

Construction einer neuen Tafel für den *lapsus ellipticus* innerhalb der letzten fünf Achtel des Zeitraums,  
in welchem der bewegte Punct aus dem Zustande der Ruhe bis zum Centralpunct gelangt,

von Herrn Dr. *Lehmann*.

(Fortsetzung von № 1049 der A. N.)

### § 38.

Aus der Gleichung (80) § 27 findet sich  $\frac{Z}{\alpha}$  für  $z = 0,0000005$ ,  $z' = 0,000005$  und  $\Delta x = 0,15$  durch folgende Formel:

$$\frac{Z}{\alpha} = \frac{0''081}{\pi} \left( \frac{7}{\alpha} + \sqrt{\left( \frac{2250}{x^3} + 843,75 \cdot \frac{3-s}{s^3} + \frac{93,75 \cot \frac{1}{2} E}{sM} - \frac{1687,5 \cot \frac{1}{2} E}{s} \cdot \frac{\frac{9}{2}-s}{s^3} M \right)^2} \right); \dots (101)$$

für  $z = 0,0000005$ ,  $z' = 0,000005$  und  $\Delta x = 0,125$  aber wird

$$\frac{Z}{\alpha} = \frac{0''0405}{\pi} \left( \frac{13}{\alpha} + \sqrt{\left( \frac{15625}{6x^3} + 976,5625 \cdot \frac{3-s}{s^3} + \frac{15625 \cot \frac{1}{2} E}{144sM} - \frac{1953,125 \cot \frac{1}{2} E}{s} \cdot \frac{\frac{9}{2}-s}{s^3} M \right)^2} \right); \dots (102)$$

für  $z = 0,0000005$ ,  $z' = 0,000005$  und  $\Delta x = 0,1$  aber

$$\frac{Z}{\alpha} = \frac{0''162}{\pi} \left( \frac{3}{\alpha} + \sqrt{\left( \frac{1000}{3x^3} + 125 \cdot \frac{3-s}{s^3} + \frac{125 \cot \frac{1}{2} E}{9sM} - \frac{250 \cot \frac{1}{2} E}{s} \cdot \frac{\frac{9}{2}-s}{s^3} M \right)^2} \right). \dots (103)$$

Für  $x = 0$  ist, wie wir in § 27 gesehen,

$$\begin{aligned} \frac{Z}{\alpha} &= \frac{z}{\alpha} + \frac{z'}{2\alpha} \Delta x + \frac{0,071}{252} \Delta x^3 = \frac{0,0000005}{\alpha} + \frac{0,000005}{2\alpha} \cdot 0,15 + \frac{0,071}{252} \cdot 0,15^3 \\ &= \frac{0,000001}{\alpha} - \frac{1}{8} \cdot \frac{0,000001}{\alpha} + \frac{0,071}{28} \cdot 0,000375 = 0''61. \end{aligned}$$

Auch für  $x = 0,15$  wurde die Gleichung (101) nicht angewandt, weil dieselbe auch bei siebenziffrig-logarithmischer Rechnung nicht ausreicht,  $\frac{Z}{\alpha}$  auch nur in Hundertel-Secunden zuverlässig zu bestimmen; hier ist die Benutzung der linken Seite der Gleichung (75) § 27 besser (dadurch findet sich  $\frac{Z}{\alpha} = \frac{1+5\Delta x}{2000000\alpha} + \left( \frac{0,071}{252} + \frac{2,9609}{19404}x + \dots \right) \Delta x^3 = \frac{7}{8000000\alpha} + \left( \frac{0,071}{252} + \frac{2,9609}{19404}x + \dots \right) \cdot 0,003375$ ); denn die Summe der in der Reihe  $\frac{0,071}{252} + \frac{2,9609}{19404}x + \dots$  weggelassenen Glieder ist von der Ordnung

$$\frac{0,252 \left( \frac{2,9609}{19404} x \right)^2}{0,071 \cdot \frac{2,9609}{19404} x},$$

und giebt in  $\frac{Z}{\alpha}$  ein Glied von der Ordnung

$$\frac{2,9609^2 x^2}{106081,668 - 57453,3036x} \cdot 0,003375 \cdot \frac{648000''}{\pi},$$

d. i. (wenn  $x = 0,15$ ) von der Ordnung  $0''0042\dots$ , welches für unsern Zweck (nämlich strenger zu prüfen, ob das Intervall  $\Delta x = 0,15$  nicht zu gross sei) unbeachtet bleiben kann. Desgleichen kann die rechte Seite der Gleichung (68) § 22 für die von  $x = 0$  bis  $x = 0,3$  gehenden Intervalle am einfachsten dadurch berechnet werden, dass man die Reihe

$$\frac{d^3 y}{24 \alpha dx^3} = -\frac{0,071}{252} - \frac{2,9609}{19404} x - \dots$$

anwendet; denn die Summe der weggelassenen Glieder dieser Reihe bringt in die rechte Seite der Gleichung (68) ein Glied von der Ordnung

$$2\alpha \cdot \frac{2,9609^2 x^2}{106081,668 - 57453,3036x} \cdot 0,003375,$$

d. i. (wenn man  $x = \frac{0,15 + 0,30}{2}$  setzt) von der Ordnung  $0,00000001\dots$ , welches, da wir zum Behuf der in § 22 beschriebenen Controlle die rechte Seite der Gleichung (68) nur in 6 Bruchstellen brauchen, unbeachtet bleiben kann.

Dagegen reicht man mit den beiden ersten Gliedern der Reihe  $\frac{0,071}{252} + \frac{2,9609}{19404}x + \dots$  bei  $x = 0,30$  nicht

mehr aus um  $\frac{Z}{\alpha}$  in Hundertel-Secunden zu bestimmen; denn die Summe der weggelassenen Glieder giebt in  $\frac{Z}{\alpha}$  ein Glied von der Ordnung

$$\frac{2,9609^2 \cdot 0,30^2}{106081,668 - 57453,3036 \times 0,30} \cdot 0,003375 \cdot \frac{648000''}{\pi},$$

d. i. von der Ordnung  $0''018\dots$  Von  $x = 0,30$  bis  $x = 2,6$  werden also die Gleichungen (101) bis (103) gebraucht, und da hier  $\frac{1}{2}E$  innerhalb der Grenzen  $22^\circ 25' 6''13$  und  $72^\circ 58' 4''05$  eingeschlossen ist, so kann  $\log \cot \frac{1}{2}E$  in 7 Bruchstellen jedesmal durch eine wirklich einfache Interpolation der von Minute zu Minute fortschreitenden Tafeln gefunden werden; denn es lässt sich mit euclidischer Schärfe beweisen, dass dies zwischen den Grenzen  $16^\circ 48'$  und  $73^\circ 12'$  (bei  $\log \sin$  aber erst von  $17^\circ 39'$  an) gestattet ist. In Betreff dieser wirklich einfachen Interpolation ist zu merken, dass die von *Vega* und *Köhler* angesetzten Werthe von  $\frac{\pi}{0,0648} \cdot \frac{d \lg \sin \phi}{d \phi}$  und von  $\frac{\pi}{0,0648} \cdot \frac{d \lg \tg \phi}{d \phi}$  sich allemal auf solche Winkel beziehen, welche durch  $1'$  dividirt  $25''$  zum Rest lassen (ja diese Werthe sind sogar durch endliche Differenzen aus den älteren *Vlacq'schen* Tafeln abgeleitet, indem jedesmal der in 10 Bruchstellen ausgedrückte  $\lg \sin$  (resp.  $\lg \tg$ ) eines durch  $1'$  getheilt  $20''$  zum Rest gehenden Winkels vom  $\lg \sin$  (resp.  $\lg \tg$ ) des um  $10''$  grösseren Winkels subtrahirt wurde), dass aber diese Werthe von  $\frac{\pi}{0,0648} \cdot \frac{d \lg \sin \phi}{d \phi}$  (resp.  $\frac{\pi}{0,0648} \cdot \frac{d \lg \tg \phi}{d \phi}$ ) es nicht sind, welche bei der wirklich einfachen Interpolation gebraucht werden, sondern dass man dafür jedesmal den 60<sup>sten</sup> Theil der endlichen Differenz der Logarithmen der *Sinus* (resp. der Logarithmen der Tangenten) zweier durch  $1'$  theilbarer und sich von einander um  $1'$  unterscheidender Winkel anzuwenden hat; bei dieser Division der endlichen Differenz durch 60 aber leistet dennoch der in der Tafel angesetzte Werth der Diff. pro  $1''$  herrliche Dienste, indem man z. B.  $\lg \cot 22^\circ 25' 6''13$  schnell so findet: Tafelwerth der Diff. pro  $1'' = 59.71$ ; multiplicirt man hier die unmittelbar vor und nach dem Punct stehenden Ziffern 9.7 mit 60, so erhält man eine Zahl, welche sich auf 82 endigt; dagegen findet man, wenn man die beiden letzten Ziffern des in der Tafel stehenden  $\lg \cot 22^\circ 26' = 10.3842066$  von den beiden letzten Ziffern des  $\lg \cot 22^\circ 25' = 10.3845649$  subtrahirt, 83, und diese 83 durch 60 dividirt giebt (anstatt 9.7) 9.7166..., also die anzuwendende Diff. pro  $1'' = 59.7166\dots$ ; diese ist mit 6,13 zu multipliciren; mit 6 multiplicirt, giebt 358.3; mit 0,1 multiplicirt, 5.97166...; mit 0,03 multiplicirt,  $\frac{1}{20\alpha}$  des durch Multiplication mit 6 entstandenen Par-

tial-Products, also 1.7915; also  $\log \cot 22^\circ 25' 6''13 = 10.3845649 - 358.3 - 5.97166\dots - 1.7915 = 10.3845283$ .

Diese Bemerkung über die Genauigkeit der 7<sup>ten</sup> Bruchziffern von  $\log \cot \frac{1}{2}E$  war nöthig, weil die siebenziffrige logarithmische Berechnung der Gleichungen (101) bis (103) sehr sorgfältig geführt werden musste um (für  $x = 0,30$  bis  $x = 2,6$ ) in  $\frac{Z}{\alpha}$  auch nur wenige Decimalen sicher zu

haben. Daher wurden auch die Logarithmen der in den genannten Gleichungen vorkommenden Zahlen

$\frac{2250}{x^3}$	843,75	$\frac{93,75}{M}$	1687,5 <i>M</i>
$\frac{15625}{6x^3}$	976,5625	$\frac{15625}{144M}$	1953,125 <i>M</i>
$\frac{1000}{3x^3}$	125	$\frac{125}{9M}$	250 <i>M</i>

mit Hülfe der in sehr vielen Ziffern bekannten Logarithmen

$$\lg 2 = 0,301029995663981\dots$$

$$\lg 3 = 0,4771212547196\dots$$

$$\lg 5 = 0,698970004336018\dots$$

$$\lg 7 = 0,8450980400142\dots$$

$$\lg 11 = 1,0413926851582\dots$$

$$\lg 13 = 1,1139433523068\dots$$

$$\lg 23 = 1,361727836017\dots$$

so genau bestimmt, dass auch die 7te Bruchziffer überall völlig sicher war, und die Logarithmen von

$$\frac{0,081}{\pi} \quad \frac{7}{\alpha} \quad \frac{0,0405}{\pi} \quad \frac{13}{\alpha} \quad \frac{0,162}{\pi} \quad \frac{3}{\alpha}$$

so, dass 5 Bruchstellen völlig sicher waren. Und damit alle Quellen der Ungenauigkeit möglichst vermindert würden, wurde  $\lg(3-s)$  und  $\lg(\frac{3}{2}-s)$  nicht etwa durch Subtractions-Logarithmen bestimmt, sondern der vorher ohne Hülfe von Logarithmen gefundene Werth von  $s$  wurde von 3 (resp. von  $\frac{3}{2}$ ) subtrahirt, wonach immer noch genug unzweifelhafte Ziffern übrig blieben, um  $\lg(3-s)$  und  $\lg(\frac{3}{2}-s)$  aus siebenziffrigen Tafeln mit genügender Genauigkeit entnehmen zu können.

Was nun den Grad der Zuverlässigkeit des durch siebenziffrige-logarithmische Berechnung der Gleichungen (101) bis (103) und mit Hülfe der *Zech'schen* Tafeln der Additions- und Subtractions-Logarithmen gefundenen jedesmaligen Werthes des von  $x$  abhängigen Theils von  $\frac{Z}{\alpha}$  betrifft, so lehrt

die Ausführung der Rechnung, dass  $\frac{2250}{x^3} + 843,75 \cdot \frac{3-s}{s^3} + \frac{93,75 \cot \frac{1}{2}E}{sM}$  überall  $>$  ist als  $\frac{1687,5 \cot \frac{1}{2}E}{s} \cdot \frac{\frac{3}{2}-s}{s^3} M$  und desto grösser, je kleiner  $x$ ,  $\frac{15625}{6x^3} + 976,5625 \cdot \frac{3-s}{s^3} + \frac{15625 \cot \frac{1}{2}E}{144sM}$

aber überall  $> \frac{1953,125 \cot \frac{1}{2} E}{s} \cdot \frac{9-s}{s^3} M$  und desto grösser,

je kleiner  $x$ ,  $\frac{1000}{3x^3} + 125 \cdot \frac{3-s}{s^3} + \frac{125 \cot \frac{1}{2} E}{9sM}$  aber überall

$> \frac{250 \cot \frac{1}{2} E}{s} \cdot \frac{9-s}{s^3} M$  und desto grösser, je kleiner  $x$ . Und

zwar finden wir für  $x = 0,30$

$$\log \frac{0,081}{\pi} = \frac{5,2701970}{8,4113363} = \frac{3,6815333}{3,6815333}$$

$$\log \frac{0,0405}{\pi} = \frac{3,2308876}{8,1103063} = \frac{1,3411939}{1,3411939}$$

$$\log \frac{0,162}{\pi} = \frac{1,9678352}{8,7123663} = \frac{0,6802015}{0,6802015} \dots \dots \dots (104)$$

Nehmen wir nun wiederum jeden ohne den Gebrauch von Subtractions-Logarithmen gefundenen siebenziffrigen Logarithmus um 0,00000025 zweifelhaft an, so finden wir die Logarithmen derjenigen Grössen, um welche der jedesmalige von  $x$  abhängige Theil von  $\frac{Z}{\alpha}$  zweifelhaft ist, dadurch, dass wir von den Logarithmen (104) überall  $\log (4000000 x) = 6,2398443$  abziehen; das giebt

$$7,4116890. \quad 5,1013496. \quad 4,4403572.$$

Hieraus sehen wir, dass, wenn wir die Gleichungen (101) bis (103) mit Hülfe siebenziffriger Tafeln der Additions- und Subtractions-Logarithmen (und zwar Subtractions-Logarithmen, um den Logarithmus des in Gestalt einer Quadratwurzel geschriebenen Ausdrucks zu finden) berechnen, in den dadurch herausgebrachten Werthen von  $\frac{Z}{\alpha}$  von  $x = 0,30$  bis  $x = 1,50$  die Hundertel-Secunden, von  $x = 1,500$  bis  $x = 2,000$  die Zehntausendtel-Secunden, und von  $x = 2,0$  bis  $x = 2,6$  die Hunderttausendtel-Secunden sicher sind; (wir haben jedoch nur Zehntausendtel-Secunden beibehalten, weil wir, nachdem wir einmal den Logarithmus des in Gestalt einer Quadratwurzel geschriebenen Ausdrucks gefunden, nur noch fünfziffrige Logarithmen-Tafeln anwandten, diese aber nur 4 geltende Ziffern zuverlässig geben, wenn die Mantisse  $> 63778$  ist). Wir fanden.

$$\log \left( \frac{2250}{x^3} + 843,75 \cdot \frac{3-s}{s^3} + \frac{93,75 \cot \frac{1}{2} E}{sM} \right) = 5,2701970,$$

für  $x = 1,500$  aber

$$\log \left( \frac{15625}{6x^3} + 976,5625 \cdot \frac{3-s}{s^3} + \frac{15625 \cot \frac{1}{2} E}{144sM} \right) = 3,2308876.$$

und für  $x = 2,0$

$$\log \left( \frac{1000}{3x^3} + 125 \cdot \frac{3-s}{s^3} + \frac{125 \cot \frac{1}{2} E}{9sM} \right) = 1,9678352;$$

$x$	$\frac{Z}{\alpha}$	$\Delta^1$	$\Delta^2$	$x$	$\frac{Z}{\alpha}$	$\Delta^1$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
0,00	0''61			1,500	0''6778	+286			
0,15	0,63	+2	0	1,625	0,7064	+326	+40		
0,30	0,65	+2	0	1,750	0,7390	+370	+44	+4	+6
0,45	0,67	+2	0	1,875	0,7760	+424	+54	+10	
0,60	0,69	+2	+1	2,000	0,8184				
0,75	0,72	+3	0	2,0	0,5777				
0,90	0,75	+3	0	2,1	0,5973	+196			
1,05	0,78	+3	+1	2,2	0,6194	+221	+25		
1,20	0,82	+4	+1	2,3	0,6442	+248	+27	+2	+4
1,35	0,87	+5	+1	2,4	0,6723	+281	+33	+4	-2
1,50	0,92	+5	0	2,5	0,7041	+318	+37	+8	+4
				2,6	0,7404	+363	+45		

und (indem wir zwischen den zu zwei unmittelbar auf einander folgenden Argumenten gehörigen Logarithmen der in Gestalt von Quadratwurzeln geschriebenen Ausdrücke jedesmal, wie in § 22, das arithmetische Mittel nahmen) folgende Controlle zwischen den Einheiten der 6<sup>ten</sup> Bruchstelle auf beiden Seiten der Gleichung (68) § 22:

$x$	$x$	$x$
0,00	1,500	2,0
0,15	1,625	2,1
0,30	1,750	2,2
0,45	1,875	2,3
0,60	2,000	2,4
0,75		2,5
0,90		2,6
1,05		
1,20		
1,35		
1,50		

So haben wir durchgehends genügende Controllen und, da alle 23 Werthe von  $\frac{Z}{\alpha}$  merklich unter einer Secunde bleiben, einen strengeren Beweis der Ausreichendheit folgender

*Tabula lapsuum ellipticorum* für mittlere Anomalien, welche nicht grösser als  $\frac{5}{8}\pi$  sind.

$x = \frac{\sqrt[5]{\frac{9}{2}k^2\mu t^2}}{a}$	$y = \lg \frac{r}{\sqrt[5]{\frac{9}{2}k^2\mu t^2}}$	$\frac{dy}{dx}$	Diff.	$\frac{r}{a}$	Diff.	$\log \frac{r}{a}$
0,00	0,000000	-0,04343	-124	0,000000	+147735	8,871781.
0,15	9,993393.	-0,04467	-132	0,147735	+143146	9,342201.
0,30	9,986594.	-0,04599	-140	0,290881	+138463	9,557151.
0,45	9,979593.	-0,04739	-148	0,429344	+133680	9,696172.
0,60	9,972376.	-0,04887	-156	0,563024	+128792	9,797986.
0,75	9,964930.	-0,05043	-168	0,691816	+123794	9,877570.
0,90	9,957240.	-0,05211	-178	0,815610	+118677	9,942303.
1,05	9,949291.	-0,05389	-192	0,934287	+113437	9,996367.
1,20	9,941066.	-0,05581	-204	1,047724	+108059	0,042353
1,35	9,932543.	-0,05785	-221	1,155783	+102541	0,081978
1,50	9,923701.	-0,06006	-196	1,258324	+ 81125	0,113738
1,625	9,916073.	-0,06202	-209	1,339449	+ 77092	0,139408
1,750	9,908191.	-0,06411	-224	1,416541	+ 72958	0,162428
1,875	9,900039.	-0,06635	-239	1,489499	+ 68716	0,183097
2,0	9,891597.	-0,06874	-204	1,558215	+ 51843	0,199889
2,1	9,884622.	-0,07078	-216	1,610058	+ 48992	0,213495
2,2	9,877437.	-0,07294	-230	1,659050	+ 46077	0,225944
2,3	9,870029.	-0,07524	-244	1,705127	+ 43090	0,237305
2,4	9,862384.	-0,07768	-260	1,748217	+ 40029	0,247634
2,5	9,854487.	-0,08028	-278	1,788246	+ 36890	0,256979
2,6	9,846322.	-0,08306		1,825136		

## § 39.

In dieser Tafel ist wiederum die Columnne für  $\frac{r}{a}$  nur deswegen hinzugefügt, um die leichteste Auflösung der Aufgabe zu gewähren, aus dem gegebenen  $r$  das zugehörige  $t$  zu finden; und aus demselben Grunde wie in der Tafel am Schluss des 11<sup>ten</sup> § ist auch hier  $\log \frac{r}{a}$  für  $x =$

0,075	0,225	0,375	. . .	1,425
1,5625	1,6875	1,8125	. . .	1,9375
2,05	2,15	2,25	. . .	2,55

hinzugefügt, und zwar vermittelt der auf Vernachlässigung von  $\frac{d^3y}{dx^3}$  gegründeten Formel

$$\log \frac{r}{a} = \log x + \frac{y+y'}{2} - \frac{1}{8} \Delta x \Delta \frac{dy}{dx}$$

berechnet, worin  $y$ ,  $y'$  und  $\Delta \frac{dy}{dx}$  dieselbe Bedeutung wie in

§ 12 haben. Die gefundenen Werthe von  $\log \frac{r}{a}$  wurden der Summen-Controlle unterworfen; ihre Summe muss (wenn man von den 21 Tafelwerthen von  $-\frac{dy}{dx}$  den ersten und den letzten und die beiden beim Uebergang von  $\Delta x = 0,15$  zu  $\Delta x = 0,125$  und von  $\Delta x = 0,125$  zu  $\Delta x = 0,1$  stattfindenden herausgreift) gleich sein

$$\log \frac{7^3 \cdot 9^{10} \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47}{8 \cdot 160^{11}} + \text{der Summe der Tafelwerthe von } y \text{ (wenn der letzte nur zur Hälfte angesetzt wird),} + \frac{0,06006 + 0,06874 + 4 \times 0,08306 - 6 \times 0,04343}{320};$$

wir erhalten auf diesem Wege (indem wir

$$7^3 \cdot 9^{10} \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47$$

$$\text{in } 343.3486784401.143.289.17081.82861$$

= 3486784401.14175161.1415348741 zusammenziehen, und die Rechnung

$$\begin{aligned} \lg 3486784401 &= 9,5424251 \\ \lg 14175161 &= 7,1515280 \\ \lg 1415348741 &= 9,1508635 \\ \lg 8 &= 0,9030900 \\ 11 \lg 160 &= 24,2453200 \\ &= 0,6964066 \end{aligned}$$

vollziehen) die identische Gleichung

$$9,185779. = 0,6964066 + 8,488747. + \frac{0,20046}{320} = 9,185780.$$

Wir unterlassen es Kürze halber, den Gebrauch dieser Tafel an Beispielen zu erläutern, indem die ganze Einrichtung derselben, sowohl für den Fall, wenn  $t$  gegeben ist und  $r$  gesucht wird, als wenn  $r$  gegeben ist und  $t$  gesucht wird, sehr ähnlich ist der Einrichtung der Tafel zu Ende des 11<sup>ten</sup> §, der Unterschied aber nur darin besteht, dass an die Stelle der Controlle

$$\tau = \sqrt{s(2+s)} - \lg nat(1+s + \sqrt{s(2+s)})$$

die Controlle

$$\sin \frac{1}{2} E = \sqrt{\frac{s}{2}},$$

$$M = E - \sin E$$

(bei sehr kleinem  $E$  aber  $M = \frac{E^3}{1.2.3} - \frac{E^5}{1.2.3.4.5} + \dots$ ) tritt.

Spandau, den 27. Juni 1856.

W. Lehmann.