Ueber Discriminanten und Resultanten der Gleichungen für Singularitäten von algebraischen Raumcurven, mit Anwendungen auf Realitätsverhältnisse.

Von

FRANZ MEYER in Clausthal.

Das Nachfolgende stellt einen Auszug dar aus einer grösseren, unter gleichem Titel demnächst in den „Wiener Monatsheften für Mathematik und Physik“ erscheinenden Abhandlung.

Die Natur der Singularitäten von ebenen, wie räumlichen Curven bringt es mit sich, dass in den weitaus meisten Fällen das Zusammenrücken irgend zweier singulären Elemente auf der Curve zugleich dasjenige von wenigstens noch einem weiteren singulären Elemente bedingt.

Dieser Umstand findet seinen algebraischen Ausdruck darin, dass die Discriminanten und Resultanten der algebraischen Gleichungen, von denen die einfachsten Singularitäten einer algebraischen Curve abhängen, in mannigfaltiger Weise irreducible Factoren resp. Potenzen von solchen mit einander gemein haben. Die Natur und Anzahl derartiger Factoren ändert sich mit dem jeweils ausgezeichneten Rationalitätsbereiche.

Es handelt sich hier um Raumcurven*). Um mit den einfachsten Mitteln zu operiren, werden zunächst rationale Raumcurven der Rechnung zu Grunde gelegt.

Es hat das zur Folge, dass irgend eine Gruppe von Punkten, resp. Tangenten resp. Osculationsebenen der Curve durch Nullsetzen einer binären Form darstellbar ist.

Handelt es sich dann weiterhin um Vorgänge, welche sich in der Umgebung singulärer Stellen der Curven abspielen, so lassen sich die vorerst für rationale Curven gewonnenen Ergebnisse auf beliebige, algebraische oder analytische Raumcurven übertragen.

*) Vgl. die Mittheilungen in den Göttinger Nachrichten 1890 Nr. 10, 15; 1891 Nr. 1, 2. Die ebenen Curven sind ausführlich in diesen Annalen Bd. XXXVIII bearbeitet worden.

Die rationale Raumcurve R wird als allgemeine Ordnungscurve gegeben gedacht; die vierreihigen Determinanten δ , welche sich aus den Coefficienten der vier, die homogenen Coordinaten eines Curvenpunktes darstellenden ganzen Functionen $f_i(\lambda)$ einer Veränderlichen λ bilden lassen, sind die Elemente des Rationalitätsbereiches für die (binären) invarianten Bildungen der Curve.

Zunächst werden die, den fünf Singularitäten „erster Art“ zugehörigen „Singularitätenformen“ aufgestellt.

Um die Singularitäten „zweiter Art“ zu beherrschen, d. s. die nur eine einzige Bedingung zwischen den δ erheischenden Coincidenzen irgend zweier Singularitäten der ersten Art, wird vor Allem, unter Aufbietung verschiedenartiger Hilfsmittel, die schwierige Aufgabe gelöst, die fünf Discriminanten und zehn Resultanten der fünf Singularitätenformen in Elementarfactoren zu zerspalten, welche im Rationalitätsbereiche der δ irreducibel sind.

Etwaige Einwände gegen die Sicherheit der so gewonnenen Ergebnisse werden auf Grund einer eigenthümlichen Abbildung auf eine Hülfebene, unter Heranziehung einfacher Realitätserwägungen zerstreut.

Die erhaltenen Resultate erlauben eine tiefere Einsicht in das Zustandekommen der Singularitäten zweiter Art aus denen erster Art; insonderheit erkennt man, mit welch' verschiedenartiger Geschwindigkeit die letzteren hierbei zusammenrücken.

Hieran schliesst sich die Untersuchung der damit verknüpften Realitätsvorgänge; es handelt sich dabei um Feststellung des Vorzeichens der Discriminante gewisser quadratischer Formen.

Der von Hrn. Klein entdeckten „Realitätsgleichung“ für ebene Curven lässt sich hier für Raumcurven nur eine „Realitätscongruenz mod. 4“ gegenüberstellen; indessen ist die Existenz einer derartigen Gleichung, selbst bei Mitberücksichtigung von „Linien“- und „Ebenen-Singularitäten“, überhaupt unwahrscheinlich.

Im nächst höheren Raume lehrt hingegen ein einfaches Beispiel, dass solche Gleichungen wiederum bestehen müssen, und zwar, wie in der Ebene (und allgemein in Räumen gerader Dimension) in grosser Mannigfaltigkeit.

§ 1.

Die Grade der Discriminanten und Resultanten von den fünf Singularitätenformen.

1. Vermöge eines einfachen Classificationsprincips gelangt man zu folgenden fünf, in endlicher Anzahl vorhandenen Ordnungssingularitäten erster Art einer (rationalen) Raumcurve R .

1) Ebenen „ α^4 “, welche an einer Stelle α von R vier consecutive

Punkte mit der Curve gemein haben, „stationäre“ oder „Hyperosculation“-Ebenen genannt.

2) Ebenen „ $\alpha^3\beta^2$ “ welche R an einer Stelle α osculiren und zugleich an einer andern Stelle β berühren: sie mögen „Schmiegungsberührebene“ heissen.

3. Ebenen „ $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ “ oder „Tritangentialebenen“, welche an drei getrennten Stellen α , β , γ berühren.

4) Gerade „ $(\alpha^2\beta)$ “ oder „Trefftangente“, welche R in α berühren und zudem noch in β treffen.

5) Gerade „ $(\alpha\beta\gamma\delta)$ “, oder „Quadriseccanten“, welche der Curve an vier getrennten Stellen α , β , γ , δ begegnen.

Betreffs der Bezeichnung ist nur hinzuzufügen, dass singuläre Ebenen ohne Klammer, singuläre Geraden mit einer einfachen, endlich singuläre Punkte — z. B. ein wirklicher Doppelpunkt $((\alpha\beta))$ — mit einer doppelten Klammer versehen werden. Die aufgezählten fünf Singularitäten erster Art entsprechen je in doppelter Art den drei Ordnungssingularitäten erster Art einer ebenen Curve. Den Wendetangenten „ α^3 “ der Ebene stehen hier gegenüber die Ebenen α^4 und $\alpha^3\beta^2$, den Doppeltangenten „ $\alpha^2\beta^2$ “ die Ebenen $\alpha^3\beta^2$ und $\alpha^2\beta^2\gamma^2$, endlich den Doppelpunkten $(\alpha\beta)$ die Geraden $(\alpha^2\beta)$ und $(\alpha\beta\gamma\delta)$.

2. Man wird die fünf Singularitäten erster Art algebraisch festlegen, indem man diejenigen Binärformen einer nicht homogenen Veränderlichen α , die „Singularitätenformen“ aufsucht, welche, gleich Null gesetzt, die jeweils an erster Stelle aufgeführten Argumente α zu Wurzeln haben.

Es geschieht dies mittels geeigneter Eliminationen, unter Bezugnahme auf früher für ebene Curven erlangte Resultate. Die am Ende aufgeführte Tabelle I zeigt für jede der Singularitätenformen sowohl den Grad in α an, wie auch den Grad hinsichtlich der, homogen eingehenden, Determinanten δ . Dabei ist eine jede der fünf Formen durch eine eckige Klammer angedeutet. Daraus lässt sich sofort eine zweite Tabelle herleiten, welche für die bez. α gebildeten Discriminanten und Resultanten der fünf Singularitätenformen den Grad in den δ erkennen lässt.

§ II.

Die Zerfällung der sechs Discriminanten und Resultanten der ersten drei Singularitätenformen in Elementarfactoren.

3. Es kommt nunmehr darauf an, die fünfzehn, in der Tabelle II verzeichneten Invarianten der Curve R in Elementarfactoren zu zerpalten, welche im Bereiche der δ irreducibel sind.

Es ist von Vortheil, zu dem Behuf erst eine möglichst grosse

Anzahl solcher Elementarfactoren, wenigstens hinsichtlich ihres Grades und ihrer Bedeutung, ausfindig zu machen. Die gemeinten Factoren ordnen sich dabei von selbst in drei Classen ein. Die erste Classe umfasst diejenigen, welche sich durch directe Elimination aus den Formen $f(\lambda)$ resp. deren conjugirten, isolirt darstellen lassen; bei der zweiten Classe sind die erforderlichen Eliminationsprocesse, wofern man nicht erst fremde Factoren ausscheiden will, erst nach Einführung von gewissen Hilfsveränderlichen ausführbar; die Individuen der letzten Classe werden indirect aus bereits gefundenen Zerlegungen bestimmt.

4. Zur ersten Classe gehören die Elementarfactoren (vgl. Tabelle III)

$$[\alpha^5], [\alpha^4\beta^2], [\alpha^3\beta^3], [\alpha^3\beta^2\gamma^2], [\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2], [(\alpha^3)], [(\alpha^2\beta\gamma)].$$

Es sind die linken Seiten der — in reducirter Form gedachten — Bedingungsgleichungen für das Eintreten der jeweils in der eckigen Klammer angedeuteten Singularität zweiter Art. So z. B. ist

$$[\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2] = 0$$

das Criterium für die Existenz einer viermal berührenden Ebene, $[(\alpha^3)] = 0$ für die Existenz einer stationären Tangente u. s. f.

Will man hier etwa den Ausdruck $[\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]$ erhalten, so hat man, wenn $\varphi(\lambda) = \varphi_n^n$ irgend eine der zu den $f(\lambda)$ conjugirten Formen, und n die Ordnung der Curve R bedeutet, aus den $n - 3$ Gleichungen:

$$\varphi \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \delta^2 \lambda_9 \lambda_{10} \dots \lambda_n = 0$$

die Argumente $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda_9, \lambda_{10}, \dots \lambda_n$ zu eliminiren.

5. Wir kommen zu den Factoren der zweiten Classe. Das gemeinte Hilfsprincip läuft, geometrisch gesprochen, darauf hinaus, die vorliegende Curve n^{ter} Ordnung $R = R_n^3$ als Projection einer im nächst höheren Raum gelegenen Curve R_n^4 anzusehen.

Greift man nämlich aus der Schaar der Formen φ irgend eine — etwa φ_1 , mit den Coefficienten φ_{1i} — heraus, so lassen sich diese Grössen φ_{1i} auffassen als polyedrale Coordinaten eines in der nächst höheren, vierfach ausgedehnten linearen Mannigfaltigkeit M_4 befindlichen Punktes P , von dem aus die gegebene R_n^3 als Projection einer R_n^4 erscheint. Die R_n^4 , oder vielmehr die Gesammtheit der mit ihr projectivisch verwandten Curven, ist durch die Schaar der $n - 4$ übrigen Formen $\varphi_2, \varphi_3, \dots \varphi_{n-3}$ eindeutig bestimmt.

Hat man jetzt eine Invariante $J = J(\delta)$ der R_n^3 , vom ν^{ten} Grade in den δ , so betrachte man dieselbe als eine homogene Form ν^{ten} Grades der Coordinaten φ_{1i} von P . Die Gleichung $J = 0$ stellt dann geometrisch eine dreifach ausgedehnte $M_3^{(\nu)}$ ν^{ter} Ordnung innerhalb der M_4 dar, als Ort derjenigen Punkte P , von denen aus die R_n^4 in eine R_n^3 mit verschwindendem J projectirt wird.

Will man jetzt umgekehrt den Grad ν einer Invariante $J = J(\delta')$ ermitteln, deren Verschwinden eine bekannte geometrische Bedeutung für die Curve R_n^3 besitzt, so wird man in der M_4 mit liniengeometrischen Mitteln die Anzahl ν der Schnittpunkte der in Rede stehenden M_3 mit einer beliebigen Geraden bestimmen.

Algebraisch heisst das, die Coefficienten φ_{1i} durch lineare Verbindungen $\varphi_{1i} + \kappa \psi_{1i}$ ersetzen, womit die Grössen δ gleichfalls in solche von der Gestalt $\delta + \kappa \delta'$ übergehen, und $J(\delta) = 0$ in eine Gleichung $J(\delta + \kappa \delta') = 0$ ν ter Ordnung in κ , deren Wurzeln gerade den eben erwähnten ν Schnittpunkten der M_3 mit einer Geraden entsprechen.

Ein typisches Beispiel für die in Rede stehende Methode wird geboten durch den Fall einer Trefftangente $(\alpha^2 \beta)$, wenn die Argumente α, β noch durch irgend eine algebraische Beziehung $\Phi(\alpha^{\mu_1}, \beta^{\mu_2}) = 0$ an einander geknüpft sind, wo μ_1, μ_2 die Grade von Φ in α, β bedeuten.

Man verschaffe sich vorderhand die „Ebenenkoordinaten“ p_{ik} einer, die R_n^3 in α berührenden und ausserdem in β treffenden „Ebene“ $p = (\alpha^2 \beta)$. Es sind das die durch $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$ dividirten dreireihigen Determinanten der $f_i(\alpha), f_i(\beta), f_i(\gamma)$ ($i = 1, 2 \dots 5$), wenn man hinterher noch γ gleich α macht, also ganze Functionen von α, β von den resp. Graden $2(n-2), n-2$.

Damit eine Gerade q mit den Coordinaten q_{mn} ($m, n = 1, 2, \dots 5$) einer Ebene p in einem Punkte begegne, ist die Erfüllung der Bedingung $\sum p_{ik} q_{mn} = 0$ nothwendig und hinreichend. Substituirt man hier für die p ihre Werthe in Function der α, β , so resultirt eine Gleichung zwischen α und β , wiederum von den Graden $2(n-2), n-2$, deren Combinirung mit der Beziehung $\Phi(\alpha^{\mu_1}, \beta^{\mu_2}) = 0$ nach der Bézout'schen Regel $(n-2)(\mu_1 + 2\mu_2)$ gemeinsame Werthepaare liefert. Man hat somit das Ergebniss:

„Zählt jede q treffende Ebene p einfach, so ist die Ordnung ν der von den Ebenen p erfüllten $M_3^{(\nu)}$ gleich $(n-2)(\mu_1 + 2\mu_2)$; zählt dieselbe dagegen etwa r -fach, so ist der angegebene Werth von ν durch r zu theilen.“

Hiernach sind die Grade der folgenden Elementarfactoren (vgl. Tabelle III) ermittelt worden:

$$[\alpha^4, (\alpha^2 \beta)], [\alpha^3 \beta^2, (\alpha^2 \beta)], [\alpha^3 \gamma^2, (\alpha^2 \beta)], [\alpha^2 \beta^2 \gamma^2, (\alpha^2 \beta)], [\alpha^2 \gamma^2 \delta^2, (\alpha^2 \beta)],$$

$$[\alpha^2 \beta^2 \gamma^2, (\alpha \beta \gamma)], [(\alpha \beta \gamma \delta \epsilon)], [((\alpha \beta))].$$

Unter diesen macht der vorletzte, der Existenz einer, die Curve R fünfmal treffenden Sehne entsprechende, eine eingehende Untersuchung erforderlich.

6. Die noch ausstehenden Elementarfactoren der dritten Classe lassen sich, wie weiterhin vermöge des Hilfsmittels der Correspondenzen hervorgeht, von jeweils verwandten algebraisch gar nicht trennen.

Das bisher gewonnene Material reicht indessen zunächst aus, um die Zerlegungen von den Discriminanten und Resultanten der drei ersten Singularitätenformen $[\alpha^4]$, $[\alpha^3\beta^2]$, $[(\alpha^2\beta)]$ vollständig auszuführen.

Man kennt nämlich aus geometrischen Gründen a priori die Bedeutung der einzelnen Elementarfactoren*), welche den bezeichneten Bildungen zugehören. Die Aufgabe reducirt sich damit auf die Ermittlung der Exponenten, mit welchen die einzelnen Factoren behaftet sind. Diese Exponenten sind ganze positive Zahlen, ausgenommen den Factor $[(\alpha^3)]$, wo der bez. Exponent in einigen Fällen ein rationales Vielfaches einer von vornherein bekannten ganzen Function von n ist.

Durch Vergleichung der Grade linker und rechter Hand ergeben sich in n identische Relationen: dieselben sind jedesmal mit genau so vielen diophantischen Bestimmungsgleichungen für die unbekannten Exponentenzahlen äquivalent, dass für eben diese Zahlen jeweils nur eine einzige brauchbare Lösung resultirt. Auf diese Weise sind die Zerlegungen für die ersten drei Discriminanten und für die ersten drei Resultanten der Tabelle II gewonnen worden.

§ III.

Die Discriminanten- und Resultanten-Correspondenzen. Zerlegungen der noch übrigen Discriminanten und Resultanten. Abbildung auf eine Hülfebene.

7. Es ist noch der Ergänzungsbeweis dafür zu erbringen, dass bei den soeben besprochenen sechs Zerlegungen kein Elementarfactor ausgelassen ist. Dazu dienen gewisse Chasles'sche Correspondenzen im Raume der R_n^4 , deren Coincidenzen die einzelnen Zerlegungsfactoren, jeden gerade mit seiner Vielfachheit, widerspiegeln. In einzelnen Fällen muss die geometrische Abzählung durch algebraische Rechnung gestützt werden.

Das Princip des Beweises ist, dass zunächst gezeigt wird, dass die Vielfachheiten der einzelnen Factoren mindestens so hoch sein müssen, als es die oben gefundenen Exponenten anzeigen. Daraus folgt dann ohne Weiteres die völlige Uebereinstimmung der beiderlei Anzahlen.

*) Die Irreducibilität dieser, wie der weiteren Elementarfactoren, folgt mit Sicherheit aus der Verbindung der beiden, weiter unten besprochenen Methoden der Correspondenzen und der Abbildung.

8. Zu dem Zwecke greife man auf Nr. 5 zurück. Eine Gleichung $J(\delta) = 0$ wurde durch eine $M_3^{(v)}$ im Raume der R_n^4 geometrisch realisirt. Den v Schnittpunkten der $M_3^{(v)}$ mit einer Geraden g entsprachen die v Wurzeln von $J(\delta + \kappa\delta') = 0$, wo die $\delta + \kappa\delta'$ aus den δ durch Substitution eines Formenbüschels $\varphi_1 + \kappa\psi_1$ an Stelle einer der Formen $\varphi = \varphi_1$ entstanden. Die Coefficienten von $\varphi_1 + \kappa\psi_1$ waren die Coordinaten eines Punktes der Geraden g , den man mit $P(\kappa)$ bezeichnen kann.

Versteht man jetzt unter J eine unserer Discriminanten oder Resultanten, so erweist es sich als zweckmässig, die Substitution der $\delta + \kappa\delta'$ an Stelle der δ bereits in den Singularitätenformen selbst zu vollziehen; hierdurch geben dieselben, als Functionen von α und κ , eben vermöge ihrer Discriminanten und Resultanten zu Correspondenzen Anlass, welche man sowohl im Gebiete der Variablen α d. i. auf der Curve R_n^4 , wie im Gebiete der Variablen κ d. i. auf der Geraden g hinsichtlich ihrer Coincidenzen verfolgen kann. Wenden wir das etwa an auf die Resultanten der beiden Gleichungen:

$$[\alpha^4](\alpha, \kappa) = 0, \quad [\alpha^3\beta^2](\alpha, \kappa) = 0,$$

wo die Argumente α, κ in runder Klammer beigelegt sind.

Je nachdem man α oder κ eliminirt, gelangt man zu einer der beiden Resultanten

$$R_\alpha(\kappa) = R_\alpha, \quad R_\kappa(\alpha) = R_\kappa.$$

Setzt man in $R_\alpha(\kappa)$ κ gleich Null, so gelangt man zu der früher behandelten Resultante zurück.

Die Wurzeln der beiden Gleichungen $R_\alpha = 0$, $R_\kappa = 0$ sind einander eindeutig zugeordnet, sodass aus einer bekannten Zerlegung von R_α sofort auf diejenige von R_κ u. umg. geschlossen werden kann.

9. Um die gemeinten Correspondenzen algebraisch aufzustellen, nehme man in einer der beiden Gleichungen $[\alpha^4] = 0$, $[\alpha^3\beta^2] = 0$ für eine der beiden Variablen, etwa α , einen beliebigen Werth an, setze irgend einen der dadurch bestimmten Werthe κ in die zweite Gleichung ein, und ordne die sämmtlichen, hierdurch wiederum bestimmten Werthe $\alpha = \alpha_i$, dem ursprünglich angenommenen Werthe α zu u. umg. Die Coincidenzstellen dieser beiden Correspondenzen sind eben die Wurzeln von $R_\kappa = 0$, resp. $R_\alpha = 0$.

Werden die Correspondenzen geometrisch im Raume der R_4 construirt, so lassen sich durch unmittelbare Anschauung untere Grenzen für die Vielfachheiten der einzelnen Classen von Coincidenzen ablesen.

In der That, man gehe aus von irgend einer linearen M_3 : „ α^4 “ der R_n^4 , welche die Gerade g in einem Punkte $P(\kappa)$ schneide. Von P gehen $6(n-3)(n-4)$ lineare M_3 : „ $\alpha_1^3\beta^2$ “ an die Curve. Umgekehrt schneiden sich in einer Ebene (α_1^3) $2(n-4)$ noch einmal

berührende „ $\alpha_1^3 \beta^2$ “. Heisst einer der Treffpunkte auf q : $Q(x_1)$, so passirt durch Q wiederum eine Gruppe von $4(n-3)$: „ α^4 “.

Damit ist sowohl die Correspondenz zwischen α und α_1 , wie zwischen x und x_1 festgelegt.

Man erkennt sofort drei Classen von Coincidenzen, welche der Reihe nach durch die $3(n-2)$ Ebenen (α^3), welche q treffen, durch die $8(n-4)(n-5)$ Gebilde „ $\alpha^4 \beta^2$ “ und durch die $5(n-4)$ „ α^5 “ veranlasst werden, sowie, dass die dreierlei Vielfachheiten der Coincidenzen resp. die Zahlen $2(n-4)$, 1, 2 zu einer unteren Grenze haben. Das waren aber gerade die Exponenten der bezüglichen Zerlegungsformel.

10. Ein entsprechendes Verfahren ist für die Discriminanten einzuschlagen. Wählen wir hier als Beispiel die Singularitätenform $[\alpha^3 \beta^2](\alpha, x)$, und bezeichnen die beiden Discriminanten mit $D_\alpha(x) = D_\alpha$, $D_x(\alpha) = D_x$, so werden die Zerlegungen der Formen D_α , D_x wiederum durch die Coincidenzen zweier Correspondenzen geliefert, die jetzt aber wesentlich verschieden von einander sind. Die rationalen Factoren von D_α und D_x sind bekanntlich von zweierlei Art, wesentliche und ausserwesentliche. Die ersteren beziehen sich auf die Verzweigungen des vorliegenden algebraischen Gebildes $(\alpha, x) = 0$, die letzteren auf die eigentlichen Singularitäten desselben.

Für den zunächst vorliegenden Zweck würde die Betrachtung der mit der Zerlegung von D_α verbundenen Correspondenz genügen; behufs weiterer Controlle und besonders mit Rücksicht auf die späteren Realitätsuntersuchungen wird auch D_x herangezogen. Was die geometrische Construction angeht, so werde etwa die zu D_α gehörige Correspondenz realisirt.

Durch irgend eine Ebene (α^3) lassen sich $2(n-4)$, noch einmal R_n^4 berührende lineare M_3 : „ $\alpha^3 \beta^2$ “ legen. Durch irgend einen der Schnittpunkte P mit q gehen dann noch $6(n-3)(n-4) - 1$ weitere „ $\alpha_1^3 \beta^2$ “. In gleicher Weise gelangt man von α_1 zu α zurück. Die Anzahl der Coincidenzen ist gleich dem Grade von D_α in x ; die Wurzeln der einzelnen Elementarfactoren von D_α sind gerade durch diejenigen Stellen $x = x_1$ auf q repräsentirt, welche den bezüglichen Coincidenzstellen $\alpha = \alpha_1$ unserer Correspondenz eindeutig zugeordnet sind. Auf die Aufzählung der verschiedenen Classen von Coincidenzen, sowie auf die Darstellung der im Einzelnen noch benöthigten Controllen soll hier nicht eingegangen werden.

11. Die Methode der Correspondenzen führt nun auch zu den noch übrigen Zerlegungen von Discriminanten und Resultanten, bei denen die in Nr. 6 geschilderte Methode der diophantischen Gleichungen immer da versagt, wo der Grad wenigstens eines Elementarfactors direct nicht mehr bestimmbar ist.

Auch hier muss im Uebrigen auf die Auseinandersetzung der

weiteren Hilfsmittel verzichtet werden, die für die Vollständigkeit der erhaltenen Formeln (vgl. Tabelle II) Gewähr leisten.

12. Es genüge, in dieser Hinsicht auf ein geometrisches Verfahren hinzuweisen, welches die gegenseitigen Beziehungen zwischen den Singularitätenformen in's Licht setzt.

Denkt man sich diese Formen, wie in Nr. 8, in den zwei Variablen α und κ gebildet, und dann gleich Null gesetzt, so kann man sie in einer Bildebene, in der α und κ Cartesische Coordinaten bedeuten, durch fünf algebraische Curven $S_1, S_2, \dots, S_5$ darstellen. Die Curven S besitzen im Unendlichen nur auf der α - und κ -Axe gewisse, sofort angebbare vielfache Punkte, verlaufen sonst aber im Endlichen.

Die Gleichungen $D_\alpha(\kappa) = 0$ liefern die zur α -Axe parallelen Tangenten der Curven, ebenso $D_\kappa(\alpha) = 0$ die zur κ -Axe parallelen, endlich $R_\alpha(\kappa) = 0$, $R_\kappa(\alpha) = 0$ die Coordinaten der gemeinsamen Schnittpunkte von je zweien der Curven S .

Handelt es sich nun z. B. um die Vielfachheit des Factors $[\alpha^3\beta^3]$ bei der Discriminante der Singularitätenform $[\alpha^3\beta^2]$, so zeigt sich, dass die Curve, dem Vorkommen der Coincidenz $[\alpha^3\beta^3] = 0$ entsprechend, jedesmal zwei getrennte zweifache Punkte besitzt, deren Verbindungslinie in die α -Richtung fällt, und deren Tangenten im Allgemeinen keiner der beiden Coordinatenachsen parallel laufen. Es bleibt nur noch zu entscheiden, ob die zweifachen Punkte Doppel- oder Rückkehrpunkte sind. Das erledigt sich durch eine einfache Realitätsbetrachtung, indem man, geometrisch gesprochen, die Verbindungslinie der beiden zweifachen Punkte, unendlich wenig parallel mit sich verschiebt und nunmehr auf die Realität resp. Nicht-Realität der beiden dadurch auseinander tretenden Schnittpunkte achtet.

In der That sind die gemeinten Punkte Rückkehrpunkte, und daher die Vielfachheit des Factors $[\alpha^3\beta^3]$ in der Discriminante von $[\alpha^3\beta^2]$ nicht 2 . 2, sondern 3 . 2.

13. Hinsichtlich der Gesetzmässigkeiten für die Grad- und Gewichts-Anzahlen der einzelnen Elementarfactors sei der Kürze halber auf die Tabelle III selbst verwiesen.

Auch die Analogien mit Zerlegungen in höheren Räumen, welche eine Reihe von specifischen Besonderheiten der ebenen und räumlichen erst in's wahre Licht rücken, seien hier unterdrückt.

§ IV.

Entstehung zusammengesetzter Singularitäten aus einfachen.

Realitätsvorgänge. Realitätscongruenz.

14. Das Verschwinden eines einzelnen Elementarfactors bedeutete, dass wenigstens zwei singuläre Elemente erster Art zu einem nächst höheren zusammenrücken.

Es ist von Interesse, zu erkennen, in welcher Art und Weise sich ein derartiges Zusammenrücken in den verschiedenen Fällen vollzieht.

Es wird dazu ein Verfahren der Reihenentwicklung eingeschlagen, welches in leichteren Fällen einen neuen Beweis für die Vielfachheit der bezüglichen Elementarfactoren in den Zerlegungsformeln liefert; umgekehrt werden indessen die letzteren stets eine vollständige Controlle bieten, sodass durch die vereinigte Wirkung beider Hilfsmittel eine ausreichende Einsicht in die gemeinten Vorgänge ermöglicht wird.

15. Es mag genügen, wenn wir uns an einem Beispiele erläutern. Anstatt den Factor $[\alpha^5]$ allgemein zu berechnen, also das Criterium für das Eintreten einer Ebene α^5 überhaupt, lege man dem Argumente α den canonischen Werth Null bei und frage vorab nach den Bedingungen dafür, dass die Curve R_{α}^3 gerade an der Stelle Null die gemeinte Singularität aufweist. Hierbei dürfen wir uns noch auf die Curve niedrigster — also hier der fünften Ordnung — beschränken, bei welcher die Singularität zuerst auftritt.

Zu einer R_5^3 gehören zwei Formen φ , sagen wir:

$$\begin{cases} \varphi_{\alpha}^5 = \varphi_0 + 5\varphi_1\alpha + 10\varphi_2\alpha^2 + \dots, \\ \psi_{\alpha}^5 = \psi_0 + 5\psi_1\alpha + 10\psi_2\alpha^2 + \dots \end{cases}$$

Setzt man

$$\pi_{ix} = \begin{vmatrix} \varphi_i & \varphi_x \\ \psi_i & \psi_x \end{vmatrix},$$

so ist das Criterium für das Auftreten einer Ebene α^5 ausgedrückt durch das Verschwinden der Resultante von φ und ψ , also im canonischen Falle $\alpha = 0$ durch die Gleichungen:

$$\pi_{0x} = 0 \quad (x = 1, 2, \dots 5).$$

Wir setzen jetzt die π_{0x} mit einer beliebig kleinen Grösse ε proportional:

$$\pi_{0x} = \varepsilon \pi'_{0x},$$

und charakterisiren dadurch, je nach dem Vorzeichen von ε , einen Zustand der Curve unmittelbar vor oder nach dem Erscheinen einer Ebene α^5 an der Stelle Null.

Der Factor $[\alpha^5]$ wird, wie leicht zu sehen, gerade mit der ersten Potenz von ε proportional; wir haben also nur noch zuzusehen, mit welcher Potenz von ε die Discriminanten und die Resultante der Singularitätenformen $[\alpha^4]$ und $[\alpha^3\beta^2]$ vergleichbar werden: genau dieselben Potenzen sind es dann, welche dem Factor $[\alpha^5]$ in den zugehörigen Zerlegungsformeln zukommen. Nun beginnt die Entwicklung der Formen $[\alpha^4]$ und $[\alpha^3\beta^2]$ mit den Gliedern:

$$\begin{aligned}
[\alpha^4] &= \pi_{01} + 4\alpha\pi_{02} + 2\alpha^2(3\pi_{03} + 5\pi_{12}) + \dots, \\
[\alpha^3\beta^2] &= (4\pi_{01}\pi_{12} - \pi_{02}^2) + 4\alpha\{2\pi_{01}\pi_{13} + \pi_{02}(\pi_{12} - \pi_{03})\} \\
&\quad + 2\alpha^2\{8\pi_{02}\pi_{13} + 2\pi_{12}(\pi_{03} + 3\pi_{12}) + 2\pi_{01}(\pi_{14} + 3\pi_{23}) \\
&\quad - \pi_{02}(\pi_{04} + 4\pi_{13}) - 2(\pi_{03} + \pi_{12})^2\} + \dots,
\end{aligned}$$

oder, wenn man nur auf das Vorkommen von ε achtet:

$$\begin{aligned}
[\alpha^4] &= \varepsilon\omega_0 + \varepsilon\omega_1\alpha + \omega_2\alpha^2 + \dots, \\
[\alpha^3\beta^2] &= \varepsilon\mu_0 + \varepsilon\mu_1\alpha + \mu_2\alpha^2 + \dots
\end{aligned}$$

wo die ω, μ nicht zugleich mit ε verschwinden.

Die beiden Discriminanten werden mit ε , die Resultante mit ε^2 vergleichbar, was mit dem Früheren übereinstimmt.

In schwierigen Fällen ist allerdings ein derartiger Factor ε in einer Discriminante oder Resultante zu einer höheren Potenz enthalten, als es zunächst den Anschein hat, die Controlle wird dann eben durch die bereits bekannten Zerlegungen geliefert.

Da man die Grösse ε als Mass der Geschwindigkeit ansehen kann, mit welcher die einzelnen Singularitäten erster Art zu einer solchen zweiter Art zusammentreten, so gewähren die angedeuteten Entwicklungen ein Bild dieser Bewegung, indem man aus ihnen entnimmt, in welchem Verhältniss die einzelnen Geschwindigkeiten zu einander stehen.

16. Daran knüpft sich ohne Weiteres die Erörterung der bei den einzelnen Coincidenzen zu Tage tretenden Realitätserscheinungen.

Um bei dem obigen Beispiel stehen zu bleiben, so vergleiche man die Discriminanten von $[\alpha^4]$ und $[\alpha^3\beta^2]$, oder, was hier auf dasselbe hinauskommt, die Discriminanten der oben hingeschriebenen quadratischen Formen hinsichtlich ihres Vorzeichens für sehr kleine Werthe von ε . In erster Annäherung hat man:

$$D[\alpha^4] = 10\varepsilon\pi'_{01}\pi_{12}, \quad D[\alpha^3\beta^2] = 32\varepsilon\pi_{01}\pi_{12} \cdot \pi_{12}^2.$$

Beide Discriminanten haben somit in der Nähe von $\varepsilon = 0$ stets das nämliche Vorzeichen. Daraus folgt denn, dass die beiden Ebenen α^5 und die beiden Ebenen $\alpha^3\beta^2$, welche durch die Singularität zweiter Art $[\alpha^5]$ absorbirt werden, beim Ueberschreiten dieses Zustandes gleichzeitig vom Reellen in's Imaginäre übergehen resp. vice versa.

17. Indem wir die zum Theil nicht mühelosen Rechnungen unterdrücken, die mit der allseitigen Durchführung des skizzirten Verfahrens verbunden sind, geben wir nur die wesentlichsten Ergebnisse an.

Lassen wir der Einfachheit halber alle Uebergänge bei Seite, bei denen die betheiligten reellen (imaginären) Elemente reell (imaginär) bleiben, so beachten wir in erster Linie die isolirte Stellung, welche die Quadrisecanten ($\alpha\beta\gamma\delta$) einnehmen. Vermöge Ueberschreitens der

Coincidenz $(\alpha^2\beta\gamma)$ geht eine solche Gerade mit vier reellen Treffpunkten über in eine solche mit nur zwei reellen, oder auch eine letztere über in eine mit keinem reellen Treffpunkt (resp. vice versa), ohne dass irgend ein Ersatz seitens der andern Singularitäten erster Art stattfindet.

Ebenso verhält es sich mit der Erscheinung

$$[(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha + \partial\alpha_1\beta + \partial\beta_1 \dots)],$$

wo zwei Quadriseccanten, die beide irgend einer der drei erwähnten Arten angehören, vom Reellen in's Imaginäre übergehen resp. umg.

Ein theilweise ähnliches, theilweise aber verschiedenes Verhalten zeigen die Tritangentialebenen $\alpha^2\beta^2\gamma^2$.

Beim Eintreten von $[\alpha^3\beta^2\gamma^2]$ oder auch von $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]$ rücken wiederum zwei reelle Ebenen $\alpha^2\beta^2\gamma^2$, sei es beide mit einem, oder aber beide mit drei reellen Berührstellen zusammen, um imaginär zu werden resp. umg., gleichfalls ohne Compensation.

Bei $[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$ findet zwischen dem Paare von Ebenen $\alpha^3\beta^2$ und demjenigen von Geraden $(\alpha^2\beta)$ keine allgemein gültige Realitätsabhängigkeit statt d. h. während etwa ein reelles Paar dort verloren wird, kann hier ein solches ebensogut gewonnen wie verloren werden.

Das Gleiche gilt hinsichtlich des Falles $[\alpha^4\beta^2]$ von dem Paare von Ebenen $\alpha^3\beta^2$ und dem der Restpunkte der Ebene α^4 . Eine entsprechende Zweideutigkeit kommt den Vorgängen $[\alpha^3\beta^3]$ und $[((\alpha\beta))]$ zu, an denen sich jedesmal zwei Paare von Ebenen $\alpha^3\beta^2$ resp. Geraden $(\alpha^2\beta)$ betheiligen. Entweder geht die Realität beider Paare zugleich verloren (oder wird gewonnen), oder aber es kann auch ein reelles Paar von einem imaginären begleitet sein, die dann nach dem Durchgange durch das bez. Vorkommniß ihre Rolle vertauschen.

Dagegen wird beim Passiren von $[\alpha^4\beta^2]$ der Uebergang von einem Paare reeller (imaginärer) Berührungspunkte einer Ebene $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ in's Imaginäre (Reelle) begleitet von einem durchaus gleichverlaufenden eines Paares von Ebenen $\alpha^3\beta^2$. Dieselbe Begleiterscheinung bemerkt man beim Ueberschreiten von $[\alpha^5]$, wo sich ein Paar von Ebenen $\alpha^3\beta^2$ mit einem Paare von Ebenen α^4 in paralleler Bewegung befindet. Endlich hat die Coincidenz $[(\alpha^3)]$ wieder etwas ihr Eigenthümliches; hier gesellt sich ein reelles (imaginäres) Paar von Ebenen α^4 zu einem imaginären (reellen) Paar von Geraden $(\alpha^2\beta)$, um nach dem Durchgange je in den entgegengesetzten Zustand zu gerathen.

18. Um die drei letztgenannten Realitätsabhängigkeiten zusammenzufassen, sei die Anzahl der reellen Ebenen α^4 einer algebraischen Raumcurve mit w' bezeichnet, die der reellen Ebenen $\alpha^3\beta^2$ mit t' , die der reellen Geraden $(\alpha^2\beta)$ mit d' , sowie endlich die Anzahl der reellen Ebenen $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ mit nur einem einzigen reellen Berührungspunkt mit T'' . Dann bleiben beim Durchgange durch die Vorkommnisse $[\alpha^4\beta^2]$, $[\alpha^5]$,

$[(\alpha^3)]$ resp. die Aggregate $t' + 2T''$, $w' - t'$, $w' + d'$ je unverändert, mithin bleibt das Aggregat

$$A = w' + d' - t' - 2T''$$

allen drei Durchgängen gegenüber invariabel.

Dagegen existiren immer Durchgänge, bei welchen einzelne Theile des Aggregates A um Zwei wachsen, das ganze Aggregat indessen kann sich bei beliebigen Veränderungen der Curve nur um ein Vielfaches von Vier ändern, oder, wie sich schreiben lässt:

$$A \equiv \text{const. mod. 4.}$$

Ein instructives Beispiel liefert die Raumcurve 4. Ordnung zweiter Species.

19. Für ebene Curven existirt bekanntlich eine von Hrn. Klein entdeckte „Realitätsgleichung“. Wesshalb eine solche im Raume innerhalb der hier gesteckten Grenzen unmöglich ist, zeigen die in Nr. 17 angeführten Resultate zur Genüge.

Aber auch bei Mitberücksichtigung der Classen- und Rangsingularitäten einer Raumcurve ist eine Realitätsgleichung unwahrscheinlich, da in dem eben citirten Beispiele, wie sich zeigen lässt, eine derartige Gleichung sicher nicht existirt.

Dagegen muss es auf Grund eines von mir in den Göttinger Nachrichten 1891 Nr. 2 mitgetheilten Satzes im Raume von 4 Dimensionen wieder Realitätsgleichungen geben. So ist constant, nämlich gleich Acht, die Gesamtzahl der reellen Stellen, wo eine lineare M_3 die Curve in fünf consecutiven Punkten trifft, wo eine die Curve ausserdem noch einmal treffende Ebene osculirt, und endlich wo die eine Trisecante der Curve begegnet.

Und zwar muss es solcher Gleichungen; wie bereits in der Ebene, eine ganze Reihe geben.

Selbstredend können für specielle Curven Realitätsgleichungen existiren. So hat Herr Klein neuerdings (1892) für ein einzelnes Oval einer Raumcurve 6. Ordnung vom Geschlecht drei den Satz aufgestellt:

„Die Anzahl der Tritangentialebenen mit drei reellen Berührungen, vermehrt um die Anzahl der Hyperosculatıonebenen, welche die Curve ausserdem nicht mehr treffen, ist constant, nämlich gleich Acht.“

Es stimmt dies Ergebniss mit unsern allgemeinen Resultaten überein. Denn es könnten hier nur zwei Coincidenzen in Betracht kommen, $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]$ und $[\alpha^4\beta^2]$. Der erstere Fall, wo also die drei Berührungspunkte auf einer Geraden lägen, kann hier überhaupt nicht eintreten, der zweite dagegen nur so, dass die Curven an den beiden Stellen α, β auf der nämlichen Seite der singulären Ebene verläuft.

Tabellen.

I.

Die fünf Singularitätenformen.

		Grad in α .	Grad in den δ .
Ebenen	$[\alpha^4]$.	$4(n-3)$	1
„	$[\alpha^3 \beta^2]$.	$6(n-3)(n-4)$	$2(n-4)$
„	$[\alpha^2 \beta^2 \gamma^2]$.	$4(n-3)(n-4)(n-5)$	$2(n-4)(n-5)$
Gerade	$[(\alpha^2 \beta)]$.	$2(n-2)(n-3)$	$n-2$
„	$[(\alpha \beta \gamma \delta)]$.	$\frac{1}{3}(n-2)(n-3)^2(n-4)$	$\frac{1}{3}(n-2)(n-3)(n-4)$.

II.

Die Zerlegungen der fünf Discriminanten und zehn Resultanten.

A. Discriminanten.

$$\begin{aligned}
 D[\alpha^4] &= [(\alpha^3)] \cdot [\alpha^5]. \\
 D[\alpha^3 \beta^2] &= [(\alpha^3)]^{(2n-8)(2n-9)} \cdot [\alpha^5] \cdot [\alpha^4 \beta^2] \cdot [\alpha^3 \beta^2 \gamma^2]^2 \cdot [\alpha^3 \beta^3]^6 \\
 &\quad \cdot [\alpha^3 \beta^2, (\alpha^2 \beta)]. \\
 D[\alpha^2 \beta^2 \gamma^2] &= [\alpha^2 \beta^2 \gamma^2, (\alpha \beta \gamma)]^3 \cdot [\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \delta^2]^{24} \cdot [\alpha^4 \beta^2] \cdot [\alpha^3 \beta^2 \gamma^2]^7 \\
 &\quad \cdot [\alpha^2 \beta^2 \gamma^2, \alpha^2 \beta_1^2 \gamma_1^2]. \\
 D[(\alpha^2 \beta)] &= [(\alpha^3)] \cdot [(\alpha^2 \beta \gamma)]^2 \cdot [(\alpha \beta)]^2 \cdot [\alpha^3 \beta^2, (\alpha^2 \beta)]. \\
 D[(\alpha \beta \gamma \delta)] &= [(\alpha_i), (\alpha_i + \partial \alpha_i)]^4 \cdot [(\alpha \beta \gamma \delta \epsilon)]^{60} \cdot [(\alpha^2 \beta \gamma)] \\
 &\quad \cdot [(\alpha \beta)]^{\frac{1}{2}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} \cdot [(\alpha \beta \gamma \delta), (\alpha \beta_1 \gamma_1 \delta_1)]^2.
 \end{aligned}$$

B. Resultanten.

$$\begin{aligned}
 R\{[\alpha^4], [\alpha^3 \beta^2]\} &= [\alpha^4 \beta^2] \cdot [(\alpha^3)]^{2(n-4)} \cdot [\alpha^5]^2 \\
 R\{[\alpha_4], [(\alpha^2 \beta)]\} &= [(\alpha^3)]^2 \cdot [\alpha^4, (\alpha^2 \beta)]. \\
 R\{[\alpha^3 \beta^2], [\alpha^2 \beta]\} &= [(\alpha^3)]^{2(n-4)} \cdot [\alpha^3 \beta^2, (\alpha^2 \beta)]^2 \cdot [\alpha^3 \beta^2, (\alpha^2 \gamma)]. \\
 R\{[\alpha^4], [\alpha^2 \beta^2 \gamma^2]\} &= [\alpha^4 \beta^2] \cdot [\alpha^4, \alpha^2 \beta^2 \gamma^2]. \\
 R\{[\alpha^4], [(\alpha \beta \gamma \delta)]\} &= [\alpha^4, (\alpha \beta \gamma \delta)]. \\
 R\{[\alpha^3 \beta^2], [\alpha^2 \beta^2 \gamma^2]\} &= [\alpha^4 \beta^2]^2 \cdot [\alpha^3 \beta^2 \gamma^2]^2 \cdot [\alpha^3 \delta^2, \alpha^2 \beta^2 \gamma^2]. \\
 R\{[\alpha^3 \beta^2], [(\alpha \beta \gamma \delta)]\} &= [\alpha^3 \epsilon^2, (\alpha \beta \gamma \delta)]. \\
 R\{[\alpha^2 \beta^2 \gamma^2], [(\alpha^2 \beta)]\} &= [(\alpha^2 \beta), \alpha^2 \beta^2 \gamma^2]^2 \cdot [(\alpha^2 \delta), \alpha^2 \beta^2 \gamma^2]. \\
 R\{[\alpha^2 \beta^2 \gamma^2], [(\alpha \beta \gamma \delta)]\} &= [\alpha^2 \epsilon^2 \zeta^2, (\alpha \beta \gamma \delta)]. \\
 R\{[(\alpha^2 \beta)], [(\alpha \beta \gamma \delta)]\} &= [(\alpha \beta)]^{(n-3)(n-4)} \cdot [(\alpha^2 \beta \gamma)]^2 \cdot [\alpha \beta \gamma \delta, (\alpha^2 \epsilon)].
 \end{aligned}$$

III.

Die Gewichte der 24 Elementarfactoren, geordnet nach ihrer Ordnung in n .

(Die Grade gehen daraus durch Division mit $2(n-3)$ hervor).

1. $[\alpha^5]$.	$10(n-3)(n-4)$.
2. $[(\alpha^3)]$.	$6(n-2)(n-3)$.
3. $[\alpha^4\beta^2]$.	$16(n-3)(n-4)(n-5)$.
4. $[\alpha^3\beta^3]$.	$9(n-3)(n-4)(n-5)$.
5. $[\alpha^4, (\alpha^2\beta)]$.	$12(n-2)(n-3)(n-4)$.
6. $[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$.	$14(n-2)(n-3)(n-4)$.
7. $[((\alpha\beta))]$.	$(n-1)(n-2)(n-3)$.
8. $[\alpha^3\beta^2\gamma^2]$.	$12(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$.
9. $[\alpha^4, \alpha^2\beta^2\gamma^2]$.	$8(n-3)(n-4)(n-5)(3n-11)$.
10. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]$.	$4(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$.
11. $[(\alpha^2\gamma), \alpha^3\beta^2]$.	$20(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$.
12. $[(\alpha^2\beta\gamma)]$.	$4(n-2)(n-3)^2(n-4)$.
13. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha^2\beta)]$.	$24(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$.
14. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]$.	$\frac{4}{3}(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$.
15. $[\alpha^3\delta^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2]$.	$8(n-3)(n-4)(n-5)(5n^2-38n+74)$.
16. $[(\alpha^2\delta), \alpha^2\beta^2\gamma^2]$.	$16(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$.
17. $[\alpha^4, (\alpha\beta\gamma\delta)]$.	$\frac{10}{3}(n-2)(n-3)^3(n-4)$.
18. $[(\alpha_i), (\alpha_i + \partial\alpha_i)]$.	$(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$.
19. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2]$.	$4(n-3)(n-4)(n-5)$ $\cdot (4n^3-52n^2+228n-345)$.
20. $[\alpha^3\varepsilon^2, (\alpha\beta\gamma\delta)]$.	$\frac{16}{3}(n-2)(n-3)^3(n-4)^2$.
21. $[(\alpha^2\varepsilon), (\alpha\beta\gamma\delta)]$.	$2(n-1)(n-2)(n-3)^2(n-4)(n-5)$.
22. $[(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)]$.	$\frac{1}{12}(n-2)(n-3)^2(n-4)^2(n-5)$.
23. $[\alpha^2\varepsilon^2\xi^2, (\alpha\beta\gamma\delta)]$.	$4(n-2)(n-3)^3(n-4)^2(n-5)$.
24. $[(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)]$.	$\frac{1}{36}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$ $\cdot (8n^3-41n^2+30n+111)$.

Clausthal, 1. April 1893.