2. *Zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit nach Fizeau und akustische Analogien; von Mathias Cantor.*

(Aus den Sitzungsberichten der kaiserl. Akad. der Wissensch. in Wien.
Mathem.-naturw. Kl. 116. Abt. IIa. 1907. Vorgelegt in der Sitzung am
6. Juni 1907.)

§ 1. Sieht man von den astronomischen Messungen ab, so beruht die Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit auf den Überlegungen, welche von Fizeau angestellt worden sind; denn dieselben Überlegungen liegen auch der Methode von Foucault zugrunde. Bei der fundamentalen Bedeutung, welche der Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit zukommt, erscheint eine exakte Begründung der Fizeauschen Methode von beträchtlicher Wichtigkeit. Der Mangel einer solchen zeigte sich aber auf das deutlichste bei der Diskussion jener Versuche, welche einen Einfluß der Farbe auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes ergaben.

Young und Forbes¹⁾ hatten durch Messungen, welche im wesentlichen nach der Fizeauschen Methode angestellt worden waren, gefunden, daß das blaue Licht sich um 1,8 Proz. schneller fortpflanzt als das rote.

Lord Rayleigh²⁾ führte dieses Ergebnis darauf zurück, daß bei der Fizeauschen Methode nicht die „Lichtgeschwindigkeit“, sondern eine „Gruppengeschwindigkeit“ bestimmt werde.

Die Gruppe entsteht durch Übereinanderlagerung zweier Wellenzüge von gleicher Richtung und gleicher Amplitude, deren Perioden sich ein wenig voneinander unterscheiden. Lord Rayleigh³⁾ hatte früher solche Wellengruppen untersucht

1) Young u. G. Forbes, Nature. 24. p. 303. 1881.

2) Lord Rayleigh, Nature 24. p. 382. 1881.

3) J. W. Strutt, Baron Rayleigh, Theorie des Schalles. Deutsch von Neesen, Braunschweig 1880. 1. Bd. p. 327 und 2. Bd. p. 385.

und gezeigt, daß deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der eines einfachen Wellenzuges verschieden ist, und er nimmt an, daß bei der Fizeauschen Methode die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer solchen Gruppe gemessen wird.

W. H. Macaulay¹⁾ hat auf die Schwierigkeit hingewiesen, welche der Erklärung von Lord Rayleigh anhaftet, und denselben zu einer weiteren Darstellung²⁾ veranlaßt. Indes geht auch aus diesen Betrachtungen in keiner Weise hervor, wie durch das Fizeausche Experiment veranlaßt wird, daß Wellen von verschiedener Periode auftreten, in welcher Beziehung die Perioden der einzelnen Wellen, welche die Gruppe bilden sollen, zu der Periode des Lichtes stehen, mit dem der Fizeausche Versuch angestellt wird, und warum endlich gerade die Geschwindigkeit der Gruppe bei diesem Versuch bestimmt wird.

Spätere Auseinandersetzungen³⁾ beziehen sich auf die Methode von Foucault und brauchen deshalb hier nicht näher besprochen zu werden. Es geht aber aus ihnen hervor, daß sowohl über die Grundlage der physikalischen Methoden zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit als auch über die Bedeutung der mit diesen Methoden ausgeführten Messungen eine ziemliche Unsicherheit besteht und der Zusammenhang zwischen der nicht direkt meßbaren Lichtgeschwindigkeit und den Beobachtungen, durch welche ihre Größe bestimmt wird, nicht streng hergestellt ist. Unter diesen Umständen schien es angemessen, zunächst festzustellen, *was bei dem Fizeauschen Experiment eigentlich beobachtet wird.*

§ 2. Die Fizeausche Anordnung läßt sich im Schema durch die Fig. 1 darstellen.

Ein Bündel paralleler Strahlen durchsetzt das rotierende Zahnrad R , wird vom Spiegel S reflektiert und nach nochmaligem Durchgange durch das Zahnrad durch das Auge bei A wahrgenommen.

Die Beobachtung ergibt, daß die Intensität der wahrgenommenen Lichter sich mit wachsender Rotationsgeschwindig-

1) W. H. Macaulay, Nature. 24. p. 556. 1881.

2) Lord Rayleigh, Nature. 25. p. 52. 1881/82.

3) Vgl. F. Auerbach im Handbuch der Physik. Herausgegeben von A. Winkelmann, 2. Aufl. Bd. VI. p. 480. 1906.

keit periodisch ändert. Eine exakte Theorie der Erscheinung wird die Frage zu beantworten haben: *Wie hängt die beobachtete Lichtintensität von den Abmessungen der Apparate und der Geschwindigkeit des Rades ab?*

§ 3. Um zu einer Lösung dieser Frage zu gelangen, kann zunächst der Spiegel in der Fizeauschen Anordnung ersetzt werden durch ein zweites Zahnrad, welches dem ersten ganz gleich ist, sich am Orte des Spiegelbildes des ersten befindet und mit demselben vollkommen synchron bewegt wird.

Fig. 1.

Dies vorausgesetzt, soll der Durchgang eines Bündels paralleler Strahlen durch die beiden rotierenden Räder untersucht werden. Das Bündel sei normal zu den Rädern — diese Richtung wird zur x -Achse gewählt — und sei so schmal, daß es an allen Stellen als von gleicher Intensität betrachtet werden kann.

Der Lichteindruck, den das aus dem zweiten Zahnrad austretende Licht in einem dort befindlichen Auge bewirkt, wird dann durch den zeitlichen Mittelwert der Amplitudenquadrate bestimmt. Der Raum zwischen den Zahnrädern sei erfüllt von einem homogenen Medium, in welchem die Maxwellschen Gleichungen gelten, so daß für den Lichtvektor E die Gleichung

$$(1) \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$$

besteht, wo ω die Lichtgeschwindigkeit in dem Medium bezeichnet. Zur Bestimmung von E ist dann weiter der Anfangszustand und das Verhalten an der Stelle $x = 0$, wo sich das erste Zahnrad befindet, gegeben.

Durch das Zahnrad wird der hinter ihm befindliche Raum abwechselnd beleuchtet und vollständig verdunkelt. Ist N die

Schwingungszahl des einfallenden Lichtes und ν die Zahl der Verdunkelungen in der Sekunde, so hat man für $x = 0$

$$(2) \quad E = S \sin 2 \pi N t,$$

wo

$$S = A \left[1 + \frac{4}{\pi} \left(\cos 2 \pi \nu t - \frac{1}{3} \cos 6 \pi \nu t + \dots \right) \right].$$

Dabei bezeichnet $2 A$ die Amplitude des einfallenden Lichtes.

Bis zur Zeit $t = 0$ soll das Zahnrad sich in einer Stellung befinden, in welcher das Licht ungestört durchgeht, so daß bis $t = 0$

$$(3) \quad E = 2 A \sin 2 \pi \left(N t - \frac{x}{\omega} \right).$$

Die Differentialgleichung (1) kann nun entsprechend den Nebenbedingungen (2) und (3) nach der von Riemann¹⁾ angegebenen Methode, welche schon bei einer früheren Gelegenheit²⁾ benützt worden ist, integriert werden. Die dort angewendete Bezeichnung und Darstellung wird auch hier gebraucht.

Die Rechnung wird sehr vereinfacht, wenn die Verdunkelungen nicht *sprungweise*, sondern *stetig* erfolgen. Dies wird erreicht, wenn man statt der Zahnräder Schirme benützt, welche den Zähnen entsprechende Sektoren tragen, durch die das Licht stetig bis zur vollständigen Abblendung geschwächt wird. Auch mit einem rotierenden Spiegel oder Nicholschen Prisma ließe sich eine stetige Abschwächung des Lichtes ausführen. Im folgenden soll eine solche vorausgesetzt werden und dann kann S in (2) ersetzt werden durch

$$S' = 2 A \cos^2 \pi \nu t.$$

Setzt man noch $y = \omega t$ und stellt E in der xy -Ebene dar (Fig. 2), so hat man für E im Punkte (xy) :

$$(I) \quad 2 E = E_a + E_b + \int_a^b \frac{\partial E}{\partial y} dx + \frac{\partial E}{\partial x} dy.$$

1) H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen. Braunschweig 1901. 2. Bd. p. 224.

2) M. Cantor, Ann. d. Phys. 20. p. 333. 1906.

Aus (3) folgt dann für $y = 0$

$$(3a) \quad \begin{cases} E = -2A \sin \beta x \\ \frac{\partial E}{\partial x} = -2A \beta \cos \beta x \\ \frac{\partial E}{\partial y} = -2A \beta \cos \beta x, \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist $\beta = 2\pi N/\omega$.

Fig. 2.

Es folgt hieraus, daß $(\partial E/\partial x + \partial E/\partial y)$ längs den zu G_2 parallelen Geraden verschwindet, und man erhält deshalb für $x = 0$

$$(2a) \quad \begin{cases} E = 2A \cos^2 \alpha y \sin \beta y \\ \frac{\partial E}{\partial y} = 2A \beta \cos^2 \alpha y \cos \beta y - 2A \alpha \sin 2\alpha \sin \beta y \\ \frac{\partial E}{\partial x} = -2A \beta \cos^2 \alpha y \cos \beta y + 2A \alpha \sin 2\alpha \sin \beta y, \end{cases}$$

wo $\alpha = \pi \nu/\omega$.

Bei Ausführung der in (I) angedeuteten Integration ist zu berücksichtigen, daß

$$dx = 0 \text{ längs } aO$$

$$dy = 0 \text{ längs } Ob$$

und daß die Koordinaten von a und b , wie in Fig. 2 ersichtlich, durch $(y - x)$ bez. $(y + x)$ angegeben werden. Für E im Punkte (xy) folgt dann

$$\begin{aligned} 2E = 2A \cos^2 \alpha (y - x) \sin \beta (y - x) - 2A \beta \int_{y-x}^0 \cos^2 \alpha y \cos \beta y dy \\ + 2A \alpha \int_{y-x}^0 \sin 2\alpha \sin \beta y dy + 2A \beta \int_0^{y+x} \cos \beta x dx \end{aligned}$$

und daraus nach einfacher Umformung

$$(Ia) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 E = 2 A \sin \beta (y - x) + A \sin (\beta + 2\alpha)(y - x) \\ \quad \quad \quad + A \sin (\beta - 2\alpha)(y - x) \end{array} \right.$$

oder, wenn y , α , β durch t , ν und N ersetzt werden,

$$(Ib) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 E = 2 A \sin 2 \pi N \left(t - \frac{x}{\omega} \right) + A \sin 2 \pi (N + \nu) \left(t - \frac{x}{\omega} \right) \\ \quad \quad \quad + A \sin 2 \pi (N - \nu) \left(t - \frac{x}{\omega} \right). \end{array} \right.$$

Hiernach erhält man drei fortschreitende Wellenzüge; einen mit der ursprünglichen Periode N und zwei neue, deren Schwingungszahlen um die der Verdunkelung vermehrt, beziehungsweise vermindert sind.

Setzt man voraus, daß, wie es beim Fizeauschen Experiment der Fall ist, ν sehr klein gegen N ist, so kann das Auge die neu auftretenden Farben nicht als solche wahrnehmen, sondern erhält einen Lichteindruck, welcher der ursprünglichen Periode entspricht. Die Intensität dieses Lichteindruckes wird erhalten, wenn man die drei Wellenzüge zu einem mit der Periode N und zeitlich veränderlicher Amplitude B zusammenfaßt.

Aus (Ia) folgt nun

$$E = A [\cos \beta x + \cos \beta x \cos 2 \alpha (y - x)] \sin \beta y \\ - A [\sin \beta x + \sin \beta x \cos 2 \alpha (y - x)] \cos \beta y,$$

woraus man findet

$$(II) \quad B = 2 A \cos^2 \alpha (y - x).$$

Dieses Licht wird nun durch den zweiten rotierenden Schirm beobachtet und durch diesen geschwächt im Verhältnis

$$\cos^2 \alpha y.$$

Der im Auge entstehende Lichteindruck wird bestimmt durch den Mittelwert des Amplitudenquadrates während der Dauer einer Verdunkelungsperiode, also während der Zeit $T = 1/\nu$. Bezeichnet also i die wahrgenommene Lichtstärke, so hat man

$$i = \frac{1}{T} \int_0^T B^2 \cos^4 \alpha y \, dt$$

oder, wenn statt t und T y und α eingesetzt wird,

$$i = \frac{4\alpha A^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos^4 \alpha(y-x) \cos^4 \alpha y \, dy.$$

Man erhält hieraus

$$i = \frac{3}{32} A^2 \left[1 + 8 \cos^2 \alpha x + \frac{8}{3} \cos^2 \alpha x \right].$$

Es ändert sich hiernach die wahrgenommene Lichtstärke periodisch mit wachsendem α , d. i. mit wachsender Rotationsgeschwindigkeit der Schirme und erhält immer gleiche Werte für

$$\alpha x = \alpha_0 x + k\pi,$$

wenn k eine ganze Zahl bedeutet.

Die Lichtstärke verschwindet nie völlig, aber sie hat ein sehr deutliches Minimum für

$$\alpha x = k \frac{\pi}{2}.$$

Die kleinste verhält sich zur größten Lichtstärke, welche *ceteris paribus* durch Veränderung der Rotationsgeschwindigkeit entsteht, wie 3:35. Die kleinste Geschwindigkeit, welche ein Minimum von i , also die möglichst vollständige Verdunkelung des Gesichtsfeldes ergibt, ist bestimmt durch

$$(III) \quad \alpha x = \frac{\pi}{2}.$$

Hierbei bedeutet x den Abstand der beiden Schirme.

Bei dem Fizeauschen Versuch entspricht $x = 2l$, wenn mit l der Abstand des Zahnrades vom Spiegel bezeichnet wird. Setzt man für α seinen Wert und bezeichnet mit ν_0 die Zahl der Verdunkelungen pro Sekunde bei der kleinsten Geschwindigkeit, die ein Minimum von i ergibt, so muß

$$4l\nu_0 = \omega.$$

Beim Fizeauschen Zahnrade würde ν_0 ausgedrückt durch

$$\nu_0 = zn,$$

wenn z die Anzahl der Zähne, n die Tourenzahl des Rades angibt, bei welcher die erste Verdunkelung eintritt, und man erhält

$$\omega = 4lzn,$$

die bekannte Relation, nach welcher die Lichtgeschwindigkeit bestimmt wurde.

§ 4. In der Maxwellschen Gleichung (1) bedeutet ω eine durch die Natur des Mediums bestimmte Konstante. Die Anwendung dieser Gleichung setzt voraus, daß in dem Medium keine Dispersion stattfindet. Nimmt man aber an, daß diese Gleichung auch noch auf dispergierende Medien angewendet werden kann, wenn man ω für verschiedene Schwingungszahlen verschiedene Werte beilegt, so läßt sich der experimentell beobachtete Einfluß der Farbe auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes zum Ausdruck bringen.

Wie (Ib) zeigt, treten neben der ursprünglichen Schwingung mit der Periode N noch solche mit den Perioden $N + \nu$ und $N - \nu$ auf. Wenn nun in einem dispergierenden Medium ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedeutet für Licht von der Schwingungszahl N , so müssen den beiden anderen Wellenzügen davon verschiedene Werte ω' und ω'' beigelegt werden. Dies vorausgesetzt erhält man aus (Ib):

$$(Ic) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 E = 2 A \sin 2 \pi N \left(t - \frac{x}{\omega} \right) + A \sin 2 \pi (N + \nu) \left(t - \frac{x}{\omega'} \right) \\ \quad \quad \quad + A \sin 2 \pi (N - \nu) \left(t - \frac{x}{\omega''} \right). \end{array} \right.$$

Nun ist ν sehr klein gegen N — bei den Versuchen von Fizeau war ν/N etwa 10^{-9} — und man kann deshalb setzen

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega + \frac{\partial \omega}{\partial N} \cdot \nu = \omega (1 + \varepsilon) \\ \omega'' &= \omega - \frac{\partial \omega}{\partial N} \cdot \nu = \omega (1 - \varepsilon), \end{aligned}$$

wo

$$\varepsilon = \frac{\nu}{\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial N}$$

auch ein sehr kleiner Bruch ist.

Führt man dies in (Ic) ein und vernachlässigt die Glieder zweiter Ordnung, so erhält man

$$\begin{aligned} 2 E &= 2 A \sin 2 \pi N \left(t - \frac{x}{\omega} \right) + A \sin 2 \pi N \left(t - \frac{x}{\omega} + \frac{m}{\omega} \right) \\ &\quad + A \sin 2 \pi N \left(t - \frac{x}{\omega} - \frac{m}{\omega} \right), \end{aligned}$$

wo

$$m = \varepsilon x + \frac{\omega t \nu}{N} - \frac{x \nu}{N}$$

gesetzt ist.

Drückt man t , ν , N wieder durch y , α , β aus, so wird
 $2E = 2A \sin \beta (y - x) + A \sin \beta (y - x + m) + A \sin \beta (y - x - m)$.

Für die Amplitude des resultierenden Wellenzuges erhält man

$$B = A(1 + \cos \beta m)$$

oder, wenn man für m seinen Wert setzt, nämlich

$$m = \left(\frac{x}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial N} N + y - x \right) \frac{\nu}{N},$$

wird

$$B = A \left[1 + \cos 2\alpha \left(y - x + \frac{x}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial N} N \right) \right].$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\xi = x \left(1 - \frac{N}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial N} \right),$$

so wird

$$(IIa) \quad B = 2A \cos^2 \alpha (y - \xi).$$

Man erhält also denselben Ausdruck wie in (II), wenn dort x durch ξ ersetzt wird.

Die Bedingung für die erste möglichst vollständige Verdunkelung des Gesichtsfeldes wird also wie in (III) gegeben sein durch

$$(IIIa) \quad \alpha \xi = \frac{\pi}{2}.$$

Wenn wieder ν_0 die dem ersten Minimum entsprechende Anzahl von Verdunkelungen pro Sekunde bedeutet und $x = 2l$ gesetzt wird, so erhält man

$$4\nu_0 l \frac{\omega - N \frac{\partial \omega}{\partial N}}{\omega^2} = 1$$

oder

$$(IV) \quad \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{N}{\omega} \right) = \frac{1}{4\nu_0 l}.$$

Nicht wesentlich verschieden davon ist die Relation

$$4\nu_0 l = \frac{\partial}{\partial N} (N\omega).$$

$$U = \frac{\partial}{\partial N} (N\omega)$$

ist die von Lord Rayleigh als Gruppengeschwindigkeit bezeichnete Größe, welche durch die Beobachtung von ν_0

bestimmt wird. Ist die Dispersion des Mediums bekannt, so kann hiernach ω berechnet werden.

§ 5. Im vorstehenden ist gezeigt, daß neben der ursprünglichen Welle mit der Schwingungszahl N neue mit den Schwingungszahlen $N + \nu$ und $N - \nu$ auftreten. Es bedeutet das, daß bei der Beleuchtung durch den rotierenden Schirm eine Erscheinung auftritt, wie sie nach dem *Dopplerschen Prinzip* bei der Reflexion an einen oszillierenden Spiegel zu erwarten ist.

Würde mit monochromatischem Licht beleuchtet und das Licht nach Durchgang durch den ersten Schirm spektral zerlegt, so würde man drei äquidistante Linien erhalten. Die Intensität der mittleren wäre viermal so groß als die der beiden äußeren. Vielleicht steht das häufig beobachtete Vorkommen von *Triplets*¹⁾ hiermit im Zusammenhang.

Wenn das Licht nicht streng monochromatisch ist, so würde man eine *Verbreiterung* der entsprechenden Spektrallinie beobachten können. Wenn die Verdunkelung nicht stetig, wie hier vorausgesetzt wurde, sondern sprungweise durch ein Zahnrad erfolgt, so würden außer den erwähnten noch Wellen mit anderen von N weiter entfernten Schwingungszahlen entstehen. Die Intensität, die diesen entspricht, nimmt aber rasch ab, so daß auch dann die Erscheinung nicht wesentlich geändert würde.

Indes scheint es mit mechanischen Mitteln nicht erreichbar, die Zahl der Unterbrechungen so weit zu steigern, um eine merkbare Verbreiterung zu erhalten.

Günstiger liegen die Verhältnisse bei *akustischen Beobachtungen*, für welche sich dieselben Folgerungen ergeben.

Es ist in der Tat *wiederholt* beobachtet worden, daß ein einfacher Ton beim Durchgang durch eine rotierende durchlochte Scheibe in einen *Dreiklang* aufgelöst wird.²⁾ Es würde ferner die der Rechnung zugrunde gelegte Modifikation des Fizeauschen Versuches die Möglichkeit bieten, die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles* zu bestimmen.

¹⁾ Vgl. H. Kayser im Handbuch der Physik. Herausgegeben von A. Winkelmann, 2. Aufl. Bd. VI. p. 717. 1906.

²⁾ Vgl. J. Stefan, Ber. d. Wiener Akad. II. 54. p. 598. 1866.

§ 6. Zum Schlusse möchte ich darauf hinweisen, daß mit Hilfe des Fizeauschen Versuches *die Messung der Zeit* auf die der Länge zurückgeführt werden kann.

Wird nämlich dieser Versuch im Vakuum ausgeführt und der Umlauf des Zahnrades auf das erste Minimum eingestellt, so beschreibt dieses Rad direkt eine *Uhrenbewegung*. Die Anzahl der Zähne, welche von einem als Nullpunkt der Zeitmessung gewählten Augenblick an durch eine bestimmte Stelle hindurchgehen, würde unmittelbar die *Maßzahl der Zeit* angeben.

Zur *Reproduzierbarkeit* dieser *physikalischen Zeitmaße* wäre bloß erforderlich, daß eine *Längenmessung* — die von l — möglich sei und daß *Helligkeitsgrade* unterschieden, bez. daß solche als unverändert beurteilt werden können.

Statt des Vakuums könnte auch ein anderes Medium als *Normalmedium* benützt werden, wenn dasselbe und die Farbe des Lichtes eindeutig bestimmbar sind. Dies vorausgesetzt ist dann nach Michelson auch eine reproduzierbare Längeneinheit festgelegt.

Würzburg, Phys. Institut.

(Eingegangen 2. August 1907.)