III. *Ueber die Theorie der oscillatorischen Entladung; von J. Stefan.*

(Aus den Sitzungsber. der kais. Acad. d. Wiss. in Wien, math.-naturw. Cl. Bd. 99, Abth. IIa. vom 12. Juni 1890; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Die Theorie der oscillatorischen Entladung einer Leydener Flasche ist von W. Thomson und Kirchhoff entwickelt worden. Dieselbe liefert für die Intensität des Entladungsstromes eine Gleichung, welche der Form nach mit jener für die Bewegung eines Pendels in einem widerstehenden Mittel übereinstimmt. Bei der Entwicklung dieser Theorie haben W. Thomson und Kirchhoff vorausgesetzt, dass der Entladungsstrom den ganzen Querschnitt des entladenden Drahtes in gleichförmiger Dichtigkeit erfüllt. Diese Voraussetzung weicht jedoch bei so rapid verlaufenden Strömen von der Wirklichkeit sehr weit ab. In solchen Fällen bleibt in einem metallischen Leiter die Bewegung der Electricität nahezu vollständig auf eine sehr dünne, an der Oberfläche des Leiters liegende Schichte beschränkt.

Durch diese Anordnung der Strömung wird der Coëfficient der Selbstinduction des Leiters vermindert, sein Widerstand aber in bedeutendem Maasse vermehrt. Wenn die Aenderung dieser Grössen nur die Folge hätte, dass für dieselben in die Gleichung andere bestimmte Werthe einzusetzen wären, so bliebe dadurch die Theorie in ihrer Wesenheit unberührt. Diese Grössen sind jedoch von der Art der Entladung, insbesondere für eine oscillirende Entladung von der Oscillationsdauer abhängig. Die Rücksichtnahme auf die ungleichförmige Vertheilung des Stromes muss also zu einer Darstellung des Vorganges der Entladung führen, welche von der Pendelbewegung verschieden ist. Die Untersuchung, welche ich über diesen Gegenstand ausgeführt habe, und die ich im Folgenden mitzuthellen mir erlaube, hat auch das wesentliche Resultat ergeben, dass eine oscillatorische Entladung immer aus zwei Bewegungen zusammengesetzt ist, von welchen jedoch die eine viel früher erlischt als die

andere. Die letztere ist es, welche mit wachsender Zeit den Charakter einer Pendelbewegung mit abnehmender Amplitude annimmt.

Die Einschaltung einer Funkenstrecke in den Schliessungsbogen dürfte übrigens gerade für die erste Zeit der Entladung eine viel grössere Abweichung von der Pendelbewegung hervorrufen, als die durch die Theorie angegebene. Diese Abweichung kann nicht ohne Einfluss auf die Inductionswirkungen der Entladung in benachbarten Leitern bleiben. Der Schliessungsbogen oder ein mit ihm verbundener Leiter kann in einem anderen immer electriche Bewegungen induciren, auch wenn die Dauer der Eigenschwingungen des letzteren von der Oscillationsdauer der erregenden Entladung ganz verschieden, eine eigentliche Resonanz also ausgeschlossen ist. Diese Bewegung wird dann noch eine Verstärkung erfahren, wenn der Inductionsstoss in einer den Eigenschwingungen des Leiters entsprechenden günstigen Zeit, z. B. infolge einer Reflexion am Ende des inducirenden Drahtes, sich wiederholt. Darauf, glaube ich, können die von Sarasin und De la Rive gemachten Beobachtungen zurückgeführt werden. Ich will übrigens noch bemerken, dass bei diesen Versuchen die Ebene des kreisförmigen secundären Leiters senkrecht gegen die inducirenden Drähte gestellt war. Die beobachteten Inductionen sind also nicht electrodynamische in gewöhnlichem Sinne, sondern electrostatische, welche durch die auf den Drähten wandernden Ladungen erregt werden.

In der oscillatorischen Entladung zeigt die bewegte Electricität auffallender als in anderen Erscheinungen die Eigenschaft der Trägheit. Es wird auch häufig diese Entladung mit den Schwingungen einer Flüssigkeit in zwei communicirenden Röhren verglichen. Ein solcher Vergleich bietet zunächst nur ein augenfälliges Bild für eine Erscheinung, deren Beobachtung mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist. Man kann aber diesem Vergleiche mit Hülfe der Beziehung, welche zwischen den Principen der Trägheit und der Energie besteht, noch eine weitere Ausdehnung geben. Die Energie, welche der Höhendifferenz der Flüssigkeit in den zwei communicirenden Röhren entspricht, verwandelt sich

während der Ausgleichung dieser Höhen in lebendige Kraft der Flüssigkeit. Diese lebendige Kraft kann sich wieder in eine Energie der ursprünglichen Art umsetzen, und zwar in der Weise, dass die neue Höhendifferenz gegen die frühere die entgegengesetzte Lage erhält. In der Umsetzbarkeit der beiden Energieen ineinander liegt der Grund für die schwingende Bewegung, die sonst auch als eine Folge der Trägheit aufgefasst wird. Wenn infolge von Reibung ein Theil der Energie in Wärme verwandelt wird, welche nicht umsetzbar ist, so werden die Amplituden der Schwingungen immer kleiner. Die Bewegung vollzieht sich so, als hätte die Flüssigkeit keine vollkommene Trägheit.

Der Potentialdifferenz zwischen den Platten eines geladenen Condensators entspricht eine electrostatische Energie. Werden die beiden Platten durch einen Draht verbunden, so verwandelt sich ein Theil dieser Energie wegen des Leitungswiderstandes des Drahtes in Wärme, der übrige Theil aber verwandelt sich in eine andere Energie, welche, wie die Thatsache der oscillatorischen Entladung zeigt, sich wieder in eine electrostatische umsetzen kann, der Art, dass im Condensator eine der ursprünglichen entgegengesetzte Potentialdifferenz entsteht. Es handelt sich nun darum, welcher Art diese umsetzbare Energie ist. In dem besonderen Falle, in welchem der Entladungsdraht in Form einer Spirale um einen Eisenkern geführt wird, ist die Art eines Theiles, und zwar des grössten Theiles dieser Energie bekannt. Es ist die magnetische Energie, welche in dem während des Ausgleiches der Ladungen magnetisirten Eisen sich anhäuft und welche, nachdem der Ausgleich vollzogen ist, noch einen Strom in der gleichen Richtung unterhält und so den Condensator neuerdings, und zwar entgegengesetzt, ladet. Es ist am einfachsten, auch den anderen Theil der Energie und überhaupt diese Energie in den übrigen Fällen, in welchen eine unmittelbar wahrnehmbare Magnetisirung eines Körpers nicht vorhanden ist, als eine magnetische aufzufassen, welche in der Magnetisirung des Mediums, in dem die Entladung vor sich geht, ihren Sitz hat. Diese Annahme genügt ja auch zur Entwicklung der Gesetze der electrodynamischen Induction.

Das Potential der electrischen Ladung des Condensators habe zur Zeit t auf der ersten Platte desselben den Werth P_1 , auf der zweiten Platte den Werth P_2 . Die Menge der Electricität auf der ersten Platte sei zur selben Zeit Q_1 . Die Capacität C des Condensators ist definirt durch die Gleichung:

$$(1) \quad Q_1 = C (P_1 - P_2).$$

Hat der Entladungsstrom zur Zeit t die Intensität J , so ist:

$$(2) \quad J = - \frac{dQ_1}{dt} = - C \frac{d}{dt} (P_1 - P_2).$$

Findet die Entladung zwischen zwei voneinander weit entfernten Conductoren statt, wie dies bei den Vibratoren von Hertz der Fall ist, so ergibt sich die Beziehung zwischen J und der Potentialdifferenz $P_1 - P_2$ der Ladungen der beiden Conductoren in folgender Weise. Ist C_1 die Capacität des ersten, C_2 jene des zweiten Conductors, so ist:

$$Q_1 = C_1 P_1, \quad Q_2 = C_2 P_2, \quad \frac{dQ_1}{dt} = -J, \quad \frac{dQ_2}{dt} = +J,$$

$$\text{also:} \quad J = - \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \frac{d}{dt} (P_1 - P_2).$$

Sind die beiden Capacitäten C_1 und C_2 einander gleich, also $C_2 = C_1$, so ist in der Gl. (2) $\frac{1}{2} C_1$ an die Stelle von C zu setzen.

Die Intensität J ist die Summe der Intensitäten, welche die Strömung in den einzelnen elementaren Fasern des Entladungsdrahtes besitzt. Ist u die Stromdichtigkeit für ein Element dq des Querschnittes des Drahtes, so ist:

$$(3) \quad J = \int u dq.$$

Das Integral ist über den ganzen Querschnitt des Drahtes auszudehnen. Der Einfachheit wegen soll dieser Querschnitt als kreisförmig vorausgesetzt werden. Dann ist u ausser von t nur noch von einer Variablen r , dem Abstände des Elementes dq vom Mittelpunkte des Kreises abhängig und durch die Gleichung:

$$(4) \quad \frac{du}{dr} = k \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right)$$

bestimmt. Der Coëfficient k ist $= \sigma/4\pi\mu$. σ bedeutet den specifischen Widerstand, μ die magnetische Leitungsfähigkeit der Substanz des Drahtes. Bezeichnet man die Magnetisierungszahl dieser Substanz mit θ , so ist $\mu = 1 + 4\pi\theta$.

Zur vollständigen Bestimmung von u gehören noch zwei Gleichungen, von denen eine u für $t=0$ bestimmt, die andere eine für jeden Werth von t für die Oberfläche des Drahtes, also für $r=a$ zu erfüllende Bedingung darstellt. Die erste Gleichung soll für den vorliegenden Fall in $u=0$ für $t=0$ und jeden zwischen $r=0$ und $r=a$ liegenden Werth von r bestehen. Die zweite Gleichung ist:

$$(5) \quad P_1 - P_2 = l\sigma u_1 + L \frac{dJ}{dt}.$$

l bedeutet die Länge des Entladungsdrahtes, L den Coëfficienten der Induction, welche die Strömung auf eine in der Oberfläche des Drahtes liegende Faser ausübt, u_1 die Stromdichtigkeit in einer solchen Faser. Die auf eine solche Faser wirkende electromotorische Kraft ist der Potentialdifferenz $P_1 - P_2$ gleich angenommen. Bezüglich der Ableitung der Gleichungen (4) und (5) verweise ich auf meine Abhandlung: Ueber veränderliche electriche Ströme in dicken Leitungsdrähten.¹⁾

Die Gl. (5) kann man durch eine andere ersetzen, welche nur die für die Oberfläche geltenden Werthe von u und seiner Differentialquotienten enthält. Differenzirt man diese Gleichung nach t und benützt die Relation (2), so folgt:

$$(6) \quad -\frac{J}{C} = l\sigma \frac{du_1}{dt} + L \frac{d^2J}{dt^2}.$$

J kann noch in anderer Weise als durch die Formel (3) ausgedrückt werden. Multiplicirt man die Gl. (4) mit $2\pi r dr$ und integrirt beide Seiten derselben von $r=0$ bis $r=a$, so folgt:

$$(7) \quad \frac{dJ}{dt} = 2\pi a k \left(\frac{du}{dr} \right),$$

worin der Differentialquotient von u nach r für $r=a$ zu nehmen ist. Differenzirt man (6) nochmals nach t und benützt die Relation (7), so erhält man:

1) J. Stefan, Wien. Ber. 95. 2. Abth. p. 917. 1887.

$$-\frac{2\pi k a}{C} \left(\frac{du}{dr} \right)_1 = l\sigma \frac{d^2 u_1}{dt^2} + 2\pi k a L \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{du}{dr} \right)_1.$$

Führt man die Bezeichnungen:

$$(8) \quad \frac{1}{LC} = m^2, \quad \frac{l\sigma}{2\pi a k L} = \frac{2l\mu}{aL} = \frac{n}{\sqrt{k}}.$$

ein, so erhält die für die Oberfläche geltende Bedingung die Form:

$$(9) \quad \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{du}{dr} \right)_1 + \frac{n}{\sqrt{k}} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + m^2 \left(\frac{du}{dr} \right)_1 = 0.$$

Die Lösung der Aufgabe wird sehr vereinfacht, wenn man den Fall eines sehr dünnen Drahtes ausschliesst und von vorneherein die Annahme macht, dass die Stromdichtigkeit u nur in einer sehr dünnen, an der Oberfläche liegenden Schichte endliche Werthe besitzt, in den tiefer liegenden Theilen des Drahtes aber verschwindend klein ist. Es empfiehlt sich dann, statt des Radius r die Tiefe x unter der Oberfläche als Veränderliche einzuführen. Man kann die Gl. (4) durch die einfachere:

$$(10) \quad \frac{du}{dt} = k \frac{d^2 u}{dx^2}$$

und die Bedingungsgleichung (9) durch:

$$(11) \quad \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{du}{dx} \right)_0 - \frac{n}{\sqrt{k}} \frac{d^2 u_0}{dt^2} + m^2 \left(\frac{du}{dx} \right)_0 = 0.$$

ersetzen, welche für $x=0$ zu erfüllen ist. Zu diesen beiden kommt dann noch die weitere Bedingung, dass für $t=0$ die Function u für alle positiven Werthe von x verschwinden muss.

Ein Integral der Gl. (10), welches dieser letzteren Bedingung genügt, ist:

$$(12) \quad u = \frac{x}{2\sqrt{k}t} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} f(x + 2\eta\sqrt{kt}) d\eta.$$

Darin bedeutet f eine beliebige Function und besteht die weitere Aufgabe nun lediglich darin, die Function f so zu wählen, dass dieses Integral auch der Gl. (11) genügt. Dieses Verfahren ist schon von W. Thomson bei der Lösung einer analogen, der Theorie der Wärmeleitung angehörigen Aufgabe angewendet worden. Aus (12) folgt zunächst:

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\eta^2} f(2\eta \sqrt{kt}) d\eta.$$

also:
$$\frac{du_0}{dt} = \frac{k}{\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^0 e^{-\eta^2} f'(2\eta \sqrt{kt}) \cdot \eta d\eta.$$

Wendet man auf diese Formel das Verfahren der theilweisen Integration an, so erhält man:

$$\frac{du_0}{dt} = -\frac{k f''(0)}{2 \sqrt{\pi kt}} + \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\eta^2} f''(2\eta \sqrt{kt}) d\eta$$

und daraus:

$$\frac{d^2 u_0}{dt^2} = \frac{k f'(0)}{4 t \sqrt{\pi kt}} - \frac{k^2 f'''(0)}{2 \sqrt{\pi kt}} + \frac{k^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\eta^2} f^{IV}(2\eta \sqrt{kt}) d\eta.$$

Ferner ergibt sich aus (12):

$$(13) \quad \left(\frac{du}{dx}\right)_0 = -\frac{f(0)}{2 \sqrt{\pi kt}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\eta^2} f'(2\eta \sqrt{kt}) d\eta$$

und daraus erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dx}\right)_0 &= \frac{f(0)}{4 t \sqrt{\pi kt}} - \frac{k f''(0)}{2 \sqrt{\pi kt}} + \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\eta^2} f'''(2\eta \sqrt{kt}) d\eta, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{du}{dx}\right)_0 &= \frac{3 f(0)}{8 t^2 \sqrt{\pi kt}} + \frac{k f''(0)}{4 t \sqrt{\pi kt}} - \frac{k^2 f^{IV}(0)}{2 \sqrt{\pi kt}} \\ &\quad + \frac{k^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\eta^2} f^V(2\eta \sqrt{kt}) d\eta. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in die Gl. (11) ein, so findet man, dass dieser genügt wird, wenn f allgemein die Gleichung:

$$(14) \quad k^2 f^V - nk \sqrt{k} f^{IV} + m^2 f' = 0$$

befriedigt und für den Nullwerth des Argumentes die Bedingungen:

$$(15) \quad f(0) = 0, \quad n f'(0) - \sqrt{k} f''(0) = 0, \quad n f'''(0) - \sqrt{k} f^{IV}(0) = 0$$

erfüllt.

Die Gl. (14) liefert die Function $f'(y)$ als Summe von vier Exponentiellen. Ich will dieselbe in der Form:

$$(16) \quad f'(y) = A_1 e^{\frac{\alpha_1 y}{\sqrt{k}}} + A_2 e^{\frac{\alpha_2 y}{\sqrt{k}}} + A_3 e^{\frac{\alpha_3 y}{\sqrt{k}}} + A_4 e^{\frac{\alpha_4 y}{\sqrt{k}}}$$

annehmen. Darin bedeuten A_1, A_2, A_3, A_4 erst zu bestimmende constante Grössen, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und α_4 aber die Wurzeln der Gleichung:

$$(17) \quad \alpha^4 - n\alpha^3 + m^2 = 0.$$

Zur Bestimmung der Constanten A dienen zuerst die Gleichungen (15). Die letzte derselben gibt:

$$A_1(\alpha_1^3 - n\alpha_1^2) + \dots + A_4(\alpha_4^3 - n\alpha_4^2) = 0,$$

wofür man mit Rücksicht auf (17) auch:

$$(18) \quad \frac{A_1}{\alpha_1} + \frac{A_2}{\alpha_2} + \frac{A_3}{\alpha_3} + \frac{A_4}{\alpha_4} = 0$$

setzen kann. Ebenso erhält man aus der zweiten der Gleichungen (15):

$$(19) \quad \frac{A_1}{\alpha_1^3} + \frac{A_2}{\alpha_2^3} + \frac{A_3}{\alpha_3^3} + \frac{A_4}{\alpha_4^3} = 0.$$

Es sind nun noch zwei Gleichungen nothwendig. Diese gewinnt man aus den Gleichungen (5) und (6), welche für jede Zeit, also auch für $t=0$ gelten. Setzt man in denselben der Formel (7) entsprechend:

$$(20) \quad \frac{dJ}{dt} = -2\pi ak \left(\frac{du}{dx} \right)_0,$$

so geben sie, da für $t=0$ sowohl u_1 oder $u_0 = 0$, als auch $J=0$ ist, für diesen Werth der Zeit:

$$\frac{P_1^0 - P_2^0}{2\pi akL} + \left(\frac{du}{dx} \right)_0 = 0, \quad \frac{n}{\sqrt{k}} \frac{du_0}{dt} - \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dx} \right)_0 = 0.$$

Unter P_1^0 und P_2^0 sind die Werthe verstanden, welche die Potentiale P_1 und P_2 zur Zeit $t=0$ besitzen. Nach Einsetzung der Werthe der Differentialquotienten von u und Berücksichtigung der Gleichungen (15) erhält man:

$$f'(0) = -\frac{P_1^0 - P_2^0}{\pi akL}, \quad nf''(0) - \sqrt{k}f'''(0) = 0,$$

und daraus:

$$(21) \quad A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = -\frac{P_1^0 - P_2^0}{\pi \sigma kL},$$

$$(22) \quad \frac{A_1}{\alpha_1^2} + \frac{A_2}{\alpha_2^2} + \frac{A_3}{\alpha_3^2} + \frac{A_4}{\alpha_4^2} = 0.$$

Die Gleichungen (18), (19) und (21), (22) bilden einen besonderen Fall eines bekannten Systems von Gleichungen,

deren allgemeine Lösung schon von Lagrange gegeben worden und welche für diesen besonderen Fall auch leicht direct zu finden ist. Es ist:

$$(23) \quad A_1 = -\frac{\alpha_1}{4\alpha_1 - 3n} \cdot \frac{P_1^0 - P_2^0}{\pi a k L}.$$

Setzt man in diese Formel an Stelle von α_1 der Reihe nach die Wurzeln $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, so erhält man die zugehörigen Constanten A_2, A_3, A_4 . Die Aufgabe ist hiermit vollständig gelöst.

Zur Discussion dieser Lösung will ich die Formeln, welche die Intensität der Entladung bestimmen, benützen. Aus (20) folgt, wenn man das Zeichen der Variablen η mit dem entgegengesetzten vertauscht:

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{2\pi a k}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\eta^2} (A_1 e^{-2\alpha_1 \eta \sqrt{t}} + \dots A_4 e^{-2\alpha_4 \eta \sqrt{t}}) d\eta.$$

Den Werth von J kann man aus der Gl. (6) oder direct aus der vorstehenden Formel durch Integration nach t ableiten. Zu diesem Behufe sind erst die darin enthaltenen Integrale nach dem Schema:

$$\int_0^\infty e^{-\eta^2 - 2\alpha \eta \sqrt{t}} d\eta = e^{\alpha^2 t} \int_{\alpha \sqrt{t}}^\infty e^{-\eta^2} d\eta$$

zu transformiren. Letzterer Ausdruck gibt nach t unbestimmt integriert:

$$\frac{e^{\alpha^2 t}}{\alpha^2} \int_{\alpha \sqrt{t}}^\infty e^{-\eta^2} d\eta + \frac{1}{2\alpha \sqrt{t}}.$$

Der Werth von J setzt sich aus den vier derartigen Theilen zusammen, welche man erhält, wenn man α durch α_1 bis α_4 ersetzt. Es ist nun zu bemerken, dass die vier Glieder, welche $\sqrt{t}$ im Nenner tragen, infolge der Gl. (18) sich wegheben. Es bleibt sonach:

$$(24) \quad J = -\frac{2\pi a k}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{A_1 e^{\alpha_1^2 t}}{\alpha_1^2} \int_{\alpha_1 \sqrt{t}}^\infty e^{-\eta^2} d\eta + \dots + \frac{A_4 e^{\alpha_4^2 t}}{\alpha_4^2} \int_{\alpha_4 \sqrt{t}}^\infty e^{-\eta^2} d\eta \right].$$

Eine Constante der Integration ist nicht hinzu zu fügen, da für $t=0$ auch $J=0$ werden muss und der vorstehende Ausdruck der Gl. (22) gemäss diese Bedingung erfüllt.

Die Eigenschaften der die Stromstärke J darstellenden Function sind nun wesentlich abhängig von der Beschaffenheit der Wurzeln der Gl. (17). Diese Gleichung kann keine reelle negative Wurzel haben, da die darin enthaltenen Grössen m und n wesentlich positiv sind. Eine negative Wurzel hätte auch zur Folge, dass das ihr entsprechende Glied in dem Ausdrücke für J mit wachsenden Werthen der Zeit t gegen unendlich convergiren würde. Die Gleichung kann nur positive reelle Wurzeln haben, da aber in ihr die Glieder mit der zweiten und ersten Potenz der Unbekannten fehlen, so können nicht alle vier Wurzeln, sondern nur zwei positiv sein, die beiden anderen sind complex, und zwar wegen des Fehlens der angeführten Glieder der Art, dass der reelle Bestandtheil derselben eine negative Zahl ist.

Es können aber auch alle vier Wurzeln complex sein, und zwar ist dies der gewöhnliche Fall. Die Abwesenheit der Glieder mit der zweiten und ersten Potenz hat zur Folge, dass die reellen Bestandtheile der beiden complexen Wurzelpaare entgegengesetzte Zeichen haben müssen. Es ist also in jedem Falle ein complexes Wurzelpaar mit einem negativen reellen Bestandtheile vorhanden.

Die Glieder in dem Ausdrücke für J , welche den complexen Wurzeln:

$$\alpha_1 = p + qi, \quad \alpha_2 = p - qi$$

entsprechen, kann man, wenn die Coëfficienten:

$$\frac{A_1}{\alpha_1^2} = \frac{1}{2}(M + Ni), \quad \frac{A_2}{\alpha_2^2} = \frac{1}{2}(M - Ni)$$

gesetzt werden, transformiren in:

$$(25) \left\{ \begin{aligned} & (M \cos 2pqt - N \sin 2pqt) e^{pt} \int_{p\sqrt{i}}^{\infty} e^{-\eta^2} \cos 2\eta q \sqrt{t} \cdot d\eta \\ & + (M \sin 2pqt + N \cos 2pqt) e^{pt} \int_{p\sqrt{i}}^{\infty} e^{-\eta^2} \sin 2\eta q \sqrt{t} \cdot d\eta. \end{aligned} \right.$$

Ist p positiv, so convergiren mit wachsenden Werthen von t beide Theile dieses Ausdruckes gegen Null. Ist aber p negativ, so gilt dies ersichtlicher Weise nur für den zweiten Theil, für den ersten aber ist dies, weil:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \cos 2\eta q \sqrt{t} \, d\eta = \sqrt{\pi} e^{-q^2 t}$$

ist, nur dann der Fall, wenn q^2 grösser ist als p^2 . Diese Bedingung ist auch thatsächlich erfüllt.

Substituirt man $p + qi$ für α in der Gl. (17), so findet man die Relation:

$$(26) \quad \frac{q^2}{p^2} = \frac{3n - 4p}{n - 4p}.$$

Da n wesentlich positiv ist, so folgt daraus sofort, dass q^2 für negative Werthe von p grösser ist als p^2 .

Für das complexe Wurzelpaar, dessen reeller Theil p negativ ist, convergirt also der Ausdruck (25) mit wachsendem t gegen:

$$(27) \quad \sqrt{\pi} e^{-(q^2 - p^2)t} [M \cos 2pqt - N \sin 2pqt].$$

Dieser Ausdruck stellt eine oscillatorische Bewegung dar, deren Amplituden mit der Zeit in geometrischer Progression abnehmen, die also der Bewegung eines Pendels entspricht. Die Schwingungsdauer τ ist durch:

$$\tau = -\frac{\pi}{pq}$$

bestimmt.

Die Amplituden dieser Bewegung werden mit der Zeit um so langsamer abnehmen, je weniger q^2 von p^2 verschieden ist. Wie man aus (26) ersieht, kommt q^2 um so näher an p^2 , je kleiner n ist. Für kleine Werthe von n wird also die Intensität dieser Bewegung erst nach langer Zeit verschwindend klein werden. Diese Bewegung ist diejenige, welche den beobachteten Oscillationen entspricht.

Die durch den Ausdruck (25) für negative Werthe von p charakterisirte Bewegung ist immer vorhanden, sie bildet aber nur einen Theil des ganzen Vorganges der Entladung. Es ist ihr noch eine zweite Bewegung superponirt, welche dem anderen Wurzelpaare der Gl. (17) entspricht. Ist dieses Wurzelpaar ebenfalls complex, so ist auch diese zweite Bewegung durch den Ausdruck (25) jedoch für positive Werthe von p bestimmt, welcher in diesem Falle mit wachsender Zeit viel rascher abnimmt, als derselbe Ausdruck für negative Werthe von p .

Sind die beiden anderen Wurzeln reell, so haben die denselben entsprechenden Glieder in der Formel (24) die Eigenschaft für $t = 0$ mit einem endlichen Werthe zu beginnen und mit wachsender Zeit ununterbrochen abzunehmen. Diese Glieder drücken eine aperiodische, mit wachsender Zeit verschwindende Bewegung aus. Aus der Gl. (17) erkennt man sofort, dass die reellen Wurzeln der Gleichung zwischen 0 und n liegen. Man kann aber die Gleichung auch transformiren in:

$$\left(\alpha^2 - \frac{na}{2}\right)^2 = \frac{n^2\alpha^2}{4} - m^2.$$

Daraus folgt, dass ein reeller Werth von α an die Bedingung:

$$\alpha = \text{oder} > \frac{2m}{n}$$

gebunden ist. Da α kleiner ist als n , so ist die Existenz der reellen Wurzeln ausgeschlossen, wenn n^2 kleiner ist als $2m$. Da m immer durch eine sehr grosse Zahl ausgedrückt ist, so muss auch n sehr gross sein, wenn diese Bedingung erfüllt sein soll. Infolge der Gl. (26) wird in diesem Falle auch q^2 viel grösser als p^2 . Die neben der aperiodischen vorhandene oscillirende Bewegung wird deshalb schon nach sehr kurzer Zeit erlöschen.

Es ist nicht leicht, die Forderung $n^2 > 2m$ experimentell in der Weise zu erfüllen, dass die Bedingungen, unter welchen die hier entwickelte Theorie gilt, gewahrt bleiben. Es müsste eine Flasche von sehr hoher Capacität und zur Schliessung derselben ein Eisendraht von sehr kleinem Durchmesser genommen werden. Für sehr dünne Drähte hört jedoch die Berechtigung, die Gl. (4) durch die einfachere Gl. (10) zu ersetzen, auf. Auch könnte durch die Wahl eines Leiters von sehr grossem specifischen Widerstande, z. B. eines Electrolyten, wenn demselben ein mässiger Querschnitt, etwa 1 cm im Quadrat, gegeben wird, der Werth von n in sehr bedeutendem Maasse erhöht werden. Eine solche Wahl ist jedoch nicht zulässig. In einem solchen Leiter vertheilen sich electriche Bewegungen auch wenn sie so rasch wie die Entladungen einer Leydener Flasche verlaufen, nahezu gleichförmig über den Querschnitt. Bildet ein solcher Leiter die

Schliessung, dann ist die Entladung nach der gewöhnlichen Theorie zu berechnen.

Wenn n eine sehr kleine Grösse im Vergleiche zu m ist, so kann man, wenn es sich nur um die Bestimmung der Schwingungsdauer der oscillirenden Bewegung handelt, diese in genügender Annäherung finden, wenn man die Gl. (17) auf:

$$\omega^4 + m^2 = 0$$

reducirt. Die Formel (24) vereinfacht sich unter dieser Annahme in:

$$J = \frac{P_1^0 - P_2^0}{mL} \sin mt,$$

und stellt eine einfache Schwingung mit constanter Amplitude dar.

Die Dauer der Oscillation τ_0 ist bestimmt durch:

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{m} = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Es folgt dieses Resultat auch unmittelbar aus den Gleichungen (5) und (6), wenn man in denselben das Glied $l\sigma u_1$ unterdrückt, d. h. den Einfluss des Widerstandes auf die Entladung vernachlässigt. Zu derselben Formel führt auch die gewöhnliche Theorie, nur bedeutet nach dieser L nicht den Inductionscoëfficienten für einen Faden in der Oberfläche des Drahtes, sondern den Coëfficienten der Induction des Drahtes auf sich selbst. Der letztere ist von der magnetischen Beschaffenheit des Drahtes abhängig, der erstere nicht. Dieser Umstand bedingt einen wesentlichen Unterschied zwischen den beiden Theorien. Nach der hier vorgetragenen ist die Oscillationsdauer für einen Eisendraht ebenso gross, wie für einen Kupferdraht von gleichen Dimensionen, während sie nach der früheren Theorie für einen Eisendraht vielmal grösser gefunden wird.

Setzt man n sehr klein voraus und lässt in der Rechnung die Glieder weg, welche n in der zweiten oder einer höheren Potenz enthalten, so erhält man für die Wurzeln mit negativem reellen Theil den Ausdruck:

$$p \pm qi = -\sqrt{\frac{m}{2}} + \frac{n}{4} \pm i\sqrt{\frac{m}{2}}.$$

Die Schwingungsdauer ist:

$$\tau = -\frac{\pi}{pq} = \frac{2\pi}{m\left(1 - \frac{n}{2}\sqrt{\frac{1}{2m}}\right)} = \frac{\tau_0}{1 - \frac{n\sqrt{\tau_0}}{4\sqrt{\pi}}}.$$

Das Gesetz, nach welchem die Amplituden mit der Zeit abnehmen, ist durch die Exponentielle:

$$e^{-(q^2 - p^2)t} = e^{-\frac{nt}{2}\sqrt{\frac{m}{2}}}$$

bestimmt.

Nach der Formel (8) ist:

$$n = \frac{2l\mu\sqrt{k}}{aL} = \frac{2l}{aL}\sqrt{\frac{\sigma\mu}{4\pi}}.$$

Drückt man m durch die Schwingungsdauer τ_0 aus, so wird:

$$\frac{n}{2}\sqrt{\frac{m}{2}} = \frac{l}{2aL}\sqrt{\frac{\sigma\mu}{\tau_0}}.$$

Nach der gewöhnlichen Theorie ist die Abnahme der Amplituden mit der Zeit durch die Exponentielle:

$$e^{-\frac{wt}{2L}}$$

gegeben, worin w den Widerstand des Entladungsdrahtes bedeutet, also:

$$w = \frac{l\sigma}{\pi a^2}$$

ist. Es hat daher auch:

$$\frac{l}{a}\sqrt{\frac{\sigma\mu}{\tau_0}} = w'$$

die Bedeutung eines Widerstandes. Es ist dies dieselbe Formel, welche ich in der Abhandlung „Ueber electrische Schwingungen in geraden Leitern“ für den Widerstand abgeleitet habe, welchen ein Draht gegen periodische Ströme von sehr kurzer Schwingungsdauer äussert. w' ist viel grösser als w , die Amplituden der Schwingungen nehmen nach der hier vorgetragenen Theorie viel rascher ab, als nach der gewöhnlichen. Insbesondere fordert die Theorie für Eisendrähte eine viel raschere Abnahme der Amplituden als für unmagnetische Drähte.