlänge sind, auf die halbe unendliche Ebene dieselbe Betrachtung anwenden, wie auf die volle.

tige bezüglich ohne einen solchen bleiben. Ferner sollen Werthe, die für die zweite Grenzfläche gelten, den oberen Index ' erhalten, die für die erste geltenden nicht.

Legt man die Y -Axe in die brechende Kante des Prismas, rechnet in der ersten Fläche die X -Axe positiv nach der brechenden Kante hin, in der zweiten die X' -Axe von derselben hinweg, die Z - und Z' -Axe positiv in der Richtung der einfallenden Lichtbewegung und bezeichnet mit χ den brechenden Winkel des Prismas, so ist für einen Punkt p der zweiten Fläche mit der X' -Coordinate x' :

$$x_p = -x' \cos \chi, \quad z_p = +x' \sin \chi.$$

Nach dem früher behandelten Problem¹⁾ ist demnach die Form der auf die zweite Grenze auffallenden Verrückung:

$$u_p = A_1' e^{-\frac{\beta_1 x' \sin \chi}{\epsilon \omega_1}} \sin \frac{1}{\tau} \left(t - x' \left(\gamma_1 \sin \chi - \frac{\alpha_1 \cos \chi}{\omega_1} \right) + \vartheta_x \right),$$

oder auch:

$$(8) \quad = A_1' e^{-\frac{\delta_1 x'}{\epsilon \omega_1}} \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{x' \alpha_1}{\omega_1} + \vartheta_x \right).$$

wenn man setzt:

$$(9) \quad \beta_1 \sin \chi = \delta_1', \quad \beta_1 \sin \chi - \alpha_1 \cos \chi = \alpha_1',$$

also vollständig mit (1) übereinstimmend; ebenso v_p' und w_p' .

In diesen Ausdrücken ist ω_1 gegeben durch:

$$(10) \quad M\omega_1^2 = A_1(1 - x^2) + 2\kappa c_1, \quad 0 = 2A_1 x - c_1(1 - x^2),$$

worin A_1 und c_1 Constanten des absorbirenden Mediums sind. Ferner folgt α_1 aus α , dem Sinus des Einfallswinkels an der ersten Prismenfläche, nach dem Brechungsgesetz:

$$(11) \quad \frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\omega}{\omega_1} = n,$$

worin n das Brechungsverhältniss des absorbirenden Mediums gegen das durchsichtige ist; endlich gibt sich β_1 und γ_1 nach den Formeln:

$$(12) \quad \begin{cases} 2\gamma_1^2 = \sqrt{4x^2 + (1 - \alpha_1^2 - x^2)^2} + (1 - \alpha_1^2 - x^2), \\ 2\beta_1^2 = \sqrt{4x^2 + (1 - \alpha_1^2 - x^2)^2} - (1 - \alpha_1^2 - x^2). \end{cases}$$

Die auf die zweite Grenzfläche auffallende Oscillation (8) erregt nun eine in das absorbirende Medium zurückgehende und eine in das umgebende durchsichtige fortschreitende Welle.

1) W. Voigt, l. c. p. 110.

Beide lassen sich bis auf die Amplituden und die absoluten Verzögerungen aus dem Hülfsproblem bestimmen.

Die erstere wird genau durch den Ausdruck (3) in Verbindung mit (4) — (7) dargestellt, wenn man die beiden Indices $\prime$ an allen Grössen anbringt und ausserdem, entsprechend der Fortpflanzung nach der Seite $-z'$, noch β und γ mit $-\beta$ und $-\gamma$ vertauscht.

Die letztere ergibt sich aus denselben Gleichungen (3) bis (7) durch Anbringen des Index $\prime$ und Nullsetzen von c , also auch κ , entsprechend der Annahme verschwindender Absorption im umgebenden Medium.

Um das Problem vollständig zu lösen, wäre nur noch die Bestimmung der Amplituden und absoluten Verzögerungen nöthig, was durch Einsetzen der drei Gattungen von Lösungen (für die einfallende, reflectirte und gebrochene Welle) in die Gleichungen der Continuität, der Incompressibilität und des Kirchhoff'schen Principes geschieht. Da unser Problem aber nur auf die Bestimmung der Richtung der austretenden Wellen lautet, so können wir davon absehen und uns mit der Discussion derjenigen Gleichungen für dieselben begnügen, die wir bereits abgeleitet haben.

Nach dem oben Gesagten ist für die austretende Welle nach (3):

$$(13) \quad u' = A' e^{-\frac{\beta' z' + \delta' x}{\tau \omega}} \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha' x' + \gamma' z'}{\omega} + \vartheta_x' \right),$$

ebenso v' und w' ; dabei aus (5) und (6):

$$(14) \quad \begin{cases} 1 = \alpha'^2 + \gamma'^2 - \beta'^2 - \delta'^2, & M\omega^2 = A, \\ 0 = \alpha'\delta' + \beta'\gamma', \end{cases} \quad \text{also:}$$

$$(15) \quad \begin{cases} 2\beta'^2 = \sqrt{4\alpha'^2\delta'^2 + (1 + \delta'^2 - \alpha'^2)^2} - (1 + \delta'^2 - \alpha'^2), \\ 2\gamma'^2 = \sqrt{2\alpha'^2\delta'^2 + (1 + \delta'^2 - \alpha'^2)^2} + (1 + \delta'^2 - \alpha'^2). \end{cases}$$

Zugleich ist α' und δ' gegeben durch:

$$(16) \quad \begin{aligned} \frac{\alpha'}{\omega} &= \frac{\alpha_1'}{\omega_1}, & \frac{\delta'}{\omega} &= \frac{\delta_1'}{\omega_1}, \text{ also} \\ \alpha' &= n\alpha_1', & \delta' &= n\delta_1'. \end{aligned}$$

Wir erhalten sonach¹⁾ beim Austritt des Lichtes aus dem absorbirenden Prisma ebene Wellen, da in den Ebenen:

1) Im Widerspruch mit Hrn. Eisenlohr's bezüglicher Bemerkung (Wied. Ann. 1. p. 204. 1877).

$$\alpha' x' + \gamma' z' = \text{Const.}$$

die Phase constant ist. Ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist $\omega/\sqrt{\alpha'^2 + \gamma'^2}$, also, wie bereits oben bemerkt, von der Richtung abhängig. Die Richtungs cosinus der Wellennormale gegen die X' - und Z' -Axe sind $\alpha'/\sqrt{\alpha'^2 + \gamma'^2}$ und $\gamma'/\sqrt{\alpha'^2 + \gamma'^2}$. Sie bestimmen die Richtung, in welcher man mit einem Fernrohr beobachtend ein Bild der unendlich fernen Lichtquelle wahrnimmt. Nennt man den Winkel dieser Richtung mit der Z' -Axe φ' , so ist:

$$\sin \varphi' = \frac{\alpha'}{\sqrt{\alpha'^2 + \gamma'^2}}.$$

Die Ebenen gleicher Amplitude:

$$\delta' x' + \beta' z' = \text{Const.}$$

stehen hier senkrecht auf denen gleicher Phase wegen:

$$\alpha' \delta' + \beta' \gamma' = 0.$$

Man kann sich also die Fortpflanzung des Lichtes nach dem Austritt aus dem Prisma statt durch Wellenebenen auch durch parallele Strahlen stattfindend denken, welche untereinander verschiedene Amplituden haben, aber ihre eigenen dauernd beibehalten. Sie machen mit dem Lothe auf der zweiten Prismenfläche den Winkel φ' .

Um die Uebersicht zu erleichtern, stelle ich nunmehr aus dem obigen zusammen, auf welche Weise sich bei einem Prisma aus absorbirender Substanz der beobachtbare Ablenkungswinkel η bestimmt.

Gegeben ist der brechende Winkel χ des Prismas, die Absorptionsconstante κ des absorbirenden Mediums und sein Brechungscoefficient n gegen das umgebende durchsichtige Medium (Luft), endlich der Einfallswinkel φ der auffallenden Wellennormale.

Aus: $\alpha = \sin \varphi, \quad \gamma = \cos \varphi$
bestimmt sich dann $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ durch:

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{n}$$

$$2\beta_1^2 = \sqrt{4\kappa^2 + (1 - \alpha_1^2 - \kappa^2)^2} - (1 - \alpha_1^2 - \kappa^2)$$

$$2\gamma_1^2 = \sqrt{4\kappa^2 + (1 - \alpha_1^2 - \kappa^2)^2} + (1 - \alpha_1^2 - \kappa^2);$$

hieraus α_1' und δ_1' gemäss:

$$\alpha_1' = \gamma_1 \sin \chi - \alpha_1 \cos \chi, \quad \delta_1' = \beta_1 \sin \chi.$$

Aus ihnen folgt α' , γ' , δ' nach:

$$\alpha' = n\alpha_1', \quad \delta' = n\delta_1'$$

$$2\gamma'^2 = \sqrt{4\alpha'^2\delta'^2 + (1 + \delta'^2 - \alpha'^2)^2} + (1 + \delta'^2 - \alpha'^2)$$

und hieraus endlich:

$$\sin \varphi' = \frac{\alpha'}{\sqrt{\alpha'^2 + \gamma'^2}}.$$

Die gesammte eintretende Ablenkung ist:

$$\eta = \varphi + \varphi' - \chi.$$

Diese Zusammenstellung zeigt, dass es keineswegs richtig ist, die Brechung in absorbirenden Prismen nach denselben Formeln zu berechnen, wie in durchsichtigen. Angenähert gültig sind sie bei sehr geringer Absorption, nämlich wenn man in den vorstehenden Formeln:

$$4\kappa^2 \text{ neben } (1 - \alpha_1^2)^2,$$

also auch κ^2 neben $1 - \alpha_1^2$ vernachlässigen kann. Dann ist nämlich:

$$\gamma_1^2 = 1 - \alpha_1^2, \quad \beta_1^2 = 0, \quad \text{also} \quad \alpha_1 = \sin \varphi_1, \quad \gamma_1 = \cos \varphi_1$$

zu setzen erlaubt; es wird ferner:

$$\alpha_1' = \sin(\chi - \varphi_1) = \sin \varphi_1', \quad \delta_1' = \delta' = 0$$

und schliesslich $\gamma'^2 = 1 - \alpha'^2$, also:

$$\sin \varphi' = \alpha',$$

was alles die gewöhnlichen Formeln sind. Ist diese Vernachlässigung nach der Genauigkeit der Beobachtungen nicht erlaubt, so ist auch die Anwendung der gewöhnlichen Methode n zu berechnen unrichtig, man muss dann vielmehr die Absorptionsconstante κ bestimmen und mit ihr die vorstehenden strengen Formeln benutzen. Dabei wird es am klügsten sein, da die Methode des Minimums der Ablenkung bei einem absorbirenden Prisma wegen der mangelnden Symmetrie des Vorganges in Bezug auf seine Flächen keine einfachen Gesetze liefern wird, normalen Einfall des Lichtes auf die erste Fläche zu benutzen, was stets möglich ist, da die Prismen aus stark gefärbten Substanzen nur mässige brechende Winkel besitzen dürfen.

Dann vereinfachen sich die Formeln erheblich. Es wird successive wegen $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, & \gamma_1 &= 1, & \beta_1 &= \kappa, \\ \alpha_1' &= \sin \chi, & \delta_1' &= \kappa \sin \chi, \end{aligned}$$

ferner: $\alpha' = n \sin \chi$, $\delta' = n x \sin \chi$,

$2\gamma'^2 = (1 - n^2(1 - x^2) \sin^2 \chi) + \sqrt{4n^4 x^2 \sin^4 \chi + (1 - n^2(1 - x^2) \sin^2 \chi)^2}$,
also:

$$\sin \varphi' = \frac{\sqrt{2 n \sin \chi}}{\sqrt{1 + n^2(1 + x^2) \sin^2 \chi + \sqrt{4n^4 x^2 \sin^4 \chi + (1 - n^2(1 - x^2) \sin^2 \chi)^2}}},$$

oder kurz: $\sin \varphi' = \frac{n}{r} \sin \chi$.

Da $\varphi' = \eta + \chi$ ist, so berechnet sich hieraus bei bekanntem x der Brechungscoefficient n , und zwar am bequemsten, indem man in dem Ausdruck für r den aus der Annäherung $\sin \varphi' = n \sin \chi$ folgenden Näherungswerth für n einführt.

Dabei ist zu bedenken, dass die Beobachtung der Absorptionerscheinungen auf die Kenntniss von $n \cdot x$, aber nicht von x allein führt; $e^{-2\pi n x / \lambda}$ ist nämlich der Bruchtheil des einfallenden Lichtes von der Wellenlänge λ in Luft, welcher eine Schicht des absorbirenden Mediums von der Dicke Eins senkrecht durchdringt.

Hiernach ist in jedem Fall mit Strenge angebbar, bis zu welchem Grad der Genauigkeit man sich auf die Benutzung der alten angenäherten Formel beschränken darf. Diese Genauigkeit wird besonders gross, wenn man, wie sich das bei stark absorbirenden Substanzen von selbst gebietet, mit Prismen von kleinem brechenden Winkel χ operirt. Vernachlässigt man $4n^4 x^2 \sin^4 \chi$ neben Eins, so ist:

$$r = 1 + \frac{n^2 x^2}{2} \sin^2 \chi,$$

kann man hingegen schon $(n^2 x^2 / 2) \sin^2 \chi$ neben Eins fortlassen, so gilt die alte Formel für durchsichtige Medien:

$$\sin \varphi' = n \sin \chi.$$

Aller Wahrscheinlichkeit nach lässt sich innerhalb derselben Grenze der Genauigkeit dann auch die Methode des Minimums der Ablenkung in Anwendung bringen.

Die Methode der Prismen zur Bestimmung von Brechungscoefficienten hat also vor allen übrigen den Vorzug einfacher und doch strenger Behandlung voraus und wird daher, soweit die Grösse der Absorption sie anwendbar bleiben lässt, den anderen vorzuziehen sein. In Fällen, wo sie

versagt, dürfte sich am meisten die Beobachtung des Polarisationswinkels $\bar{\varphi}$ und des zugehörigen Amplitudenverhältnisses $\bar{\rho}$ unter Zugrundelegung der neuen strengen Formeln empfehlen. Die Methode der totalen Reflexion erscheint bei absorbirenden Medien theoretisch mindestens bedenklich und wird daher nur am Platze sein, wo es nicht auf die grösstmögliche Genauigkeit ankommt.

Göttingen, Juli 1884.

XIV. Ueber die Theorie der Reflexion und Brechung an der Grenze durchsichtiger krystallinischer Medien; von W. Voigt.

In meiner Arbeit über „die Theorie des Lichtes für vollständig durchsichtige Medien¹⁾ habe ich die allgemeinsten Gesetze für die zwischen den ponderablen und Aethertheilchen wirkenden Kräfte auch für Krystalle aufgestellt und untersucht, durch welche Verfügungen sie auf das Fresnel'sche Gesetz der Fortpflanzung ebener Wellen führen. Hingegen habe ich damals, wo es sich zunächst nur um die Aufstellung der Grundzüge der neueren Theorie handelte, nichts über das Problem der Reflexion und Brechung an der Grenze krystallinischer Medien veröffentlicht und will daher jetzt, nachdem sich die neue Theorie in den verschiedensten Gebieten bewährt hat²⁾, das darauf bezügliche in Kürze nachtragen.

Bekanntlich sind die Gesetze der hierher gehörigen Erscheinungen zuerst von Hrn. F. Neumann³⁾ gegeben und später in höchst eleganter Weise von Hrn. Kirchhoff⁴⁾ unter Einführung seiner neuen Grenzbedingung, welche ich als „Kirchhoff'sche Princip“ bezeichnet und in einer verallgemeinerten Form vielfach angewandt habe, neu abgeleitet worden. Diese durch die Beobachtung bestätigten Gesetze folgen auch aus der von mir vertretenen Theorie,

1) W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 873. 1883.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 873. 1883, (durchsichtige isotrope, anisotrope und circularpolarisirende Medien) 23. p. 104 u. 554, 1884, (absorbirende isotrope, — Metalle und Farbstoffe) p. 577 (pleochroitische Krystalle) p. 498, (magnetisch-active Medien).

3) F. Neumann, Sitzungsber. der Berl. Acad. 1835. p. 1.

4) G. Kirchhoff, Sitzungsber. der Berl. Acad. 1876. p. 57.

v. Bezold Fig. 1-5. Boltzmann Fig. 6-8. Chwolson Fig. 9. Goldstein Fig. 10-12. Fleischl Fig. 13. Voigt Fig. 14-17.