XI. Ueber die absolute Compressibilität des Quecksilbers; von G. de Metz.¹⁾

(Hierzu Taf. VIII Fig. 12—17.)

1. Die meisten Physiker, welche sich mit der Compressibilität der Flüssigkeiten beschäftigten, behandelten dieselbe vom experimentellen Standpunkte, mit Ausnahme von Regnault, welcher seine Resultate mit der Elasticitätstheorie von Lamé verglich. Es war für mich von besonderem Interesse, eine vergleichende Untersuchung der Theorie mit den gegebenen Methoden von Regnault und von Jamin durchzuführen, und zwar, wenn möglich, unter gleichen experimentellen Bedingungen. Dementsprechend wählte ich als Object das Quecksilber: Erstens, da verschiedene Autoren demselben wesentlich voneinander abweichende Compressibilitätscoefficienten zuschreiben; zweitens, da es weniger compressibel ist, als alle andere Flüssigkeiten. Folglich konnte die erwähnte Vergleichung mit aller Strenge durchgeführt werden.

Zur Zeit, als ich mich mit der Untersuchung dieses Gegenstandes beschäftigte, publicirte Hr. Amagat²⁾ eine Abhandlung über dasselbe Thema; trotzdem der Plan seiner Arbeit und die Hilfsmittel, deren er sich bediente, andere waren, hatte ich doch die Freude zu erfahren, dass er mit mir zu einer übereinstimmenden Lösung der Frage gekommen ist.

2. Der Plan meiner Untersuchung war folgender:

a) Es wurden vier cylindrische Piezometer mit halbsphärischen Endungen aus deutschem Glase von verschiedener Wanddicke (1,4 mm bis 2,9 mm) verwendet;

b) jedes Piezometer wurde nach Regnault's

c) und gleichzeitig nach Jamin's Methode untersucht;

1) Mitgetheilt der Naturforschergesellschaft der Universität Odessa den 8. Nov. 1890. Vgl. die Abhandlungen derselben, Mathem. Abth. **13**. p. 109—227. 1891.

2) Amagat, Journ. de phys. (2) **8**. p. 197. 1889, oder Ann. de chim. et de phys. (6) **22**. p. 137. 1891.

d) mittels der Ergebnisse von Beobachtungen b) und c) und unter Berücksichtigung der Gleichung der sogenannten räumlichen elastischen Piezometerausdehnung berechnete ich noch einmal den Coefficienten der absoluten Compressibilität des Quecksilbers;

e) die Vergleichung der Resultate b), c), d) sollte entscheiden, welche der erwähnten Methoden richtig sei, und worin der Fehler derjenigen Methode bestehe, welche als unrichtig betrachtet werden soll.

3. Die von Hrn. Wild¹⁾ und Hrn. Marek²⁾ ausgeführten Untersuchungen über die Reinheit des Quecksilbers haben gezeigt, dass die Art und Weise, in welcher die Reinigung vollzogen wird, nicht ohne Einfluss ist auf das specifische Gewicht und möglicherweise auf andere physikalische Eigenschaften des Quecksilbers. Sie behaupten, reines Quecksilber habe ein specifisches Gewicht von 13,5956 bei 0°.

Ich reinigte das Quecksilber folgendermaassen:

a) Es wurde nacheinander gewaschen mit einer Lösung von Salpetersäure, Wasser, einer Lösung von Kalilauge, wieder mit Wasser und endlich durch Erwärmen getrocknet;

b) dieses Quecksilber wurde dann 24 Stunden lang nach Th. M. Crafts'³⁾ Verfahren mittels eines Luftstromes oxydirt, wobei sich seine Oberfläche mit einer Menge von Oxydationsproducten bedeckte;

c) endlich wurde es im Vacuum destillirt in einem Apparate ähnlich demjenigen von Weinhold;

d) mittels des Pyknometers fand ich sein specifisches Gewicht 13,5958 bei 0°.

4. Die Piezometer wurden sehr sorgfältig gereinigt und getrocknet; die Böden derselben liess ich bis zum letzten Moment offen und schmolz sie dann erst halbsphärisch ab. Dabei achtete ich darauf, dass die Wanddicke des Bodens gleich der des cylindrischen Theiles war. Die Füllung geschah folgendermaassen. Jedes Piezometer in der Form *abcde*

1) Wild, Repertorium für Meteorologie. 3. p. 10—12, 42—50. St. Petersburg, 1874.

2) Marek, Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures à Paris. p. D. 58. 1883.

3) Th. M. Crafts, Beib. 14. p. 1176. 1890.

(Taf. VIII, Fig. 12) bestand aus dem Reservoir *ab*, aus der langen Capillare *bc* und einer Erweiterung *cd*, welche durch das Rohr *de* mit der Carré'schen Luftpumpe verbunden war. In die Erweiterung *cd* wurde ein Quantum von Quecksilber gegossen, welches genügte, um nicht bloss das Reservoir *ab*, sondern noch einen Theil der Erweiterung *cd* zu füllen; dann wurde die Luft bis auf 1 mm evacuirt und das ganze System *abcde* mittels eines Brenners von vier Flammen in *M* erwärmt. Zu diesem Zwecke wurde das Piezometer auf dem halbcylindrischen Eisenblech *MN* (Fig. 12) schief eingestellt, mittels Asbest in den Puncten *o*, *p*, *q* isolirt und mit ähnlichem Eisenblech dicht bedeckt. Das Sieden begann nach 15—20 Minuten und dauerte 10—15 Minuten, worauf die Flamme gelöscht wurde. Das Piezometer erkaltete und füllte sich mit dem Quecksilber. Jedoch bemerkte ich bald, dass nach dem ersten Sieden noch immer sehr kleine Luftblasen bleiben, und wiederholte deswegen diese Manipulation; nach dem zweiten Sieden fand ich keine Spur der Luft mehr.

Als das Piezometer bei Zimmertemperatur gefüllt war, schnitt ich die Erweiterung *cd* ab und verschmolz mit der Capillare *bc* eine graduirte Capillare *C*. Dadurch man die graduirte Capillare *C* immer rein und trocken halten kann. Während meiner Untersuchungen benutzte ich diese Operation jedesmal, wenn die Capillare *C* feucht oder unrein erschien.

5. Das Piezometer wurde nachher mit gutem Siegelack in eine T-förmige Messinghülse *aa* (Fig. 13) eingekittet, und zwar so tief, dass das halbkugelförmige Ende bei der Capillare *C* bedeckt wurde; dies war nothwendig wegen der leichten Zerbrechlichkeit des mit Quecksilber gefüllten Piezometers.

Ausserdem¹⁾ verwandte ich:

a) Eine Cailletet'sche Pumpe, welche einen Druck bis 9,3 Atm. aushielt;

b) ein Luftmanometer und ein Quecksilbermanometer; die Zimmertemperatur des Luftthermometers wurde durch Wasser constant erhalten;

c) zwei Thermometer. Die Temperatur des Bades, worin sich der ganze Apparat (Fig. 13) befand, wurde auf einem bis

1) Vgl. G. de Metz, Wied. Ann. **41**. p. 664—668. 1890.

auf $0,02^{\circ}$ C. eingetheilten Alvergnyat'schen Thermometer abgelesen; die Temperatur des Luftmanometers — nach einem gewöhnlichen guten bis auf 1° C. eingetheilten Thermometer. Einige Versuche wurden bei 0° ausgeführt;

d) eine graduirte Capillare *C*. Jede Theilung β derselben fasste in sich $0,26386$ mm, d. h. $\beta = 0,26386 \pm 0,00028$ mm, und da der Abstand zwischen je zwei Strichen $1,5$ mm betrug, so erfolgte die Schätzung bis auf das Zehntel ohne irgend eine Schwierigkeit. Diese Capillare, von deren Regelmässigkeit ich mich überzeugt hatte, wurde nach und nach bei allen Piezometern angeschmolzen;

e) das Correctionsrohr *I*. Seine Theilung $\beta_1 = 1,0038 \pm 0,0001$ mm. Nach meiner Beobachtung war es nicht thunlich, eine Capillare von grösserer Empfindlichkeit zu benutzen, wegen der Störungen, welchen die Bewegung des Meniscus unterliegt, gleichwohl, ob Wasser oder Quecksilber gebraucht wird. Das Correctionsrohr *I* stand jetzt horizontal;

f) die Cailletet'sche Pumpe und der Apparat (Fig. 13) wurden in eine solche Verbindung gebracht, dass es möglich war, nach der Regnault'schen Methode oder nach der Jamin'schen zu operiren. Wollte man z. B. nach Regnault verfahren, so verband man die Oeffnungen *G* und *f* mit der Pumpe; ging man zur Jamin'schen Methode über, so verband man nur die Oeffnung *f* mit der Pumpe und setzte an die Oeffnung *G* das Correctionsrohr *I* an. Wenn eine Verbindung der Pumpe mit den Oeffnungen *G* und *f* stattfindet, so beobachtet man bei Druckvergrösserung eine scheinbare Volumenverminderung θ'' des Quecksilbers in der Capillare *C*. Bleibt die Oeffnung *G* allein in Verbindung, während die Oeffnung *f* mit der freien Atmosphäre in unmittelbarer Verbindung steht, so beobachtet man eine scheinbare Volumenvergrösserung θ' des Quecksilbers in der Capillare *C*. Uebt man den Druck durch die Oeffnung *f* allein aus, so beobachtet man eine scheinbare Volumenverminderung θ des Quecksilbers in der Capillare *C* und eine scheinbare Volumenvergrösserung γ des Wassers im Correctionsrohre *I*. Diese Manipulationen gingen rasch und leicht vor sich; dank dem Umstande, dass das ganze Verbindungssystem ohne Hähne gebaut war und

nur mittels Schrauben, Muttern und Metallstöpseln functionirte — der Druck bleibt sehr constant.

6. Die Regnault'sche Methode gründet sich auf den Formeln der Elasticitätstheorie, welche von der genauen Bestimmung der Piezometer-Dimensionen abhängen. Eine der feinsten Messungen in diesem Gebiete ist die Messung der inneren R_0 - und äusseren R_1 -Radien des cylindrischen Theiles; dieselbe wurde mit einem bis auf 0,02 mm getheilten Comparator ausgeführt. In folgender Tabelle I sind die Mittelwerthe von R_0 und R_1 gegeben; jede Zahl wurde folgendermaassen erhalten. Zwei Ringe wurden am oberen (a)- und unteren (b)-Ende des Piezometerrohres vor dessen Zuschmelzung abgeschnitten und jeder Ring wurde nach vier verschiedenen Durchmessern im Abstände von 45° untersucht.

Tabelle I.

Constanten von R_1 und R_0 der Piezometer.

Nummer und Art des Glases		R_1	R_0	$R_1 - R_0 = e$
		mm	mm	mm
I	Greiner & Co. in Stützerbach	10,221	8,808	1,413
II	bei Ilmenau in Thüringen	9,316	7,254	2,062
III	E. Gundelach in Gehlberg	10,156	7,722	2,434
IV	bei Elgersburg in Thüringen	9,288	6,413	2,875

Es ist aber von Wichtigkeit, hier mitzutheilen, inwiefern die Radien $R_{1(a)}$ und $R_{1(b)}$, sowie $R_{0(a)}$ und $R_{0(b)}$ voneinander abweichen, da dieser Unterschied die Cylindricität jedes Piezometers charakterisirt und in theoretischer Hinsicht eine grosse Rolle spielt.

Tabelle II.

Radienveränderungen längs der Cylinderaxe.

Nr.	$R_{1(a)}$	$R_{1(b)}$	$\Delta R_1 = R_{1(a)} - R_{1(b)}$	$R_{0(a)}$	$R_{0(b)}$	$\Delta R_0 = R_{0(a)} - R_{0(b)}$
	mm	mm	mm	mm	mm	mm
I	10,221	10,275	- 0,054	8,808	8,820	- 0,012
II	9,235	9,397	- 0,162	7,177	7,330	- 0,153
III	10,017	10,295	- 0,278	7,615	7,830	- 0,215
IV	9,431	9,145	+ 0,286	6,452	6,372	+ 0,080

Tabelle III.
Wanddickeveränderungen längs der Cylinderaxe.

Nr.	$\Delta R_1 = R_{1(a)} - R_{1(b)}$	$\Delta R_0 = R_{0(a)} - R_{0(b)}$	$\Delta e = \Delta R_1 - \Delta R_0$	e
	mm	mm	mm	mm
I	- 0,054	- 0,012	0,042	1,413
II	- 0,162	- 0,153	0,009	2,062
III	- 0,278	- 0,215	0,063	2,434
IV	+ 0,286	+ 0,080	0,206	2,875

Diese zwei Tabellen zeigen uns, dass 1. die Cylindricität der Röhren nicht vollkommen ist, denn die Differenzen ΔR_1 und ΔR_0 betragen zuweilen 2,8 Proc.; 2. die Wanddicke e ist nicht überall gleich, denn die Differenzen Δe erreichen ca. 2 Proc. für Nr. I, II, III und ca. 7 Proc. für Nr. IV.

7. Auf Grund der gemachten Messungen lassen sich die Volumina der Piezometer berechnen: $U_0 = \pi R_0^2 H$ das Volumen des cylindrischen Theiles, $V_0 = \frac{4}{3} \pi R_0^3$ des sphärischen, $W_0 = U_0 + V_0$ das gesammte Volumen. Das Volumen W_0 wurde einerseits aus Dimensionen berechnet, andererseits direct durch Wägung bestimmt. Die Tabelle IV enthält die entsprechenden Data.

Tabelle IV.
Piezometervolumina U_0 , V_0 , W_0 .

Nr.	H	U_0	V_0	ber. $U_0 + V_0$	W_0 beob.	$\Delta W_0 = U_0 + V_0 - W_0$
	mm	cmm	cmm	cmm	cmm	cmm
I	228	55544	2861	58405	57756	+ 649
II	256	42295	1598	43893	43905	- 12
III	227	42508	1928	44436	44219	+ 217
IV	249,5	82221	1104	33325	33091	+ 234

Die Differenzen ΔW_0 zwischen den Columnen $U_0 + V_0$ und W_0 erreichen nur 0,03—1,10 Proc. Solche Schwankungen kann man als günstig betrachten; Grassi¹⁾ hat grössere Unterschiede gehabt von 0,7—5,7 Proc. (Piezometer *B*). Es ist leicht deren Ursprung zu finden, wenn man sich erinnert, dass Glasröhren nie vollständig cylindrisch sind, und dass es nicht möglich ist, die Spitzen derselben so abzuschmelzen, dass die

1) Grassi, *Ann. de chim. et de phys.* (3) **31**. p. 445—446. 1851.

Radien der cylindrischen und sphärischen Theile einander gleich bleiben.

8. Wir haben also mit folgenden Grössen zu thun: R_1 , R_0 , U_0 , V_0 , W_0 , θ , θ' , θ'' und γ , um nach Lamé die Coefficienten der absoluten Compressibilität χ_v , der scheinbaren χ_a und der kubischen κ des Piezometers zu berechnen. Aber die von Lamé¹⁾ gegebenen Gleichungen sind auf die Hypothese gegründet, dass die sogenannte Poisson'sche Constante σ , d. h. das Verhältniss der Quercontraction zur Längsdilation des ausgedehnten Stabes, für homogene und isotrope feste Körper gleich ist dem Bruche $\sigma = 0,25$. Wir wollen hier nicht eingehen in die Controversen bezüglich dieser Hypothese, welche seit Navier bis zur letzten Zeit stattgefunden haben, denn sie bleiben ohne Einfluss auf die uns interessirende Frage.²⁾ Wir betrachten die Abhängigkeit von den beiden Lamé'schen Elasticitätsconstanten λ und μ , welche sich mit Young's Modul E , Poisson's Constante σ und der kubischen Compressibilität κ mittels folgender Gleichungen verbinden:

$$(1) \quad E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu + \lambda},$$

$$(2) \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)},$$

$$(3) \quad \kappa = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}.$$

Es ist leicht, die nöthigen Gleichungen für cylindrische sowie für sphärische Umhüllungen herzustellen: Es sei ein homogener und isotroper Hohlcylinder mit ebenen Böden gegeben, welcher einen inneren Druck P_0 und einen äusseren P_1 erleidet; es sei die Länge H dieses Cylinders so gross, dass man den Einfluss der Böden vernachlässigen kann; es sei ϱ die Verschiebung des Theilchens, welches sich in der zur Cylinderaxe senkrechten Ebene befindet und dessen Abstand von dieser Axe in der Radiusrichtung r ist. Lamé³⁾ hat

1) Regnault, Mém. de l'institut de France. 21. p. 438—442. 1847.

2) Wir haben diese Frage behandelt im zweiten Kapitel unserer russischen Abhandlung p. 158—179.

3) Lamé, Leçons sur l'élasticité des corps solides. p. 189. Paris, 1867.

gezeigt, dass diese Verschiebung durch folgende Gleichung mit zwei Constanten a , b dargestellt wird:

$$(4) \quad \varrho = ar + \frac{b}{r}.$$

Ausser der Verschiebung in der Richtung des Radius ist noch eine andere ξ möglich in der Richtung H der Cylinderaxe; sie wird bestimmt mittels der Gleichung mit einer Constante c :

$$(5) \quad \xi = cH.$$

Haben R_1 , R_0 , P_1 , P_0 , λ , μ die obenerwähnten Bedeutungen, so drückt man die Constante a , b , c folgendermaassen aus:

$$(6) \quad a = c = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{R_0^2 P_0 - R_1^2 P_1}{R_1^2 - R_0^2},$$

$$(7) \quad b = \frac{1}{2\mu} \frac{R_0^2 R_1^2 (P_0 - P_1)}{R_1^2 - R_0^2}.$$

Führen wir diese Werthe von a , b , c in die Gleichungen (4) und (5) ein, so bekommen wir für ϱ und ξ die Ausdrücke:

$$(8) \quad \varrho = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{R_0^2 P_0 - R_1^2 P_1}{R_1^2 - R_0^2} \cdot r + \frac{1}{2\mu} \frac{R_0^2 R_1^2 (P_0 - P_1)}{R_1^2 - R_0^2} \frac{1}{r},$$

$$(9) \quad \xi = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{R_0^2 P_0 - R_1^2 P_1}{R_1^2 - R_0^2} \cdot H.$$

Mittels dieser zwei Ausdrücke kann man die Volumenveränderung ΔU_0 bestimmen, wenn man bemerkt, dass unter dem Einflusse der äusseren Kräfte der Radius R_0 sich in $R_0 + \varrho$ und die Höhe H in $H + \xi$ verändert. Das neue Volumen

$$(10) \quad U_0 + \Delta U_0 = \pi (R + \varrho)^2 (H + \xi),$$

und die Volumenvergrösserung

$$(11) \quad \Delta U_0 = 2\pi R_0 H \varrho + \pi R_0^2 \xi,$$

oder auf Einheit des Volumens bezogen

$$(12) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = \frac{2\varrho}{R_0} + \frac{\xi}{H}.$$

Um aus der letzten Gleichung diesen Werth wirklich zu berechnen, benutzen wir die Gleichung (8), indem wir darin $r = R_0$ setzen und die Gleichung (9); dann haben wir:

$$(13) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = \frac{3}{3\lambda + 2\mu} \frac{R_0^2 P_0 - R_1^2 P_1}{R_1^2 - R_0^2} + \frac{1}{\mu} \frac{R_1^2 (P_0 - P_1)}{R_1^2 - R_0^2}.$$

Dieser Ausdruck ist ganz allgemein. Wir werden nur diejenigen Volumenveränderungen betrachten, welche in den Compressibilitätsversuchen der Flüssigkeiten eintreten, und der Einfachheit wegen bezeichnen wir ein für alle Mal:

$$(14) \quad \frac{R_0^2}{R_1^2 - R_0^2} = M; \quad \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} = M + 1.$$

a) Es sei $P_1 = 0$, dann:

$$(15) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = P_0 \left\{ \frac{3M}{3\lambda + 2\mu} + \frac{M+1}{\mu} \right\},$$

oder

$$(16) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = P_0 \left\{ \frac{M(5\mu + \lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \right\},$$

und nach der Bezeichnung (3):

$$(17) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = P_0 \alpha \left\{ \frac{M(5\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{3\mu} \right\}.$$

b) Es sei $P_0 = 0$, dann:

$$(18) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = -P_1 \left\{ \frac{3(M+1)}{3\lambda + 2\mu} + \frac{M+1}{\mu} \right\},$$

oder

$$(19) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = -P_1 \frac{(M+1)(5\mu + 3\lambda)}{\mu(3\lambda + 2\mu)},$$

und nach der Bezeichnung (3):

$$(20) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = -P_1 \alpha \frac{(M+1)(5\mu + 3\lambda)}{3\mu}.$$

c) Es sei $P_1 = P_0 = P$, dann:

$$(21) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = -\frac{3P}{3\lambda + 2\mu} = -\alpha P.$$

Aus den Gleichungen (17), (20), (21) erhält man die Originalformel von Lamé,¹⁾ indem man $\lambda = \mu$ setzt, nämlich:

$$(17') \quad a) P_1 = 0; \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = \frac{8M+5}{3} \alpha P_0,$$

$$(20') \quad b) P_0 = 0; \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = -\frac{8(M+1)}{3} \alpha P_1,$$

$$(21') \quad c) P_1 = P_0 = P; \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = -\frac{3P}{5\mu} = -\alpha P.$$

9. Es bleibt noch übrig, ähnliche Gleichungen für die sphärischen Theile des Piezometers zu erhalten. Wenden wir

1) Regnault, l. c. p. 440.

uns wieder zu Lamé,¹⁾ so sehen wir — dass die Verschiebung ϱ eines Theilchens, das sich im Abstand r vom Centrum befindet und sich nach der Radiusrichtung bewegt — durch die Gleichung mit zwei Constanten a , b

$$(22) \quad \varrho = ar + \frac{b}{r^2}$$

ausgedrückt wird. Wenn, wie schon erwähnt, R_0 den inneren, R_1 den äusseren Radius, P_0 den inneren und P_1 den äusseren Druck, λ und μ die Lamé'schen Constanten bedeuten, so sind

$$(23) \quad a = \frac{R_0^3 P_1 - R_1^3 P_0}{(3\lambda + 2\mu)(R_1^3 - R_0^3)},$$

$$(24) \quad b = \frac{R_0^3 R_1^3 (P_0 - P_1)}{4\mu(R_1^3 - R_0^3)}.$$

Führen wir diese Werthe von a und b in die Gleichung (22) ein, so bekommen wir die Verschiebung

$$(25) \quad \varrho = \frac{R_0^3 P_0 - R_1^3 P_1}{(3\lambda + 2\mu)(R_1^3 - R_0^3)} \cdot r + \frac{R_0^3 R_1^3 (P_0 - P_1)}{4\mu(R_1^3 - R_0^3)} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Mittels dieses Ausdrucks berechnen wir die Volumenveränderung ΔV_0 , indem wir bemerken, dass unter dem Einflusse der äusseren Kräfte der Radius R_0 sich in $R_0 + \varrho$ verändert. Das neue Volumen

$$(26) \quad V_0 + \Delta V_0 = \frac{4}{3} \pi (R_0 + \varrho)^3,$$

oder, nach Vernachlässigung der zweiten und dritten Potenzen der unendlich kleinen Verschiebungen, die Volumenvergrößerung

$$(27) \quad \Delta V_0 = 4\pi R_0^2 \varrho,$$

und auf die Einheit der Volumen bezogen

$$(28) \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{3\varrho}{R_0}.$$

Aus dieser Gleichung finden wir den Werth von $\Delta V_0/V_0$, indem wir in der Gleichung (25) $r = R_0$ setzen, nämlich:

$$(29) \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{3(R_0^3 P_0 - P_1^3 P_1)}{(3\lambda + 2\mu)(R_1^3 - R_0^3)} + \frac{3R_1^3 (P_0 - P_1)}{4\mu(R_1^3 - R_0^3)}.$$

Wenden wir diese allgemeine Gleichung auf die ähnlichen Fälle an, welche schon unter den Buchstaben a , b , c des

1) Lamé, l. c. p. 212 etc.

vorigen Paragraphen untersucht wurden, und setzen wir wieder der Kürze wegen:

$$(30) \quad \frac{R_0^3}{R_1^3 - R_0^3} = N; \quad \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} = N + 1.$$

Dann:

$$(31) \quad a) P_1 = 0; \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{3 N P_0}{3 \lambda + 2 \mu} + \frac{3 (N + 1) P_0}{4 \mu},$$

oder

$$(32) \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = 3 P_0 \left\{ \frac{N (6 \mu + 3 \lambda) + (3 \lambda + 2 \mu)}{4 \mu (3 \lambda + 2 \mu)} \right\},$$

und nach der Bezeichnung (3)

$$(32') \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = \kappa P_0 \left\{ \frac{N (6 \mu + 3 \lambda) + (3 \lambda + 2 \mu)}{4 \mu} \right\}.$$

$$(33) \quad b) P_0 = 0; \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = - 3 P_1 (N + 1) \left\{ \frac{1}{3 \lambda + 2 \mu} + \frac{1}{4 \mu} \right\},$$

oder

$$(34) \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = - \frac{3 P_1 (N + 1) (6 \mu + 3 \lambda)}{4 \mu (3 \lambda + 2 \mu)},$$

und nach der Bezeichnung (3)

$$(34') \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = - \frac{\kappa P_1 (N + 1) (6 \mu + 3 \lambda)}{4 \mu}.$$

$$(35) \quad c) P_1 = P_0 = P; \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = - \frac{3 P}{3 \lambda + 2 \mu} = - \kappa P.$$

Aus den Formeln (32'), (34), (35) bekommen wir dieselben von Lamé¹⁾, indem wir setzen $\lambda = \mu$, nämlich:

$$(32'') \quad a) P_1 = 0; \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{9 N + 5}{4} \kappa P_0.$$

$$(34'') \quad b) P_0 = 0; \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = - \frac{9 (N + 1)}{4} \kappa P_1.$$

$$(35') \quad c) P_1 = P_0 = P; \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = - \frac{3 P}{5 \mu} = - \kappa P.$$

Auf Grund der in den zwei letzten Paragraphen enthaltenen Werthe lässt sich die Volumenveränderung eines complicirten Piezometers, welches eine Form des Cylinders mit halbsphärischen Endungen hat, berechnen, man muss aber die bekannte Hypothese hinzufügen, dass die Volumenveränderung des gesammten Volumen

$$(36) \quad \Delta W_0 = \Delta U_0 + \Delta V_0.$$

1) Lamé. Regnault, l. c. p. 439.

In diesem Falle erhalten wir die folgende Tabelle der Formeln:

$$(37) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } P_1 = 0; \quad \Delta W_0 = P_0 U_0 \left\{ \frac{M(5\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \right\} \\ \quad + 3 P_0 V_0 \left\{ \frac{N(6\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{4\mu(3\lambda + 2\mu)} \right\}, \end{array} \right.$$

oder

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \Delta W_0 = P_0 \kappa U_0 \left\{ \frac{M(5\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{3\mu} \right\} \\ \quad + P_0 \kappa V_0 \left\{ \frac{N(6\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{4\mu} \right\}. \end{array} \right.$$

$$(38) \left\{ \begin{array}{l} \text{b) } P_0 = 0; \quad \Delta W_0 = - \left\{ P_1 \frac{U_0(M+1)(5\mu + 3\lambda)}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \right. \\ \quad \left. + \frac{3 P_1 V_0(N+1)(6\mu + 3\lambda)}{4\mu(3\lambda + 2\mu)} \right\}, \end{array} \right.$$

oder

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \Delta W_0 = - \left\{ P_1 \kappa \frac{U_0(M+1)(5\mu + 3\lambda)}{3\mu} \right. \\ \quad \left. + P_1 \kappa \frac{V_0(N+1)(6\mu + 3\lambda)}{4\mu} \right\}. \end{array} \right.$$

$$(III) \text{ c) } P_1 = P_0 = P; \quad \Delta W_0 = - \frac{3P}{3\lambda + 2\mu} (U_0 + V_0) = - \kappa P W_0.$$

Aus den Formeln (I), (II), (III) erhält man dieselben von Lamé¹⁾, nach der Voraussetzung $\lambda = \mu$, nämlich:

$$(I') \text{ a) } P_1 = 0; \quad \Delta W_0 = \left\{ \frac{8M+5}{3} U_0 + \frac{9N+5}{4} V_0 \right\} \kappa P_0.$$

$$(II') \text{ b) } P_0 = 0; \quad \Delta W_0 = - \left\{ \frac{8(M+1)}{3} U_0 + \frac{9(N+1)}{4} V_0 \right\} \kappa P_1.$$

$$(III') \text{ c) } P_1 = P_0 = P; \quad \Delta W_0 = - \kappa P W_0.$$

Entsprechend dieser Tabelle können wir uns klar den Compressibilitätsprocess der Flüssigkeiten vorstellen. Nehmen wir z. B. an, dass ein und derselbe Druck innerhalb und ausserhalb des Piezometers ausgeübt wird — was wirklich bei den meisten Experimenten seit Canton gefunden wurde und sich bis jetzt bestätigt hat — d. h. $P_1 = P_0 = P$, so beobachten wir eine Senkung θ'' des Niveau in der Capillare C; dieselbe besteht aber nicht aus blossem Sinken, welches als Wirkung der Flüssigkeitscompressibilität allein betrachtet werden soll, sondern sie enthält auch das Steigen, welches nach der

1) Lamé. Regnault, l. c. p. 442.

Gleichung (III) von der Wandcompressibilität des Piezometers herkommen muss. Folglich, wenn man durch χ_a den Coefficienten der scheinbaren Flüssigkeitcompressibilität und durch κ den Coefficienten der Wandcompressibilität des Piezometers bezeichnet, findet man den Coefficienten χ_v der wirklichen Compressibilität mittels der Beziehung

$$(IV) \quad \chi_v = \chi_a + \kappa.$$

Die Bestimmung des Coefficienten κ erfolgt mittels der Niveauveränderung θ' in der Capillare C unter dem Einflusse eines äusseren Druckes P_1 und mittels der Gleichung (II) oder (II'), also

$$(V) \quad \kappa P_1 = \frac{\theta'}{\frac{(5\mu + 3\lambda)(M+1)U_0}{3\mu} + \frac{(6\mu + 3\lambda)(N+1)V_0}{4\mu}}.$$

Das Vorzeichen — verschwindet, da θ' und ΔW_0 entgegengesetzte Zeichen haben.

10. Wir haben noch den Zusammenhang zwischen den Grössen θ' , θ'' und θ — das Niveausinken bei $P_1 = 0$ — aufzuklären. Offenbar enthält die Niveausherschiebung θ nicht bloss das der wahren Compressibilität der Flüssigkeit entsprechende Herabsinken $\theta'' + \kappa P_0 W_0$ [nach der Gleichung (IV)], sondern auch die elastische räumliche Ausdehnung des Piezometers, welche sich aus der Gleichung (I) ergibt, d. h.:

$$\begin{aligned} \theta = \theta'' + \kappa P_0 U_0 + \kappa P_0 V_0 + \kappa P_0 U_0 \left\{ \frac{M(5\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{3\mu} \right\} \\ + \kappa P_0 V_0 \left\{ \frac{N(6\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{4\mu} \right\}, \end{aligned}$$

oder

$$\theta = \theta'' + \kappa P_0 U_0 \left\{ \frac{(M+1)(5\mu + 3\lambda)}{3\mu} \right\} + \kappa P_0 V_0 \left\{ \frac{(N+1)(6\mu + 3\lambda)}{4\mu} \right\};$$

da aber bei der Bedingung $P_1 = P_0$, nach der Gleichung (V), die letzten zwei Glieder gleich sind der Verschiebung θ' , so hat man

$$(VI) \quad \theta = \theta' + \theta''.$$

Diese Gleichung wurde von Regnault Bedingungsgleichung genannt; mit Hülfe derselben controlirte er die Genauigkeit seiner Experimente.

11. Es ist von Interesse, darauf aufmerksam zu machen, dass man viel besser diesen Werth von θ benutzen kann, wenn man ihm einen selbständigen Sinn gibt und mit seiner Hilfe die absolute Compressibilität berechnet. In diesem Falle wird die einfache Gegeneinanderstellung von θ und $\theta' + \theta''$ durch die Vergleichung von Coefficienten der absoluten Compressibilität ersetzt, was bedeutend anschaulicher ist. Wollen wir bezeichnen durch θ , wie schon erwähnt, das Niveausinken unter dem Einflusse des inneren Druckes P_0 , durch Θ_0 — die elastische räumliche Piezometerausdehnung unter demselben Drucke, durch $W_0 = U^0 + V_0$ — das innere Volumen des genannten Piezometers, dann ergibt sich für den Coefficienten der absoluten Compressibilität χ_v , der Definition nach, der Ausdruck

$$(VII) \quad \chi_v = \frac{\theta - \Theta_0}{P_0 W_0},$$

in welchem alle Glieder der rechten Seite bestimmt werden können, und zwar θ , P_0 , W_0 — durch das Experiment, Θ_0 aber — durch Berechnung aus der Gleichung (I) oder (I'), nämlich:

$$(VIII) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_0 = \kappa P_0 U_0 \left\{ \frac{M(5\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{3\mu} \right\} \\ \quad + \kappa P_0 V_0 \left\{ \frac{N(6\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{4\mu} \right\}, \end{array} \right.$$

oder bei $\lambda = \mu$

$$(VIII') \quad \Theta_0 = \kappa P_0 \left\{ \frac{8M + 5}{3} U_0 + \frac{9N + 5}{4} V_0 \right\}.$$

Um diese Berechnung auszuführen, muss man den Coefficienten κ vorauskennen; wenn aber dies nicht der Fall ist, so gebraucht man die bekannte Regnault'sche Experimentalmethode. In solcher Weise kann statt der Bedingungsgleichung (VI), eine selbständige Methode begründet werden. Eine volle Bestimmung des Coefficienten χ_v mittels derselben erfordert folgende zwei Manipulationen:

Man übt auf das Piezometer und die in ihm befindliche Flüssigkeit einen inneren Druck P_0 aus und misst das Niveausinken θ in der Capillare C .

b) Man übt auf das Piezometer allein einen äusseren Druck P_1 aus und misst das Niveausteigen θ' in derselben Capillare C .

c) Dann erhalten wir mittels dieser Angaben und nach den Gleichungen (VII) und (VIII) den Coefficient χ_v .

Es scheint mir, dass in einigen Fällen die Anwendung der vorgeschlagenen Methode sehr nützlich werden kann, weil nach derselben der Coefficient χ_v sich aus der Summe der Verschiebung $\theta = \theta' + \theta''$ und nicht aus der Differenz $\theta'' = \theta - \theta'$ wie bei Regnault, berechnen lässt. Diese Methode wird überhaupt zweckdienlich bei der Untersuchung von sehr wenig compressibeln Flüssigkeiten, wie Quecksilber, und bei Bestimmung des Zusammenhanges zwischen der Compressibilität und der Temperatur eines flüssigen Körpers. Bei der Bearbeitung meiner Beobachtungen habe ich neben den Methoden von Regnault und Jamin auch diese dritte Methode angewendet und erhielt ein sehr befriedigendes Resultat, wie man aus den beifolgenden Tabellen ersehen kann.

12. Es ist noch eine theoretische Entwickelung der Jamin'schen Experimentalmethode zu geben.¹⁾ Bekanntlich nennt Jamin den Coefficienten der absoluten Compressibilität einer Flüssigkeit die Differenz von $\theta - \gamma$ beim Druck Einheit und Volumen Einheit, d. h.

$$(IX) \quad \chi_v = \frac{\theta - \gamma}{P_0 W_0};$$

γ ist die Niveauveränderung im Correctionsrohre Γ (vgl. § 5, e, f). Dieser Ausdruck, seiner Form nach, wird identisch mit der Gleichung (VII), bei der Bedingung, dass die Angabe γ des Correctionsrohres Γ gleich sei der elastischen räumlichen Dilatation Θ_0 , d. h. die Jamin'sche Methode würde in Einklang sein mit der Electricitätstheorie im Falle, dass

$$\gamma = \Theta_0,$$

da dieses aber nicht zutrifft, ist die Unrichtigkeit der Methode bewiesen. Wir fanden schon den Ausdruck für die elastische Ausdehnung Θ_0 (VIII) und wenden uns jetzt zu dem ähnlichen Ausdrücke für γ , um sie später mit einander zu vergleichen. Die Volumenveränderung γ im Correctionsrohre ist allerdings nichts Anderes, als eine Differenz ΔW_1 zwischen

1) Jamin, *Compt. rend.* **66**. p. 1104. 1868. Siehe auch Deschamps, *Etude de la Compressibilité des liquides*. Thèses de doctorat. Paris, pp. 1—35 in 4°. 1878.

dem anfänglichen äusseren Volumen W_1 des Piezometers bei $P_0 = 0$ und dem endlichen $W_1 + \Delta W_1$ bei gewissem Drucke P_0 . Berechnen wir — bei der Annahme, dass wieder $\Delta W_1 = \Delta U_1 + \Delta V$, — die Volumenvergrösserung ΔW_1 für jeden Theil besonders: besonders für den cylindrischen Theil ΔU_1 des Piezometers und besonders für den sphärischen ΔV_1 . Zu diesem Zwecke kehren wir zurück zu den Gleichungen (8), (9) und setzen in der Gleichung (8) $r = R_1$; dann, übereinstimmend mit der Gleichung (12):

$$(39) \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = \frac{2 \varrho}{R_1} + \frac{\xi}{H},$$

oder nach der Substitution von ϱ und ξ durch die entsprechenden Grössen

$$(40) \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = \frac{3}{3\lambda + 2\mu} \cdot \frac{R_0^3 P_0 - R_1^3 P_1}{R_1^3 - R_0^3} + \frac{1}{\mu} \frac{R_0^3 (P_0 - P_1)}{R_1^3 - R_0^3}.$$

Diese allgemeine Gleichung kann vereinfacht werden, da das Experiment nur bei innerem Drucke P_0 stattfindet; infolgedessen setzen wir $P_1 = 0$ und

$$(41) \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = M P_0 \left\{ \frac{3}{3\lambda + 2\mu} + \frac{1}{\mu} \right\}.$$

oder

$$(42) \quad \Delta U_1 = \frac{M P_0 U_1 (5\mu + 3\lambda)}{\mu (3\lambda + 2\mu)},$$

und nach der Bezeichnung (3)

$$(43) \quad \Delta U_1 = \frac{M P_0 U_1 \kappa (5\mu + 3\lambda)}{3\mu},$$

oder, bei der Annahme $\lambda = \mu$

$$(44) \quad \Delta U_1 = \frac{8 M P_0 U_1 \kappa}{3}.$$

Um die Volumenveränderung ΔV_1 berechnen zu können, wenden wir uns an die Gleichung (25) und ersetzen in derselben r durch R_1 , dann ist der Gleichung (28) nach

$$(44) \quad \frac{\Delta V_1}{V_1} = \frac{3 \varrho}{R_1} = \frac{3 (R_0^3 P_0 - R_1^3 P_1)}{(3\lambda + 2\mu) (R_0^3 - R_1^3)} + \frac{3}{4\mu} \frac{R_0^3 (P_0 - P_1)}{R_1^3 - R_0^3},$$

aber da wieder $P_1 = 0$, so schreiben wir einfacher

$$(45) \quad \frac{\Delta V_1}{V_1} = \left\{ \frac{3}{3\lambda + 2\mu} + \frac{3}{4\mu} \right\} N P_0,$$

oder

$$(46) \quad \Delta V_1 = \frac{3 N P_0 V_1 (6\mu + 3\lambda)}{4\mu(3\lambda + 2\mu)},$$

und nach der Bezeichnung (3)

$$(47) \quad \Delta F_1 = \frac{N P_0 V_1 \kappa (6\mu + 3\lambda)}{4\mu},$$

oder, bei der Annahme $\lambda = \mu$,

$$(47') \quad \Delta F_1 = \frac{9 N P_0 V_1 \kappa}{4}.$$

Nun setzen wir zusammen den vollen Ausdruck der Volumenveränderung

$$(48) \quad \gamma = \Delta W_1 = \Delta U_1 + \Delta F_1$$

auf Grund der Gleichungen (43), (47) und bekommen endlich:

$$(49) \quad \gamma = P_0 \kappa \left\{ \frac{(5\mu + 3\lambda)}{3\mu} M U_1 + \frac{(6\mu + 3\lambda)}{4\mu} N F_1 \right\}.$$

Es bleibt jetzt nichts übrig, als die Ausdrücke von γ (49) und Θ_0 (VIII) mit einander zu vergleichen. Bilden wir ihre Differenz:

$$(50) \quad \left\{ \gamma - \Theta_0 = P_0 \kappa \left[\frac{(U_1 - U_0) M (5\mu + 3\lambda)}{3\mu} + \frac{(V_1 - V_0) N (6\mu + 3\lambda)}{4\mu} \right] \right. \\ \left. (-3\lambda + 2\mu) \left\{ \frac{U_0}{3\mu} + \frac{V_0}{4\mu} \right\} \right]$$

und bemerken, dass

$$(51) \quad (U_1 - U_0) M = U_0 (a) \text{ und } (V_1 - V_0) N = V_0 (b),$$

so bekommen wir:

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma - \Theta_0 &= P_0 \kappa \left\{ \frac{U_0}{3\mu} (5\mu + 3\lambda - 3\lambda - 2\mu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{V_0}{4\mu} (6\mu + 3\lambda - 3\lambda - 2\mu) \right\}. \end{aligned} \right.$$

und schliesslich:

$$(53) \quad \gamma - \Theta_0 = P_0 \kappa (U_0 + V_0) = P_0 \kappa W_0.$$

Beziehen wir diese Differenz auf die Einheit des Druckes und des Volumens, so erhalten wir

$$(54) \quad \frac{\gamma - \Theta_0}{P_0 W_0} = \kappa$$

Dieses theoretische Resultat zeigt uns, dass die Jamin'sche Annahme über die Rolle des Correctionsrohres nicht richtig war, dass das Correctionsrohr nicht die elastische Ausdehnung des Piezometers bestimmen kann. Indem wir zur

Gleichung (VII) zurückkehren, so müssen wir dem erhaltenen Resultate entsprechend den folgenden Ausdruck des Coefficienten χ_v geben:

$$(VII') \quad \chi_v = \frac{\theta - \Theta_0}{P_0 W_0} = \frac{\theta - \gamma}{P_0 W_0} + \kappa,$$

welcher uns überzeugt, dass zu dem nach der Jamin'schen Methode erhaltenen Compressibilitätscoefficienten noch der Coefficient κ der Wandcompressibilität des Piezometers hinzugefügt werden muss. Zum ersten Male wurde diese Correction von Hrn. Guillaume¹⁾ vorgeschlagen, aber in einer etwas abweichenden Form.

13. Die Gleichung (VII') führt uns zu dem Schlusse, dass

$$(55) \quad \frac{\theta - \gamma}{P_0 W_0} = \frac{\theta''}{P_0 W_0} = \frac{\theta - \theta'}{P_0 W_0} = \chi_a$$

und das

$$(X) \quad \gamma = \theta'$$

Auf solche Weise findet die Jamin'sche Methode ihre vollständige Erklärung; sie ist äquivalent der ersten Phase der Regnault'schen Methode, wenn man gleichzeitig auf das Piezometer den inneren und äusseren Druck ausübt und deshalb gibt sie nur scheinbare χ_a und nicht absolute χ_v Compressibilität der Flüssigkeiten. Man sieht auch zugleich, dass die cubische Wandcompressibilität des Piezometers κ nicht bloss nach Regnault's Verfahren, bei einem äusseren Drucke, bestimmt werden kann, sondern auch aus den Angaben γ des Correctionsrohres, bei innerem Drucke. Die Identität (X) kann direct bewiesen werden. Nach der Gleichung (38) ergibt sich

$$(56) \quad \theta' = \frac{P_1 U_0 (M+1) (5\mu + 3\lambda)}{\mu (3\lambda + 2\mu)} + \frac{3 P_1 V_0 (N+1) (6\mu + 3\lambda)}{4 \mu (3\lambda + 2\mu)},$$

und entsprechend der Gleichung (49)

$$(57) \quad \gamma = \frac{P_0 U_1 M (5\mu + 3\lambda)}{\mu (3\lambda + 2\mu)} + \frac{3 P_0 V_1 N (6\mu + 3\lambda)}{4 \mu (3\lambda + 2\mu)}.$$

Nehmen wir an, dass $P_1 = P_0 = P$ sei und bilden das Verhältniss

$$(58) \quad \frac{\theta'}{\gamma} = \frac{4 P U_0 (M+1) (5\mu + 3\lambda) + 3 P V_0 (N+1) (6\mu + 3\lambda)}{4 P U_1 M (5\mu + 3\lambda) + 3 P V_1 N (6\mu + 3\lambda)},$$

1) Ch. E. Guillaume, *Compt. rend.* **103.** p. 1183. 1886 und *Archives des sciences physiques et naturelles* (3) **17.** pp. 155, 177. 1887.

so sehen wir, dass dies gleich Eins ist, da

$$U_0(M+1) = U_1 M \text{ und } V_0(N+1) = V_1 N,$$

d. h.

$$(X) \quad \gamma = \theta'.$$

14. Es bleibt jetzt nichts übrig, als alle diese theoretischen Betrachtungen durch das directe Experiment zu rechtfertigen. Da aber an meisten die erwähnten Formeln einige Schwierigkeiten bieten bei der Behandlung der beiden Elasticitätsconstanten λ und μ , so suchte ich zugleich nach dem Verhältnisse des Coefficienten λ zu dem Coefficienten μ nur für das Glas allein, woraus meine Piezometer bestanden. Ich fand aus meinen eigenen Untersuchungen, sowie aus denen meiner Vorgänger, dass in der That die Poisson'sche Constante σ des Glases (im Mittel $\sigma = 0,247$) sich dem theoretischen Werthe ($\sigma = 0,250$) annähert, und dass die vereinfachten Lamé'schen Formeln als erste Annäherung vollständig dienen können.

Tabelle V.

Poisson'sche Constante σ für das Glas.

Name	Art des Glases	σ	Name	Art des Glases	σ
Wertheim ¹⁾	Bleiglas Choisy-le-Rois	0,321	Amagat ⁸⁾	Gewöhnl. franz. .	0,245
Maxwell ²⁾	Unbekanntes . . .	0,332	Amagat ⁹⁾	Bleiglas Guilbert	
Everett ³⁾	Flintglas Nr. I James Couper & Sons, Glasgow .	0,258	Cantone ¹⁰⁾	Martin	0,250
			Kowalsky ¹¹⁾	Unbekanntes . . .	0,257
Everett ⁴⁾	Flintglas Nr. II A. & R. Cochran Glasgow	0,229	Kowalsky ¹²⁾	Greiner & Friedrichs	0,226
				Greiner & Friedrichs	0,212
Cornu ⁵⁾	Saint-Gobain . . .	0,237	Mercadier ¹³⁾	Saint-Gobain u. a.	0,250
Voigt ⁶⁾	Guinand in Paris	0,213	De Metz . .	Greiner & Cie. .	0,237
Voigt ⁷⁾	Rheinisches . . .	0,208	De Metz . .	Gundelach	0,235
			De Metz . .	Franz. Bleiglas .	0,236

- 1) Wüllner, Lehrb. d. Experimentalphysik. 1. p. 227. Leipzig, 1882
- 2) Everett, Phil. Trans. 156. p. 191. 1866.
- 3) Everett, Phil. Trans. 158. p. 369. 1868.
- 4) Everett, Phil. Trans. 158. p. 369. 1868.
- 5) Cornu, Compt. rend. 69. p. 333. 1869.
- 6) Voigt, Wied. Ann. 15. p. 510. 1882.
- 7) Voigt, Wied. Ann. 15. p. 513. 1882.
- 8) Amagat, Journ. de phys. (2) 8. p. 365. 1889.
- 9) Amagat, Journ. de phys. (2) 8. p. 365. 1889.
- 10) Cantone. Amagat, l. c. p. 366.
- 11) Kowalsky, Wied. Ann. 36. p. 313. 1889.
- 12) Kowalsky, Wied. Ann. 39. p. 155. 1890.
- 13) Mercadier, Compt. rend. 105. p. 105. 1887.

Auf Grund dieser Zahlen und obenerwähnter Formeln sind die von mir nach verschiedenen Methoden ausgeführten Beobachtungen in vollständigem Einklange untereinander; um aber Beweise der Richtigkeit meiner Resultate liefern zu können, wurden noch ganz selbständige Untersuchungen aller elastischen Eigenschaften desselben Glases, welches zur Construction der Piezometer diente, unternommen. Sie werden weiter ausführlich dargestellt.

15. Alle meine Beobachtungen wurden bei stationärem Drucke ausgeführt, sodass der Quecksilberfaden in der Capillare C immer auf die alte Stelle zurückkam, was ein Zeichen war, dass das Piezometer keine merkliche Erwärmung und keine permanente Deformation während des Experimentes erlitten hat. Bei den Manipulationen nach Regnault'schen oder nach Jamin'schen Methoden war der Plan ein für allemal der folgende:

a) Ich bestimmte auf der Scala des Luftmanometers mittels des Quecksilbermanometers den einem halben Atmosphärendruck entsprechenden Theilstrich und berechnete darnach, wie schon früher ausführlich beschrieben war¹⁾, den Druck, welcher in dieser Untersuchungsreihe von 9,112—9,240 Atmosphären schwankte, je nach der Zimmertemperatur und dem Barometerstand;

b) dann machte ich gleichzeitige Ablesungen: die eine auf der Capillare C des Piezometers, die andere an einem Alvergnyat'schen Thermometer, welches bis auf $0,02^{\circ}$ C. eingetheilt war; die dritte am Correctionsrohr I' , falls ich nach Jamin'scher Methode operirte;

c) ich steigerte langsam, mittels der Pumpe, den Druck bis zum berechneten Theilstrich des Luftmanometers, liess ihn die nöthigè Zeit (von 3—5 Minuten) constant zu werden, und las wieder die drei erwähnten Angaben (b);

d) ich verminderte schliesslich den Druck, liess ihn wieder constant werden und las dieselben Angaben (b);

e) nach den Angaben von θ , θ' , θ'' , γ berechnete ich den Compressibilitätscoefficienten: der scheinbaren χ_a , der kubischen des Wandpiezometers κ und der wirklichen χ_v . Jeder von den

1) G. de Metz, Wied. Ann. 41. p. 664. 1890.

genannten Coefficienten wurde als Mittel mehrerer Beobachtungsreihen nach obigem Plan bestimmt, und jede Reihe bestand aus vollen zehn Ablesungen; da die Uebereinstimmung der Grössen von θ , θ' , θ'' , γ — bei der Druckvergrößerung bis 9,3 Atmosphären und bei der Druckverminderung bei dem Barometerstand — vollständig war, so nahm ich einfach das arithmetische Mittel derselben.¹⁾

Ich möchte meine Beobachtungen mittels folgender zwei Tabellen illustriren.

Tabelle VI.

Beobachtungen nach der Jamin'schen Methode.

Piezometer Nr. I; 16. IV. 1890; $P=9,2308$; $W=57756$ cmm; $t=18,80^\circ$ C.

Druck- vergrößerung θ_1	Druck- verminderung θ_2	Druck- vergrößerung γ_1	Druck- verminderung γ_2
50,95	50,85	12,40	12,40
50,90	50,90	12,30	12,30
50,80	50,70	12,30	12,40
50,80	50,70	12,45	12,50
50,90	50,50	12,45	12,45
Mittel 50,87	50,72	12,38	12,41

Tabelle VII.

Beobachtungen nach der Regnault'schen Methode.

Piezometer Nr. I; 8. IV. 1890; $P=9,2400$; $W=57756$ cmm; $t=17,34^\circ$ C.

Druck- vergrößerung θ_1'	Druck- verminderung θ_2'	Druck- vergrößerung θ_1''	Druck- verminderung θ_2''
47,45	47,70	3,20	2,90
47,60	47,60	3,05	3,00
47,40	47,50	3,05	3,00
47,50	47,50	3,10	2,90
47,40	47,40	3,00	3,00
Mittel 47,47	47,54	3,08	2,96

Man sieht also, dass die Angaben von θ_1 , θ_2 ; θ_1' , θ_2' ; θ_1'' , θ_2'' ; γ_1 , γ_2 miteinander gut übereinstimmen und dass die bemerkbaren kleinen Unterschiede ganz durch die Beobachtungs-

1) In meiner früheren Abhandlung unterschied ich diese Fälle; vgl. p. 668—672.

fehler erklärt werden können, ohne dass man mit der Erwärmung oder mit der Abkühlung des Quecksilbers, sowie mit der permanenten Deformation des Piezometers zu thun hätte. In ähnlicher Art und Weise waren alle Beobachtungen zusammengesetzt. Die Werthe von θ , θ' , θ'' sind gegeben in den Eintheilungen β der Capillare C (§ 5, d, e) und die von γ in den des Correctionsrohres β_1 . Ich möchte noch darauf aufmerksam machen, inwiefern meine Beobachtungen, im Vergleich zu denen anderer Autoren, empfindlich waren, d. h. welchen Werth das Verhältniss β zu W_0 erreicht hat. Zu diesem Zwecke theile ich meine Zahlen, sowie diejenigen einiger anderer Beobachter mit.

Tabelle VIII.

Verhältniss β zu W_0 .

Regnault ¹⁾ . . .	$9,89 \times 10^{-6}$
Grassi ²⁾ . . .	$11,22 \times 10^{-6}$
Dupré und Page ³⁾	$4,62 \times 10^{-6}$
Drecker ⁴⁾ . . .	$6,40 \times 10^{-6}$
Drecker ⁵⁾ . . .	$6,10 \times 10^{-6}$
De Metz I. . .	$4,57 \times 10^{-6}$
De Metz II. . .	$6,01 \times 10^{-6}$
De Metz III. . .	$5,97 \times 10^{-6}$
De Metz IV. . .	$7,97 \times 10^{-6}$

Dieselben zeigen, dass meine Piezometer der Empfindlichkeit nach zu der Kategorie der besten gerechnet werden müssen, insbesondere wenn man darauf achtet, dass der Abstand zwischen je zwei Theilstrichen der Capillare C 1,5 mm betrug, und dass die Schätzung bis auf ein Zehntel mit aller Sicherheit erfolgte. Jetzt führe ich drei Tabellen an, welche meine Beobachtungen umfassen.

1) Regnault, l. c. p. 425.

2) Grassi, l. c. p. 445 (Piezometer A).

3) Dupré u. Page, Pogg. Ann. Erg.-Bd. 5. p. 237. 1871.

4) Drecker, Wied. Ann. 20. p. 879. 1883.

5) Drecker, Wied. Ann. 34. p. 954. 1888.

Tabelle IX.
Gesamte Resultate aller Messungen bei Zimmertemperatur mit Piezometer Nr. I, II, III, IV ausgeführt.

	Piezometer																
	1	2	3	4	5	6	7	8 *	9	10	11	12	13	14	15	16	
	$T^{\circ}C.$	P Atm.	θ' cm	θ'' cm	θ cm	$\theta' + \theta''$ cm	γ cm	$\gamma'_{(1,2V)}$ cm	$\gamma + \gamma'_{(1,2V)}$ cm	Regnault			Jamin		deMetz	θ'	
										$\chi_a 10^7$	$\kappa 10^7$	$\chi_v 10^7$	$\chi_a 10^7$	$\chi_v 10^7$	$\chi_v 10^7$		
I	16,759,2308	12,515	0,8240	—	—	13,3390	—	—	—	15,457	22,847	38,304	—	—	—	39,972	0,991
	18,449,1619	12,270	0,7797	—	—	13,0497	—	—	—	14,735	22,568	37,303	—	—	—	—	
	17,659,2400	12,535	0,7969	—	—	13,3319	—	—	—	14,382	22,860	37,792	—	—	—	—	
	18,409,2094	—	—	—	13,3150	—	12,292	0,1883	12,480	—	—	—	15,692	38,452	38,658	—	
	18,809,2308	—	—	—	13,4043	—	12,442	0,1887	12,631	—	—	—	14,499	37,259	39,748	—	
II	18,659,2267	—	—	—	13,4088	—	12,437	0,1886	12,626	—	—	—	14,684	37,444	39,950	1,000	
	20,459,1869	6,3617	0,62008	—	—	6,9818	—	—	—	15,366	23,615	38,981	—	—	—		—
	20,409,1910	6,3512	0,61480	—	—	6,9660	—	—	—	15,229	23,565	38,794	—	—	—		—
	20,309,1974	—	—	—	7,0836	—	6,2788	0,0739	6,3527	—	—	—	16,161	39,751	39,617		—
	20,309,1974	—	—	—	7,0346	—	6,2938	0,0739	6,3677	—	—	—	16,508	40,098	40,213		—
III	20,009,1814	6,2140	0,5277	—	—	6,7417	—	—	—	12,991	24,480	37,471	—	—	—	1,028	
	19,609,1707	6,2061	0,5277	—	—	6,7338	—	—	—	13,008	24,477	37,485	—	—	—		—
	18,059,1869	—	—	—	6,7087	—	5,9675	0,0870	6,0345	—	—	—	16,093	40,572	36,726		—
	18,159,1744	—	—	—	6,7022	—	5,9425	0,0869	6,0294	—	—	—	16,573	41,052	36,791		—
	20,159,1666	3,7864	0,44725	—	—	4,2336	—	—	—	14,736	24,601	39,337	—	—	—		—
IV	19,109,1666	3,7864	0,40635	—	—	4,1927	—	—	—	13,389	24,601	37,990	—	—	—	1,019	
	19,759,2019	3,7587	0,43406	—	—	4,1927	—	—	—	14,245	24,367	38,612	—	—	—		—
	19,709,2019	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		—
	19,709,2019	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		—
	19,709,2019	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		—

* In dieser Columnne ist die elastische Ausdehnung des halbsphärischen Piezometertheiles berechnet, um auch eine Correction der in die Messinghülse eingekitteten Halbkugel geben zu können, da wir, wenn aus der nach Jamin beobachteten Piezometerausdehnung γ die ganze $\gamma + \gamma'_{(1,2V)}$ erhalten werden soll, zu γ den berechneten Werth $\gamma'_{(1,2V)}$ addiren müssen.

Tabelle X.

Die Endresultate berechnet nach den Mitteln der vorigen Tabelle.

Piezometer																	
1	2	3	4	5	6	7	8*	9	10			11	12	13	14	15	16
$T^{\circ}C$	P Atm.	θ'	θ''	θ	$\theta' + \theta''$	γ	$\gamma_{(1/2, r_0)}$	$\gamma + \gamma_{(1/2, r_0)}$	Regnault			Jamin		deMetz	θ'		
		emm	emm	emm	emm	emm	emm	emm	$\gamma_a 10^7 \times 10^7$	$\gamma_a 10^7$	$\gamma_v 10^7$	$\gamma_v 10^7$	$\gamma + \gamma_{(1/2, r_0)}$				
I	17,62	9,2109	12,4100	0,8002	13,3760	13,2400	12,3900	0,1885	12,579	15,042	22,759	37,801	14,958	37,718	39,582	0,991	
II	20,42	9,1889	6,3564	0,6174	7,0201	6,9739	6,2863	0,0739	6,360	15,298	23,590	38,888	16,335	39,924	39,909	1,000	
III	19,80	9,1760	6,2100	0,5277	6,7054	6,7377	5,9550	0,0869	6,042	12,996	24,479	37,475	16,333	40,812	36,777	1,028	
IV	19,66	9,1784	3,7772	0,4292	4,2444	4,2064	3,6714	0,0417	3,713	14,123	24,523	38,646	17,240	41,763	39,782	1,019	
M.	19,38									14,36	23,84	38,20	16,22	40,05	39,01	1,0095	

Tabelle XI.

Die Gesamtergebnisse aller Messungen bei 0° mit den Piezometern I und II.

Piezometer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
P Atm.	θ' emm	θ'' emm	θ emm	$\theta' + \theta''$ emm	γ emm	$\gamma_{(1/2, r_0)}$ emm	$\gamma + \gamma_{(1/2, r_0)}$ emm	Regnault $\gamma_a 10^7$ $\gamma_v 10^7$	Jamin $\gamma_a 10^7$ $\gamma_v 10^7$	de Metz $\gamma_v 10^7$				
I	9,2211	12,476	0,8021	—	13,2781	—	—	—	15,046	22,797	37,843	—	—	—
	9,2308	—	—	13,3423	—	12,3367	0,1887	12,525	—	—	—	15,324	38,123	—
III	9,2308	—	—	13,3396	—	12,3617	0,1887	12,550	—	—	—	14,799	37,598	39,09
	9,1910	6,2119	0,4502	6,6916	6,6621	—	—	—	11,192	24,446	35,638	—	—	36,34
								Mittel	13,12	23,62	36,75	15,06	37,86	37,71

Wir bekommen also aus der Tabelle XI bei 0° nach der Methode von

$$\begin{array}{ll} \text{Regnault} & \chi_v = 36,75 \times 10^{-7}, \\ \text{Jamin (corr.)} & \chi_v = 37,86 \times 10^{-7}, \\ \text{De Metz} & \chi_v = 37,71 \times 10^{-7}, \end{array}$$

und als Mittel nach allen Methoden

$$\chi_v = 37,37 \times 10^{-7} \text{ bei } 0^\circ.$$

Aus der Tabelle (X) erhält man bei 19,38° C. nach der Methode von

$$\begin{array}{ll} \text{Regnault} & \chi_v = 38,20, \\ \text{Jamin (corr.)} & \chi_v = 40,05, \\ \text{De Metz} & \chi_v = 39,01, \end{array}$$

was als Mittel gibt

$$\chi_v = 39,08 \text{ bei } 19,38^\circ \text{ C.}$$

Folglich wächst die Quecksilbercompressibilität mit der Temperatur und der Coefficient dieser Zunahme $\Delta\chi_v$ auf 1° C. berechnet ist

$$\Delta\chi_v = 87,7 \times 10^{-10},$$

sodass zwischen den Temperaturgrenzen meiner Beobachtungen die absolute Compressibilität des Quecksilber durch die Gleichung (XI)

$$\chi_v = 37,4 \times 10^{-7} + 87,7 \times 10^{-10} t$$

dargestellt wird, in welcher t die Temperatur von 0°—19,4° C. bedeutet. Das letzte Resultat habe ich verglichen mit einer thermodynamischen Formel von A. Dupré¹⁾, welche schon früher von Hrn. Amagat²⁾ geprüft wurde und mit seinen Beobachtungen gut übereinstimmte. Diese Formel lautet

$$A = 10\,333 (274 + t) \chi_v^\alpha,$$

wenn α den Coefficienten der thermischen Ausdehnung der Flüssigkeit, χ_v den der absoluten Compressibilität, $274 + t = T$ die absolute Temperatur bedeutet. Was die Grösse A (l'attraction au contact) anbetrifft, so stellt sie Dupré gleich dem Producte αA^2 , in welchem A das specifische Gewicht und α eine besondere von der chemischen Natur des Körpers abhängende

1) A. Dupré, *Théorie mécanique de la chaleur*. p. 147 ff. Paris, 1869.

2) Amagat, *Ann. de chim. et de phys.* (5) 11. p. 536. 1877.

Constante ist. Betrachten wir einen und denselben Körper bei verschiedenen Temperaturen und Druckverhältnissen, so bleibt α unveränderlich, und die Werthe von α , T , χ_v , Δ gehen in die α' , T' , χ'_v , Δ' über; vermittels dieser Grössen bildet man die folgende Gleichung

$$\chi'_v = \frac{T'}{T} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \cdot \frac{\Delta^2}{\Delta'^2} \cdot \chi_v,$$

welche den Coefficienten χ'_v bei der Temperatur t' zu berechnen erlaubt, wenn der Coefficient χ_v bei einer anderen Temperatur t bekannt ist. Setzt man $\chi_v = 37,4 \times 10^{-7}$ bei 0° , so erhält man bei $19,4^\circ$ $\chi'_v = 40,2 \times 10^{-7}$, eine Zahl, die nahe der aus dem Experimente gefundenen $39,1 \times 10^{-7}$ ist.

16. Ich möchte noch die Data meiner Vorgänger hier anfügen, um sie mit meiner Zahl zu vergleichen; einige von diesen Zahlen müssen vorläufig corrigirt werden nach den Erfordernissen der Elasticitätstheorie, sie sind mit Asterisken bezeichnet; die Reduction zu 0° C. wurde mittels meines Coefficienten $\Delta\chi_v$ gethan, sie ist mit zwei Asterisken bezeichnet.

Tabelle XII.

Absolute Compressibilitätscoefficienten des Quecksilbers nach verschiedenen Autoren.

Colladon et Sturm* ¹⁾ .	$35,2 \times 10^{-7}$	Tait ⁵⁾	$36,0 \times 10^{-7}$
Aimé** ²⁾	$39,0 \times 10^{-7}$	Amagat** ⁶⁾	$39,0 \times 10^{-7}$
Regnault ³⁾	$35,2 \times 10^{-7}$	De Metz.	$37,4 \times 10^{-7}$
Amaury et Descamps*** ⁴⁾	$38,6 \times 10^{-7}$	Mittel $37,9 \times 10^{-7}$	

Wir überzeugen uns also, dass die alten Beobachtungen sich den neuesten nähern, falls sie der Elasticitätstheorie gemäss geordnet werden.

1) Colladon et Sturm, Ann. de chim. et de phys. **36**. p. 137—139. 1827.

2) Aimé, Ann. de chim. et de phys. (3) **8**. p. 268—270. 1843.

3) Regnault, l. c. p. 461.

4) Amaury et Descamps, Compt. rend. **68**. p. 1564. 1869; auch Descamps, Etudes de la compressibilité des liquides. Thèses de doctorat. 4^e. p. 24—26. Paris, 1872.

5) Tait, Beibl. **13**. p. 442. 1889.

6) Amagat, Journ. de phys. (2) **8**. p. 203. 1889.

17. Wenden wir uns nun zur Vergleichung der nach der Methode von Regnault und von Jamin erhaltenen Zahlen:

Piezometer	nach Jamin	nach Regnault
I	$\chi_a = 14,96 \times 10^{-7}$	$\chi_v = 37,80 \times 10^{-7}$
II	$16,33 \times 10^{-7}$	$38,89 \times 10^{-7}$
III	$16,33 \times 10^{-7}$	$37,47 \times 10^{-7}$
IV	$17,24 \times 10^{-7}$	$38,65 \times 10^{-7}$
	Mittel $16,22 \times 10^{-7}$	$38,20 \times 10^{-7}$,

so müssen wir eine derselben fallen lassen, da zwei abweichende Antworten auf eine Frage einander ausschliessen. Welche aber? Gewiss die Jamin'sche, weil die Data nach seiner Methode nicht bloss denen widersprechen, welche nach der theoretisch entwickelten Regnault'schen Methode erhalten werden, sondern auch den Daten von Hrn. Tait¹⁾ und Amagat²⁾, in welchen die kubische Wandcompressibilität des Piezometers ohne irgend eine theoretische Betrachtung bestimmt wurde. Um aus dem obenerwähnten Jamin'schen Coefficienten χ_a den Coefficienten χ_v abzuleiten, ist es erforderlich, zu χ_a den Coefficienten κ zu addiren; dann:

$$\text{nach Jamin (corr.) } \chi_v = 40,0 \times 10^{-7},$$

$$\text{nach Regnault } \chi_v = 38,2 \times 10^{-7}.$$

Ogleich diese Zahlen nicht absolut zusammenfallen, sind sie doch einander so nahe, wie man es nicht genauer verlangen kann: 1. wenn man nach verschiedenen Methoden operirt; 2. wenn man eine so geringe Wirkung, wie die Compressibilität des Quecksilbers, misst; 3. wenn man beachtet, dass die Form des Piezometers (Tabelle II, III, IV) nicht streng geometrisch war, wie es die Theorie verlangt.

Piezometer	nach Regnault	nach Jamin
I	$\chi_a = 15,0 \times 10^{-7}$	$\chi_v = 15,0 \times 10^{-7}$
II	$15,3 \times 10^{-7}$	$16,3 \times 10^{-7}$
III	$13,0 \times 10^{-7}$	$16,3 \times 10^{-7}$
IV	$14,1 \times 10^{-7}$	$17,2 \times 10^{-7}$
	Mittel $14,4 \times 10^{-7}$	$16,2 \times 10^{-7}$

1) Tait, Beibl. 14. p. 707. 1890.

2) Amagat, Journ. de phys. (2) 8. p. 359. 1889.

Wollen wir weiter gehen, so machen wir auf die Columne 10 und 13 der Tabelle X aufmerksam, welche die Werthe von Coefficienten χ_a nach Regnault und nach Jamin enthalten; sie stimmen untereinander mit der Genauigkeit der soeben gegebenen Zahlen von χ_v überein. Dass wir betreffs der Regnault'schen und Jamin'schen Methoden wirklich auf einem richtigen Standpunkte stehen, lässt sich noch mittels der Columnen 15 und 16 derselben Tabelle X beweisen; in der Columne 15 sind nach der in § 11 beschriebenen Methode die Coefficienten χ_v berechnet, welche der absoluten Bedeutung nach zwischen den nach Regnault und nach Jamin (corr.) gefundenen Coefficienten χ_v stehen. Endlich enthält die 16. Columne das Verhältniss $\theta' / \gamma + \gamma_{(1/2, v_0)}$, welches, der Gleichung (X) entsprechend, der Einheit gleich werden soll. Dieses theoretische Resultat ist ganz gerechtfertigt, da im Mittel die Differenzen zwischen berechneten und beobachteten Werthen kaum 1 Proc. erreichen.

Piezometer	θ' $\gamma + \gamma_{(1/2, v_0)}$
I	0,991
II	1,000
III	1,028
IV	1,019

Mittel 1,0095

18. In allen vorigen Berechnungen richtete ich mich nach den vereinfachten Formeln ein, bei der Annahme $\lambda = \mu$; obgleich ich dieselben durch eine Zahlenreihe (Tabelle V) für die gläsernen Piezometer zu rechtfertigen suchte, hielt ich es doch für unentbehrlich, den Coefficienten der kubischen Wandcompressibilität κ ganz unabhängig von dem Regnault'schen Verfahren zu bestimmen. Deswegen blieb ich bei der Methode stehen, welche als die beste in diesem Falle betrachtet werden muss, nämlich bei der Methode der Biegung und der Torsion der Piezometerröhre. Sie ist so bekannt, dass ich mit Stillschweigen ihre Theorie übergehe und nur in einigen Worten die Details meiner Experimente beschreiben will.

Mein Apparat bestand aus der massiven gusseisernen Bank, 105 cm lang, welche auf vier Schrauben *FF* (Fig. 16) lag; ihr Obertheil hatte der ganzen Länge nach einen Schnitt, in

welchem man die gusseisernen Vorrichtungen b , c (Fig. 14) bewegen oder mittels der Schrauben festklemmen konnte. Die Vorrichtung b ist ausführlich auf der Fig. 15 dargestellt; sie bestand aus einem dicken gusseisernen rechtwinkelligen Stück, welches mit der Schraube d an die Bank angeklemt werden konnte und trug ein Plättchen e mit der Schraube h . Dieses Plättchen war beweglich in drei rechtwinkelligen Richtungen x, y, z (Fig. 17) und endete in einem prismatischen Messer, worauf das untersuchte Rohr lag. Der Theil c wurde besonders solid gemacht; er hatte eine Durchbohrung, in die eine Messinghülse f eingepasst war; dieselbe diente zum Einkitten des untersuchten Rohres und war mit dem Theile c fest zusammengeklemt. Der ganze Apparat war sehr kräftig gebaut, und während der Experimente bemerkte man weder Erschütterungen noch Verschiebungen.

19. Vermittels der Versuche über die Biegung und die Torsion der Piezometerröhre bestimmte ich bei Zimmertemperatur von $15-17^{\circ}$ C. folgende Elasticitätsconstanten: den Young'schen Modul E und die Lamé'sche Constante μ , deren Beziehung zu den Constanten λ , σ , κ durch die Gleichungen (1), (2), (3) gegeben ist.

Um den Modul E finden zu können, wurde das Rohr horizontal auf zwei gleichen Unterlagen b , b freigelegt (in der Fig. 14 ist nur eine derselben gezeichnet; in diesem Falle functionirte der Theil c durchaus nicht) und mit zwei Messingringen m , m , sowie mit einer Schale q für die Gewichtsstücke versehen. Die Ringe m , m trugen zwei Spiegel r , r' mit drei Schrauben zum Reguliren; diese Spiegel standen senkrecht zur Rohrxaxe und drehten sich in einer horizontalen Ebene.

Aus der Durchbohrung des Theiles c nahm man die Messinghülse f weg (Fig. 14), um eine in je 2 mm mit der Perreaux'schen Maschine eingetheilte Scala in der Ebene yz (Fig. 17) zu befestigen. In derselben Ebene wurden die beiden Spiegel einander gegenüber eingestellt, sodass ein Lichtstrahl, welcher von der Scala s (Fig. 16) zum Spiegel r' ging, sich in r' reflectirte; dann zum Spiegel r zurückging und nach der zweiten Reflexion endlich in das Fernrohr L traf. In diesem Verfahren der Winkelablesung bin ich Hr'n. König¹⁾ gefolgt und es hat sich sehr

1) König, Wied. Ann. 28. p. 108. 1886.

bequem erwiesen. Es war nur der Abstand zwischen der Scala s und dem Spiegel r' bei meinen Experimenten viel kürzer, da die grossen Abstände die Schätzungen einer Eintheilung der Scala wenig empfindlich machen. In diesen Untersuchungen waren die Abstände im Mittel folgende: der Scala s von dem ersten Spiegel r ca. 6—7 cm, von dem zweiten r' ca. 90 cm; der beiden Messer voneinander ca. 85 cm. Wenn man durch d die beobachtete Verschiebung der Scala bezeichnet, so wird die Tangente des Biegungswinkels φ mittels der folgenden Gleichung bestimmt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d}{2(2sr' + rr')} = \frac{d}{D},$$

die Grösse D änderte sich von 565 cm bis 583 cm. Mit Hülfe des Winkels φ berechnete man die Biegung f nach der Beziehung $|f| = l/3 \operatorname{tg} \varphi$, in welcher l den Abstand der beiden Messer bezeichnet, und endlich den Modul E nach der Formel

$$E = \frac{1}{f} \frac{l^3 \cdot P}{12 \pi (R_1^4 - R_0^4)}.$$

Hier sind f und l schon bekannt; R_1 und R_0 sind der innere und äussere Radius des untersuchten Rohres, P das Gewicht (von 0,5 kg bis 2 kg) sammt der Schale. Die Biegung f erreichte per 1 kg Belastung nur ca. 0,5 mm, und man bemerkte weder elastische Nachwirkung noch Abweichungen von der Proportionalität zwischen d und P ; die Schätzung bis auf ein Zehntel der Scalentheilung ging nicht ohne Schwierigkeiten vor sich und verlangte Vorsicht und Aenderung der Einstellung. Jedes Resultat in folgender Tabelle ist das Mittel mehrerer Beobachtungsreihen, nicht weniger als fünf, und jede Reihe bestand aus zehn gleichzeitigen Messungen für jedes Gewicht, bei seinem Auflegen und seinem Aufheben.

Tabelle XIII.

Dimensionen von R_1 und R_0 der Piezometerröhre und des Young'schen Modul.

Nr.	R_1	%	R_0	%	e	f pr. 1 kg	E
	mm		mm		mm	mm	kg/qmm
I	10,407	2	8,955	2	1,452	0,467	7277
II	9,505	2	7,412	3	2,093	0,495	7300
III	10,000	5	7,660	7	2,340	0,408	6892
IV	9,097	1	6,387	1,5	2,710	0,510	7032
V	9,875	3	6,838	3	3,037	0,348	5663

In derselben Tabelle sind die Dimensionen der Radien R_1 und R_0 der Ringe aus beiden Enden jedes Rohres gegeben und nach obenerwähntem Verfahren (§ 6) bestimmt; neben den Columnen R_1 und R_0 sind die Schwankungen derselben in Procenten angegeben, wenn man von einem Ende bis zum anderen übergeht. Diese Daten bieten ein grosses Interesse dar, denn sie zeigen, inwiefern die wirkliche Form der Röhre von der geometrischen abwich. Die Röhren Nr. I, II, III, IV wurden aus deutschem Glase (Tabelle I) gemacht, das Rohr Nr. V aber aus französischem Bleiglase; die Röhren Nr. I, II, III, IV sind die Reste von denen, aus welchen meine Piezometer Nr. I, II, III, IV vorbereitet wurden.

20. Um den Torsionsmodul μ zu bestimmen, kittete man an das freie Ende des Rohres einen weiten Messingring n (Fig. 14) von 1,5 cm, welcher einen Hebel $t = 24,1$ cm mit einer Schale q' für das Gewicht trug; an das andere Ende setzte man mittels Siegelack die Messinghülse V an, welche mit der Schraube am Theile c befestigt wurde. Neben dem Ringe n brachte man eines der Stücke $b b$ an, an dessen Plättchen e, e (Fig. 15) jetzt zwei Rollen a, a angeschraubt wurden. In solcher Weise ruhte das freie Ende auf diesen Rollen und drehte sich regelmässig bei der Torsion des Rohres. Das Plättchen e, e mit den Rollen a, a befand sich so nahe wie möglich an dem Spiegel r' , um die Biegung unter dem Einflusse des auf dem Hebel t befindlichen Gewichtes zu verhindern. Der Hebel stand rechtwinkelig zur Rohraxe und lag immer in horizontaler Ebene xz (Fig. 17). Die Ringe m, m sind auf der alten Stelle geblieben, aber die Spiegel wurden um 90° gedreht aus der Ebene zy in die Ebene xy (Fig. 17). Ich beobachtete die Torsionswinkel der beiden Enden nach Poggendorff's Methode mit zwei Fernröhren im Abstände von 1 m; in diesen Experimenten drehte sich der Spiegel r' nicht mehr als auf ca. $0,55^\circ$ pro 1 kg Belastung, der Spiegel r aber nur um ca. 5 Proc. dieser Verschiebung. Es wurden, wie früher, Belastungen von 0,5 kg bis 2 kg benutzt, ohne dass eine elastische Nachwirkung bemerkt wurde. Ich glaube, dass der Grund dieses günstigen Umstandes in der Geringfügigkeit der hervorgerufenen Deformation besteht.

Bei allen Untersuchungen dieser Art muss man, wie be-

kannt, sehr vorsichtig sein betreffend der äusseren Störungen, speciell wenn man die Gewichte auf die Schale legt oder dieselben abnimmt; um diese Erschütterungen möglichst zu vermeiden, habe ich immer bei Biegung oder Torsion diese Manipulation vermittels besonderer Rollen und einer Schnur gethan, ohne das Fernrohr zu verlassen. Es hat sich dies auch sehr zweckmässig erwiesen; ich beobachtete thatsächlich, dass die Verschiebungen beider Arten frei und ruhig vor sich gingen und dass das untersuchte Rohr genau auf seinen Scalenstrich zurückkehrte. Bei verschiedenen Belastungen war der Proportionalitätsfactor zwischen dem Torsionswinkel θ und dem Gewichte P nicht streng constant. Die Abweichung erreichte bis 3 Proc. Leider verhinderte mich eine Augenkrankheit diese Untersuchung weiter auszudehnen. In der beigelegten Tabelle sind die Resultate betreffend die Torsionsconstante μ zusammengestellt nach der Formel

$$\mu = \frac{2 l C}{\theta \pi (R_1^4 - R_0^4)},$$

in welcher $C = t P$ das Torsionsmoment, l den Abstand zwischen den beiden Spiegeln r, r' bedeuten; die anderen Grössen sind schon bekannt. In derselben Tabelle sind die Werthe der Poisson'schen Constante σ angeführt, welche mittels der bekannten Bezeichnung

$$\frac{E}{\mu} = 2(1 + \sigma)$$

bestimmt werden.

Tabelle XIV.

Torsionsmodul μ und Poisson's Constante σ .

Nr.	θ pro 1 kg	μ in kg	σ
I	0,491 ^o	2960	0,230
II	0,517	2930	0,245
III	0,447	2796	0,232
IV	0,538	2841	0,538
V	0,383	2291	0,236

Es bleibt mir jetzt übrig auf Grund der letzten zwei Tabellen den Coefficienten κ zu berechnen nach der Formel

$$\kappa = \frac{3(1 - 2\sigma)}{E} - 0.010333,$$

indem man den Druck nicht in kgr pro qmm, sondern in Atmosphären ausdrückt.

Tabelle XV.

Kubische Compressibilität κ der Röhre und des Piezometers.

Nr.	n. d. Form. $\kappa = \frac{3(1-2\sigma)}{E}$	n. Regnault bei $\lambda = \mu$	Differenzen
I	$23,0 \times 10^{-7}$	$22,7 \times 10^{-7}$	$-0,3 \times 10^{-7}$
II	$21,6 \times 10^{-7}$	$23,6 \times 10^{-7}$	$+2,0 \times 10^{-7}$
III	$24,1 \times 10^{-7}$	$24,5 \times 10^{-7}$	$+0,4 \times 10^{-7}$
IV	$23,1 \times 10^{-7}$	$24,5 \times 10^{-7}$	$+1,4 \times 10^{-7}$
V	$28,9 \times 10^{-7}$	—	—

Wir können denselben Coefficienten κ noch einmal berechnen mittels der Angaben von θ' der Tabelle X nach der Gleichung (V), in welcher μ und σ aus der Tabelle XIV, λ aber aus der Beziehung (3) entnommen sind; den in dieser Weise berechneten Coefficienten wollen wir kurz bezeichnen κ bei $\lambda \neq \mu$.

Tabelle XVI.

Kubische Compressibilität der Piezometer nach Regnault bei $\lambda = \mu$ und bei $\lambda \neq \mu$.

Nr.	$\lambda = \mu$	$\lambda \neq \mu$	Differenzen
I	$22,7 \times 10^{-7}$	$24,1 \times 10^{-7}$	$-1,4 \times 10^{-7}$
II	$23,6 \times 15^{-7}$	$24,0 \times 10^{-7}$	$-0,4 \times 15^{-7}$
III	$24,5 \times 15^{-7}$	$25,8 \times 10^{-7}$	$-1,3 \times 15^{-7}$
IV	$24,5 \times 10^{-7}$	$25,3 \times 10^{-7}$	$-0,8 \times 15^{-7}$

Die Tabellen XV und XVI zeigen uns, dass die Coefficienten der kubischen Compressibilität der Piezometer — ob sie nach Regnault's Verfahren mit Lamé's vereinfachten Formeln, oder nach soeben beschriebener Methode mit genauen Formeln bestimmt werden — sich nicht mehr als auf eine, Maximum zwei, Einheiten der siebenten Decimale unterscheiden. Eine grössere Uebereinstimmung ist kaum zu verlangen.

Um zu einem definitiven Schlusse zu gelangen, wollen wir eine Vergleichung machen von κ bestimmt nach Regnault, unter der Annahme $\lambda = \mu$, und κ , welches den Mittelwerth

von κ darstellt, berechnet nach der Formel $\mu = 3(1 - 2\sigma)/E$ sowie κ , berechnet nach Regnault, bei der Annahme $\lambda \neq \mu$ (Gleichung V).

Tabelle XVII.

Kubische Compressibilität der Piezometer bei $\lambda = \mu$ und $\lambda \neq \mu$.

Nr.	Mittel bei $\lambda \neq \mu$	$\lambda = \mu$	Differenzen
I	$23,5 \times 10^{-7}$	$22,7 \times 10^{-7}$	$- 0,8 \times 10^{-7}$
II	$22,8 \times 10^{-7}$	$23,6 \times 10^{-7}$	$+ 0,8 \times 10^{-7}$
III	$25,0 \times 10^{-7}$	$24,5 \times 10^{-7}$	$- 0,5 \times 10^{-7}$
IV	$24,2 \times 10^{-7}$	$24,5 \times 10^{-7}$	$+ 0,3 \times 10^{-7}$

Wenn wir nun mit Hülfe dieser gut übereinstimmenden Zahlen die absolute Compressibilität des Quecksilbers bei $\lambda = \mu$ und bei $\lambda \neq \mu$ noch einmal berechnen (vgl. Tabelle X, Col. 10, 11, 12), so bekommen wir schliesslich eine Tabelle, welche uns ein vollständig befriedigendes Resultat gibt.

Tabelle XVIII.

Absolute Compressibilität des Quecksilbers bei $\lambda = \mu$ und bei $\lambda \neq \mu$.

Nr.	χ_v bei $\lambda = \mu$	χ_v bei $\lambda \neq \mu$
I	$37,80 \times 10^{-7}$	$38,54 \times 10^{-7}$
II	$38,89 \times 10^{-7}$	$38,10 \times 10^{-7}$
III	$37,47 \times 10^{-7}$	$38,00 \times 10^{-7}$
IV	$38,65 \times 10^{-7}$	$38,32 \times 10^{-7}$
Mittel	$38,20 \times 10^{-7}$	$38,24 \times 10^{-7}$

Schluss.

1. Der wahre Compressibilitätscoefficient χ_v einer Flüssigkeit ist gleich der Summe der Coefficienten der scheinbaren Compressibilität χ_a der Flüssigkeit und der cubischen Compressibilität κ der Piezometerwand, d. h. $\chi_v = \chi_a + \kappa$.

2. Die Compressibilitätscoefficienten κ der Piezometerwand, je nach der Art des Glases, ändern sich in gewissen Grenzen. Deswegen müssen sie jedesmal selbständig bestimmt werden, wenn es sich um eine genaue Untersuchung handelt.

3. Die Bestimmungen einer scheinbaren Compressibilität χ_a genügen nur dann, wenn die betrachtete Flüssigkeit zur Kategorie der stark compressibeln (z. B. Aether) gehört, und wenn

die Schwankungen der Coefficienten α , dem absoluten Werthe nach, vernachlässigt werden können, da in der That die mittleren Grenzen derselben sich zwischen $\alpha = 22 \times 10^{-7}$ und $\alpha = 28 \times 10^{-7}$ befinden, was wir durch folgende Zahlen veranschaulichen wollen.

Tabelle XIX.

Kubische Compressibilität des gewöhnlichen Glases und Bleiglasses.

Name	Bleiglas	$\alpha \cdot 10^7$	Name	Gewöhnliches deutsches Glas	$\alpha \cdot 10^7$
Wertheim ¹⁾	Baccarat	28,2	Voigt ⁹⁾ . . .	Rheinisches . . .	24,6*
Wertheim ²⁾	Choisi-le-Roi . .	26,0*	Kowalsky ¹⁰⁾	Greiner & Friederichs	25,3*
Grassi ³⁾ . .	Choisi-le-Roi . .	28,8*	De Metz . .	Gundelach	24,6
Everett ⁴⁾ . .	Cochran Flint Nr. II	29,3*	De Metz . .	Greiner & Cie. .	23,1
Everett ⁴⁾ . .	Couper Flint Nr. I . .	24,9*			
Voigt ⁵⁾ . . .	Guinand à Paris . .	27,5*			
Buchanan ⁶⁾	Unbekanntes . . .	29,2			
Tait ⁷⁾	Unbekanntes . . .	27,0			
Amagat ⁸⁾ . .	Guilbert Martin . .	24,3			
De Metz . . .	Französisches . . .	28,9			
	Mittel	27,4		Mittel	24,4

Name	Gewöhnliches franz. Glas	$\alpha \cdot 10^7$
Wertheim } und } Chévandier }	Fensterglas von St. Quirin	19,5
	von Cirey	22,0
	von Valéristhal	22,4
Regnault ¹¹⁾	Unbekanntes	23,7
Grassi ¹²⁾ . .	—	22,6
Amagat ¹³⁾ .	Guilbert Martin	22,2
	Mittel	22,1

* Die Zahlen, welche mit Asterisken bezeichnet sind, wurden von mir berechnet.

- 1) Regnault, l. c. p. 434.
- 2) Wertheim, Mémoire sur l'équilibre des corps solides homogènes. Extrait des Ann. de chim. et de phys. (3) 23. p. 21. 1848.
- 3) Grassi, l. c. Piezomètre A; berechnet bei der Annahme $\lambda = \mu$
- 4) Everett, Phil. Trans. 158. p. 369. 1868.
- 5) Voigt, Wied. Ann. 15. p. 510—513. 1882.
- 6) Buchanan, Beibl. 5. p. 172. 1881.
- 7) Tait, Beibl. 14. p. 707. 1890.
- 8) Amagat, Journ. de phys. (2) 8. p. 362—365. 1889.
- 9) Voigt, l. c.
- 10) Kowalsky, Wied. Ann. 36. p. 309—313. 1889.
- 11) Regnault, l. c. p. 454—461.
- 12) Grassi, l. c. Piezomètres B et D.
- 13) Amagat, l. c. p. 362. 365.

4. Eine Vergleichung der Flüssigkeitscompressibilitäten, welche mit verschiedenen Piezometern bestimmt wurden, ist nur dann möglich, wenn man mit dem absolutem Coefficient χ_v und nicht mit dem scheinbaren χ_a rechnet.

5. Die von Jamin gegebene Methode ist gleich der ersten Phase der Regnault'schen, da man mittels derselben den Coefficienten der scheinbaren Compressibilität χ_a bestimmt; sie enthält aber die Angabe des Correctionsrohres $\gamma = \theta'$, welche zur Berechnung des Coefficienten κ (Gleichung V) dienen kann.

6. Man könnte voraussetzen, dass die nach der Jamin'schen Methode erhaltenen Coefficienten χ_a von der Wanddicke des Piezometers abhängig seien. Die Theorie verlangt es nicht, und das Experiment rechtfertigt die Theorie vollständig.

7. Um nach den Methoden von Regnault und Jamin die übereinstimmenden Coefficienten χ_v zu bekommen, erfordert die Theorie, zu dem Jamin'schen Coefficienten χ_a den Coefficienten κ hinzuzufügen, und das Experiment bestätigt diesen Schluss vollkommen.

8. Die Substitution der Bedingungsgleichung $\theta = \theta' - \theta''$ von Regnault durch das Verfahren, welches zur selbständigen Bestimmung des absoluten Coefficienten χ_v führt, ist zu empfehlen.

9. Diese Substitution hat ein besonderes Interesse, wenn es sich um wenig compressible Flüssigkeiten handelt, oder um einen Zusammenhang zwischen der Compressibilität und der Temperatur eines Körpers festzustellen.

10. Alle drei erwähnten Methoden der Bestimmung des Coefficienten χ_v geben dieselben Zahlen; die vorkommenden Differenzen sind meistens so gering, dass sie — einerseits durch die Beobachtungsfehler, anderseits durch die Formunvollkommenheit der Piezometer — erklärt werden.

11. Die neuesten Untersuchungen von Hrn. Amagat und meine eigenen führen zum unumstösslichen Schlusse, dass in den Studien der Compressibilitätserscheinungen die Elasticitätstheorie die Hauptrolle spielt, und dass sie allein alle einschlägigen Fragen zu erklären fähig ist.

12. Die alten Untersuchungen über die Quecksilbercompressibilität stimmen mit den neuesten ziemlich gut überein,

wenn man einige nothwendige Correctionen anbringt. Daher berücksichtigte ich bei der Herstellung des Mittelwerthes der gegebenen Daten (vgl. die Tabelle XII) die Zahl der Piezometer, die bei den Experimenten angewendet wurden. Soviel mir bekannt ist, benutzten mehr als ein Piezometer nur Hr. Amagat (sieben) und ich (vier); unsere Vorgänger operirten jeder mit je einem Piezometer. Dieser Mittelwerth von χ_v ist bei 0° $\chi_v = 37.9 \times 10^{-7}$ und steht sehr nahe meiner Zahl $\chi_v = 37.4 \times 10^{-7}$ bei 0° .

Indem ich meine Arbeit schliesse, halte ich es für eine meiner angenehmsten Pflichten Hrn. Prof. Dr. Th. Schwedoff, in dessen Laboratorium dieselbe ausgeführt wurde, meinen innigsten Dank zu bezeugen.

Odessa, Phys. Labor. der Univ., im Juni 1892.

Birkeland Fig. 1-6. Wien Fig. 7-11. de Metz Fig. 12-17.