VI. *Die Ausdehnung des Wassers mit der Temperatur; von Karl Scheel.*

Die Ausdehnung des Wassers ist seither nach zwei Methoden bestimmt worden.

Nach der ersten Methode, welche als die der Wägung bezeichnet werden kann, wird ein Körper, Glas oder Metall, von bekannter Ausdehnung zunächst in der Luft, dann in Wasser von verschiedener Temperatur gewogen. Aus dem jedesmaligen Gewichtsverlust im Wasser gegenüber dem Gewichte im Vacuum lässt sich die Dichte des Wassers bei verschiedenen Temperaturen im Verhältniss etwa zur Dichte bei 4° C. und daraus die Volumsänderung des Wassers mit der Temperatur ableiten. Nach dieser Methode ist eine ganze Reihe von älteren Untersuchungen, insbesondere von Hallström¹⁾, Stampfer²⁾, Hagen³⁾ und Matthiessen⁴⁾ angestellt worden.

Auch nach der zweiten, der dilatometrischen Methode vorgenommene Bestimmungen liegen in grösserer Zahl vor. Diese Methode besteht darin, dass das Wasser in thermometerähnliche Glasgefässe, für welche Kopp den Ausdruck „Dilatometer“ eingeführt hat, eingeschlossen, und nun seine scheinbare Ausdehnung in diesem Gefässe bestimmt wird. Kennt man die kubische Ausdehnung des betreffenden Glases, so lässt sich hieraus die absolute Ausdehnung des Wassers ableiten. Dieser Methode bedienten sich schon früher Des-

1) Hallström, Pogg. Ann. **1.** p. 149 und **34.** p. 220.

2) Stampfer, Pogg. Ann. **21.** p. 75.

3) Hagen, Abhandlungen der kgl. Akad. der Wissenschaften zu Berlin. 1855.

4) Matthiessen, Pogg. Ann. **128.** p. 512.

pretz¹⁾, Muncke²⁾, Pierre³⁾, Kopp⁴⁾, Plücker und Geisler⁵⁾, Jolly⁶⁾ und Rosetti.⁷⁾

Aber nicht nur die nach verschiedenen Methoden gefundenen Werthe für die Ausdehnung des Wassers, sondern auch die Resultate einer und derselben Methode weichen bedeutend von einander ab.

Die Gründe für diese mangelhafte Uebereinstimmung sind mannigfacher Art. So können die Konstanten der benutzten Hilfsapparate, z. B. bei der Wägungsmethode die Ausdehnung des Wägungskörpers, oder bei der dilatometrischen Methode die Ausdehnung des Glases falsch angenommen sein. Die hiervon herrührenden Fehlerquellen können aber nachträglich, sobald entweder die Hilfsapparate selbst noch vorhanden sind, oder doch genauere Angaben über dieselben gemacht sind, eliminirt werden.

Auf solche Weise die Beobachtungen zu verbessern und aus den Resultaten mehrerer Forscher gute Mittelwerthe für die Praxis abzuleiten, ist zunächst von Miller⁸⁾ versucht worden. Er entscheidet sich nach sorgfältiger Diskussion der vorliegenden Werthe für die Beobachtungen von Despretz, Pierre und Kopp. Die von Miller abgeleiteten Werthe sind vielfach im Gebrauch. U. a. rechnete hiernach bisher ausschliesslich die kais. Normal-Aichungscommission, nachdem Hr. Förster im Metronomischen Beitrag Nr. 1, 1870, p. 2 nachgewiesen hatte, dass man auch unter Zuhülfenahme der inzwischen von Hagen, Jolly, Matthiessen und Rosetti für die Ausdehnung des Wassers abgeleiteten Resultate keine besseren als die Miller'schen Werthe finden könnte.

Fast gleichzeitig mit dem Erscheinen des Metronomischen

-
- 1) Despretz, *Ann. de chim. et de phys.* **70.** p. 5.
 - 2) Muncke, *Gehler's Phys. Wörterbuch.* II. Aufl. **2.** Art. Dichtigkeit. — **10.** Art. Wärme, Ausdehnung p. 912.
 - 3) Pierre, *Ann. de chim. et de phys.* **3.** Ser. 15. p. 325.
 - 4) Kopp, *Pogg. Ann.* **72.** p. 1.
 - 5) Plücker u. Geisler, *Pogg. Ann.* **86.** p. 238.
 - 6) Jolly, *Monatsberichte der Münchener Acad.* 1864. p. 141.
 - 7) Rosetti, *Atti dell' Instituto Veneto* **12** u. **13.** — *Pogg. Ann. Erg.-Bd.* **5.** p. 258.
 - 8) Miller, *Phil. Trans.* **146.** p. 788.

Beitrags Nr. 1 hat auch J. Herr¹⁾ die Resultate über die Ausdehnung des Wassers discutirt, doch beschränkt er sich auf die Werthe von Hallström, Muncke, Stampfer, Kopp und Pierre. Das grosse Verdienst Herr's hierbei ist, dass er die Beobachtung von Pierre, welche ohne Zweifel den besten angehören, neu berechnet und kritisch behandelt hat. Während Frankenheim²⁾ die Resultate Pierre's nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnete, aber mit einer von ihm selbst zwar als unrichtig, aber als für die Rechnung bequemer hingestellten Gewichtsvertheilung, welche der Gleichung

$$\frac{V_t - V_0}{V_0 \cdot t} = A + Bt + Ct^2$$

entspricht, legt Herr die Formel zu Grunde

$$V_t = V_0 (1 + At + Bt^2 + Ct^3).$$

Aus den Werthen von Muncke, Stampfer, Kopp und Pierre unter Ausschluss von Hallström bildet Herr dann die mittlere Interpolationsformel für die Ausdehnung des Wassers:

$$V_t = V_0 (1 - 0,000\,059\,846\,5\,t + 0,000\,007\,886\,85\,t^2 - 0,000\,000\,043\,043\,t^3).$$

Auf Grund dieser Formel hat später Broch für die Bedürfnisse des internationalen Bureaus im I. Bande der *Travaux et Mémoires* eine von 0,1° zu 0,1° fortschreitende Tafel für die Volumina des Wassers bei verschiedenen Temperaturen und eine ebenfalls von 0,1° zu 0,1° fortschreitende Tafel der Logarithmen des specifischen Gewichtes des Wassers berechnet, eine Zusammenstellung, welche auch in die Tafelsammlung von Landolt und Börnstein übergegangen ist.

Endlich hat noch in neuerer Zeit Hr. Volkmann die bisherigen Resultate über die Ausdehnung des Wassers diskutirt. Auf die Art seiner Kritik will ich hier jedoch nicht eingehen.³⁾

1) Herr, Ueber das Verhältniss des Bergkrystall-Kilogramms zum Kilogramm der Archive. Wien 1870.

2) Frankenheim, Pogg. Ann. **86**. p. 278.

3) Siehe meine Dissertation: Die Ausdehnung des Wassers mit der Temperatur. Berlin 1890. p. 3–5.

Aber trotz ihrer sorgfältigen Diskussionen haben weder Miller noch Herr für die Ausdehnung des Wassers Werthe ableiten können, welche den heutigen Forderungen der Präcisionsphysik gerecht werden. Der Grund hierfür ist nur darin zu suchen, dass bei den Beobachtungen Fehlerquellen vorgekommen sind, deren Einfluss nachträglich häufig nicht einmal annähernd bestimmt werden kann. Hierher gehört vor allen Dingen die meist völlig unzureichende Bestimmung der Temperatur selbst. Dazu kommt, dass in den meisten Fällen unsicher, wenn nicht völlig unbekannt ist, welche Temperaturscala den Messungen zu Grunde gelegt ist, ob diejenige des Luftthermometers, ob diejenige eines Quecksilberthermometers, Angaben, die nach dem heutigen Stande der Thermometrie unerlässlich sind.

So wird man denn dahin geführt, von den bisherigen Resultaten abzusehen und von neuem in eine genaue Bestimmung der Ausdehnung des Wassers einzutreten.

Hr. Pernet hat bereits im Jahre 1881/82 anlässlich der Bestimmung der Constanten seines Luftthermometers und zum Zwecke einer Controle des im internationalen Bureau angewendeten Ausdehnungscoefficienten des Wassers beiläufig für zwei seiner Ballons Versuchsreihen über die scheinbare Ausdehnung des Wassers im Krystallglase nach der dilatometrischen Methode angestellt im Temperaturintervall zwischen 0° und 35° und dabei alle in Betracht kommenden Correctionen berücksichtigt. Da dieselben bei Anwendung der von Herr berechneten Ausdehnung des Wassers einen mit der Temperatur abnehmenden Ausdehnungscoefficienten für das Glas ergaben, so deutete das Resultat auf einen zu kleinen Werth der angenommenen Ausdehnung des Wassers hin.¹⁾

Den ersten Schritt zu einer einwurfsfreien Bestimmung der Ausdehnung des Wassers nach der hydrostatischen Me-

1) Mit einem der benutzten Ballons haben Hr. Pernet und Hr. Thiesen auch die scheinbare Ausdehnung des Quecksilbers im Krystallglase zwischen 0° und 100° sorgfältig bestimmt. Die Resultate sollten anlässlich der Publication der von Hrn. Pernet ausgeführten Vergleichung der Normalthermometer mit dem Wasserstoffthermometer veröffentlicht werden.

thode haben Hr. Marek¹⁾ und Hr. Thiesen²⁾ im internationalen Maass- und Gewichtsbureau gethan. Beide bestimmten nach der Wägungsmethode, welche Correctionen noch an die von Broch angenommenen Werthe anzubringen seien, um die richtigen Zahlen für die Ausdehnung des Wassers zu erhalten.

Hr. Marek hat seine Untersuchungen später auf der kais. Normal-Aichungscommission in Wien weiter fortgesetzt. Bisher hat derselbe die erhaltenen Resultate jedoch nur in einer kurzen Notiz veröffentlicht.³⁾

Die vorliegende Arbeit ist auf Veranlassung des Hrn. Pernet, früher Mitglied bei der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt im Jahre 1889 in dessen Privatlaboratorium, mit Unterstützung seitens der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, ausgeführt. Ihr Zweck war, auch nach der dilatometrischen Methode einwandfreie Werthe für die Ausdehnung des Wassers zu liefern. Diese Bestimmung sollte eine Vorarbeit bilden für die umfangreichen Untersuchungen über die Ausdehnung des Wassers, die in der I. Abtheilung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt für die allernächste Zeit geplant sind.

Beschreibung der Apparate.

I. Thermometer.

Bei den Untersuchungen wurden drei Quecksilberthermometer, W, 102 und Pt₁₁, benutzt, welche mir von Hrn. Pernet gütigst zur Verfügung gestellt waren. Pt₁₁ ist Eigenthum des Hrn. Pernet, W und 102 gehören der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.

Alle drei sind Stabthermometer, deren direct aufgezätzte gleichmässige Theilungen von den Hrn. Jaeger und Wurtzel mit grosser Sorgfalt auf der Theilmaschine des Hrn. Pernet ausgeführt worden sind. Nach den Messungen an Hauptnormalthermometern zu schliessen, dürf-

1) Marek, Travaux et Mémoires tome 3. p. D. 82—90.

2) Thiesen, Bisher liegt über diese Versuche nur eine vorläufige Veröffentlichung im „Rapport de la conférence générale des Poids et Mesures, Sept. 1889, p. 111“, vor.

3) Marek, Wied. Ann. 44. p. 171—172.

ten die absoluten Theilungsfehler kleiner als $0,002^{\circ}$ und die relativen noch geringer sein. Ich konnte daher von einer directen Bestimmung der Theilungsfehler absehen, umsomehr, als durch die Kalibrirung für die Hauptpunkte direct die Summe der Kaliber und Theilungsfehler gefunden wird und für die Zwischenpunkte die von den inneren Theilungsfehlern herrührenden Correctionen jedenfalls innerhalb der Unsicherheit der Kalibercorrectionen liegen. — Die Gefäße sowie die Röhren der Thermometer sind aus Jenaer Normalglas 16^{III}; W und 102 tragen auf der Rückseite einen Emailstreifen, Pt₁₁ dagegen nicht; die Beobachtung kann beim letzteren also auch von der Rückseite durch das Thermometer hindurch vorgenommen und so die Parallaxe eliminirt werden.

Das Thermometer W ist ein Pernet'sches Normalthermometer¹⁾ mit vier Erweiterungen. Die Theilung in Zehntelgrade reicht im Messrohr von 98° bis 165° . — Die Länge eines Grades beträgt 5,818 mm.

Das Thermometer 102, in Zehntelgrade getheilt, dient zur Messung der Temperaturen von -10° bis $+33^{\circ}$. Um aber noch den Siedepunkt bestimmen und das Thermometer in sich kalibrirbar zu machen, sind oberhalb des Punktes 33 zwei Erweiterungen, jede von wenig mehr als 30° , eingeschaltet. Die Länge eines Grades ist 5,909 mm.

Das Thermometer Pt₁₁ umfasst bei einer Grادلänge von 3,939 mm das ganze Intervall von 0° bis 100° und ist getheilt in Fünftelgrade.

Alle drei Thermometer sind zum Theil von mir selbst sorgfältig untersucht worden:

Die *Kalibrirungen* wurden von 2 zu 2 Graden bzw. von $2\frac{1}{2}$ zu $2\frac{1}{2}$ Graden mit möglichst vielen Fäden nach der Neumann-Thiesen'schen Methode²⁾ ausgeführt. Die wahrscheinlichen Fehler der Correctionen an den bestimmten Punkten betragen $0,0010^{\circ}$ bis $0,0015^{\circ}$. Für zwischenliegende Theilstriche konnten die Correctionen nach graphischer Methode abgeleitet werden, da die Curven besondere Unstetigkeiten nicht zeigten.

1) Pernet, Verh. d. Physik. Ges. zu Berlin 1885. No. 7.

2) Thiesen, Carl's Rep. 15. p. 285.

Die *Druckcoefficienten* wurden in der üblichen Weise beide experimentell ermittelt. Dieselben, von der Ordnung des zehntausendsten Theiles eines Grades für 1 mm Aenderung des äusseren bzw. inneren Druckes sind bis auf etwa 3 Proc. genau bestimmt.

Der *Fundamentalabstand* wurde von allen drei Thermometern wiederholt ermittelt. Die Genauigkeit seiner Bestimmung beträgt etwa $0,003^{\circ}$.

Die *Vergleichung der Thermometer* ergab kleine systematische Differenzen bis zu $0,02^{\circ}$, die unerklärt geblieben sind. Die gefundenen Differenzen wurden ausgeglichen und mit Hülfe der gefundenen Werthe alle Angaben auf die des Thermometers W. reducirt. Eine directe vorläufige von Hrn. Gumlich, technischem Hilfsarbeiter bei der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, ausgeführte Vergleichung des Thermometers W. mit dem der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt gehörenden Thermometer Tonnelot Nr. 4636¹⁾ ergab, dass beide innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler gleiche Angaben liefern. Die Thermometerangaben konnten daher schliesslich mittels der für französisches Hartglas von Chappuis²⁾ gefundenen Reductionen auf die Scala des Wasserstoffthermometers umgerechnet werden.

II. Barometer.

Das benutzte Barometer war ein sogenanntes Normalbarometer, System Wild-Fuess, dessen beide Schenkel vertical übereinander gelegen sind. Zur Reduction der beobachteten Barometerstände auf 0° bediente ich mich der von Broch berechneten Tafeln, welche einen Theil der vom permanenten internationalen Comité herausgegebenen Tafeln bilden.

Soweit das Barometer bei Siedepunktsbestimmungen benutzt war, wurde die wirkliche Siedetemperatur aus dem reducirten Barometerstande gemäss der Tafel abgeleitet, welche Hr. Broch im 1. Bande der *Travaux et Mémoires* angibt und welche auch in den Tafeln von Landolt und Börnstein sich findet.

1) Das Thermometer Tonnelot Nr. 4636 ist im internationalen Maass- und Gewichts-bureau untersucht und an die dortigen Thermometer angeschlossen.

2) Chappuis, *Travaux et Mémoires du bureau international*. 6. p. 116.

III. Dilatometer.

Der ursprüngliche Plan dieser Arbeit war die Bestimmung der Ausdehnung des Wassers im ganzen Intervall von 0° bis 100° mit Nutzbarmachung des bei Thermometern angewandten Principes kalibrirbarer Erweiterungen. Es sollte daher das Dilatometer bei verhältnissmässig kleiner Länge die gesammte Ausdehnung des Wassers zwischen 0° und 100° zu bestimmen gestatten, ohne dass man auf den Vortheil verzichtete, für jede benutzte Wassermenge die mittlere Ausdehnung zwischen 0° und 100° ermitteln zu können. Die Construction des Dilatometers ergab sich hieraus ohne weiteres. Zu beiden Seiten einer möglichst cylindrischen Capillare, des sogenannten Messrohres, musste ein System von Erweiterungen eingeschaltet werden, deren Volumen sich in Theilen des Messrohres ausdrücken liess und welche in jedem Systeme ein möglichst gleiches Volumen besaßen. Die eine Reihe dieser Erweiterungen wurde durch den Ballon abgeschlossen, welcher das zu untersuchende Wasser aufnahm. — Die Grösse der Erweiterungen des einen Systems gegenüber denen des anderen musste so abgeglichen werden, dass, wenn bei 0° die Kuppe des Wassers zwischen zwei Erweiterungen der unteren Reihe gelegen war, der Siedepunkt ebenfalls in einen solchen Zwischenraum des oberen Systems fiel. Zur völligen Ausnutzung des Principes war es dann erforderlich, dass die einzelnen Erweiterungen im wesentlichen mit dem gesammten Messrohre gleiches Volumen hatten. Ihre Zahl musste natürlich davon abhängen, ein wie grosses Intervall im Messrohr beobachtet werden sollte; da es praktisch erschien, die Ausdehnung des Wassers von 0° bis 30° mit derselben Wassermenge zu messen, diese Ausdehnung aber nur der zehnte Theil derjenigen von 0° bis 100° ist, so mussten auf jeder Seite des Messrohres zehn Erweiterungen eingeschaltet werden.

Das Dilatometer wurde verfertigt aus einer Glasröhre von etwa 1,3 qmm lichter Weite aus Jenaer Normalglas 16^{III}, welche, wie ich mich durch vorheriges Auskalibriren überzeugt hatte, in ihrer ganzen 125 cm betragenden Länge ein möglichst regelmässiges Kaliber zeigte. Um hieraus das ganze Dilatometer zu erhalten, wählte ich als Einheitslänge des Messrohres 250 mm, ein Volumen, welches demnach auch für jede der

unteren Erweiterungen angenommen werden musste. — Da die Ausdehnung des Wassers für 100° 4% des ganzen Volumens beträgt, so ergab sich aus diesen Dimensionen, dass die oberen Erweiterungen jede um 4% grösser sein mussten als die unteren. Ihr Volumen musste also dasjenige sein, welches einer Länge von 260 mm des Messrohres entsprach. Um die Intervalle ineinander übergreifen zu lassen, wurden die beiden dem Messrohr zunächst liegenden Erweiterungen etwas kleiner gewählt als die übrigen und der fehlende Betrag ins Messrohr verlegt, sodass dieses eine Gesamtlänge von 320 mm erhielt.

Die Herstellung der Erweiterungen selbst war mit keinen allzu grossen Schwierigkeiten verknüpft. — Was die Form der Erweiterungen betrifft, so entschied ich mich nach mehreren Versuchen für die eines länglichen Ellipsoides; nur in diesem Falle konnte ich die für die Kalibrirung nothwendige Bedingung erreichen, dass bei horizontaler Lage des Dilatometers ein langsam vorgeschobener Quecksilberfaden beim Eintritt in die Erweiterung nicht zerriss.

Die Herstellung der Theilung verdanke ich den Hrn. Jäger und Wurtzel, welche dieselbe auf der Hrn. Pernet gehörenden Theilmachine ausführten. In der Regelmässigkeit der von Millimeter zu Millimeter fortschreitenden Theilung ist ein solcher Grad von Vollkommenheit erreicht worden, dass ich davon absehen durfte, irgend welche darauf bezüglichen Correctionen anzubringen. Als Einheit wurde dasjenige Volumen angenommen, welches einem Millimeter Länge im Messrohr entsprach. Die Theilung reichte im Messrohr von dem Punkte 2460 bis 2780. Zwischen den Erweiterungen wurden dann bezeichnet die Hauptpunkte bez. nach unten:

2250, 2000, 1750, 1500, 1250, 1000, 750, 500, 225, 0, sowie nach oben:
3020, 3280, 3540, 3800, 4060, 4320, 4580, 4840, 5100, 5360.

Das Gefäss des Dilatometers wurde erst geblasen, nachdem das Dilatometer im übrigen fertiggestellt und kalibriert war. Das herzustellende Volumen wurde durch Beobachtung von Eis- und Siedepunkt empirisch ermittelt.

Der Apparat wurde dann mit Säuren, Alkohol und destillirtem Wasser sorgfältig gereinigt und definitiv gefüllt. Um luftfreies Wasser zu erhalten, wurde endlich das ganze Dilato-

meter in einer concentrirten Lösung von Chlorcalcium gekocht. Die letzten Spuren von Luft konnten jedoch erst durch längeres Sieden im Siedeapparat beseitigt werden.

Nachdem ich schon die Beobachtungen bei wechselnden Temperaturen von 0° bis 5° sowie eine Reihe von 5° bis 30° angestellt hatte, sprang während der Versuche das Ende der Spitze des Ballons, sodass die Füllung auslief. Da aber der Sprung vollkommen glatt war, so war die Möglichkeit gegeben, das Dilatometer ohne wesentliche Volumenveränderung seines Gefäßes wieder herzustellen. Nach einer Schätzung beträgt die durch das Wiederanschmelzen hervorgerufene Volumenveränderung des Ballons weniger als 2 mm, also $1/40\,000$ des ganzen Volumens. Da die Siedepunktbestimmungen nur mit dem zweiten wohlbestimmten Volumen vorgenommen sind, so ergibt sich nur für die erste Reihe eine hierauf zurückzuführende Unsicherheit von $1/40\,000$ der Ausdehnung, d. h. im Maximum bei 30° nur 0,1 Mikroliter pro Liter.

Die *Kalibrirung* wurde nach der bei den Thermometern üblichen Weise vorgenommen. Dabei wurde jeder Faden in jedem Intervall einmal hinauf- und einmal hinunterverschoben; er wurde jedesmal zuerst von der Seite der Theilung abgelesen; dann wurde das Rohr vorsichtig um 180° gedreht und wieder abgelesen. Der Mittelwerth aus diesen vier Beobachtungen wurde der weiteren Rechnung zu Grunde gelegt.

Die Ausführung der Kalibrirung war trotz der grossen Oeffnung des Rohres und der Beweglichkeit der Fäden, wie sie durch ihre theilweise bedeutenden Längen bedingt war, nach einiger Uebung nicht sehr schwer, vorausgesetzt, dass das Dilatometer und das Quecksilber stets gut gereinigt und getrocknet waren.

Die Kalibrirung wurde im Messrohr von 10 zu 10^σ (1 σ gleich einem Theilintervall von 1 mm Länge) durchgeführt. Ebenso wurden die Systeme der Erweiterungen mit allen Fäden untersucht und die Aenderung des Kalibers in den einzelnen kleinen Rohrstückchen bestimmt. Die Genauigkeit der Kalibrirung beträgt im Durchschnitt 0,02^σ.

Der *innere Druckcoefficient* des Dilatometers konnte, da dasselbe oben nicht geschlossen war, direct bestimmt werden.

Es ergab sich für eine Druckänderung von 1 mm Quecksilber

$$\beta_i = 0,00884^\sigma \pm 0,00006^\sigma$$

und hieraus durch Rechnung, unter Berücksichtigung der Compressibilität des Glases und des Wassers der *äussere Druckcoefficient*

$$\beta_e = 0,00489^\sigma.$$

Die Bestimmung des *Volumens des Gefässes* geschah durch mehrfaches Auswägen des Dilatometers mit Wasser. Es fand sich das Volumen bis zu dem mit 0 bezeichneten Striche bei 0° gleich

$$82\,797,7\lambda \pm 0,6\lambda$$

($\lambda = 1$ Mikroliter = 0,000 001 l).

Die Grösse der *Volumeneinheit im Messrohr* (1 σ) ergab sich ebenfalls durch Auswägen und zwar zweier Quecksilberfäden, die nur im Messrohr bestimmt waren, sowie je eines Quecksilber- und eines Wasserfadens, die durch eine grössere Zahl von Erweiterungen reichten. Man fand hieraus im Mittel

$$1\,\sigma = 1,355\,87\lambda \pm 0,000\,11\lambda.$$

Die Versuche.

I. Die mittlere scheinbare Ausdehnung zwischen 0° und 100°.

Die Bestimmung der Ausdehnung des Wassers für 100° setzt sich zusammen aus einer Beobachtung des Siedepunktes und einer möglichst bald darauffolgenden Beobachtung des Eispunktes.

Der nach Angaben von Hrn. Pernet construirte einfache Siedeapparat bestand aus einem etwa 30 cm weiten Siedekessel, auf welchem ein doppelter verstellbarer Messingmantel von etwa 10 cm innerer Weite aufsass. Die Länge dieses Messingmantels wurde jedesmal so gewählt, dass das Dilatometer zwar möglichst tief eintauchte, jedoch sein Gefäss sich stets oberhalb des siedenden Wassers befand. Der obere Theil des Dilatometers, welcher über den Mantel hervorragte, war mit einem etwa 5 cm weiten Glasrohre umgeben, das mittels eines Korkes auf dem Mantel des Siedeapparates aufsass. Diese Vorrichtung erlaubte, die Siedepunkte ohne herausragende Fäden zu ermitteln, da es ganz gut möglich war, mit einem Mikrometerfernrohre durch das Glasrohr hindurchzuvisiren.

Um die Spannung des Dampfes in der Mitte des Gefässes messen zu können, steht mit dem inneren Theile des Apparates ein Wassermanometer in Verbindung. Vor demselben ist ein Dreiweghahn eingeschaltet, sodass das Manometer abwechselnd mit der äusseren Luft und dem Innern des Apparates in Verbindung gesetzt werden kann. — Es war mir nicht möglich, das Abdestilliren des Wassers aus dem Dilatometer ganz zu verhindern, weil ich *unter den gegebenen Umständen* den Druck im Dilatometer nur dann genau ermitteln konnte, wenn sein Inneres nicht gegen die umgebende Luft abgeschlossen war. Ich musste daher meine Ablesungen solange fortsetzen, bis die Abnahme des Standes der Wasserkuppe wesentlich proportional der Zeit vor sich ging. Unmittelbar nach der letzten Ablesung unterbrach ich durch Auslöschen der Flamme das Sieden und entfernte das Dilatometer so schnell als möglich aus dem Apparate, wobei ich, um noch weiteres Abdestilliren zu verhindern, den oberen Theil des Dilatometers mit kaltem Wasser kühlte. Die ganze zuletzt beschriebene Operation nahm nur Bruchtheile einer Minute in Anspruch. Ich halte mich daher für berechtigt, die letzte Ablesung mit der folgenden Eispunktsbestimmung zu verbinden, um so mehr, als ich nach dem Auslöschen der Flamme auf keine Weise noch ein Abdestilliren habe nachweisen können.

Die Abkühlung des Dilatometers musste anfangs, entgegen dem Verfahren bei Thermometern, langsam erfolgen, weil bei schnellem Abkühlen des Gefässes in den zwischen den Erweiterungen befindlichen Rohrstückchen kleine Mengen von Wasser zurückblieben. Die beim Jenaer Glase ohnehin geringen thermischen Nachwirkungen sind daher als bereits verschwunden zu betrachten, um so mehr, als auch die weitere Abkühlung des Dilatometers bis auf 0° wegen der grossen Wärmecapacität des Wassers länger als eine Stunde dauerte.

Als Eisapparat diente ein doppelwandiges Messinggefäss, bei welchem der Zwischenraum zwischen den beiden Wandungen mit schlechten Wärmeleitern angefüllt war. Im Innenraum wurde fein geschabtes Eis mit gekühltem destillirten Wasser zu einem Brei gemengt und in dieses das Dilatometer eingeführt. Nach den Untersuchungen von Hrn. Pernet liefert dies in Frankreich allgemein übliche Verfahren

sehr constante Eispunkte. Gleichzeitig hat man bei dieser Anordnung den Vortheil, den ausser dem Luftdruck auf dem Dilatometer lastenden Aussendruck, die Höhe der Wassersäule über der Mitte des Gefässes, in Rechnung bringen zu können. Auch wird hierdurch verhindert, was bei alleiniger Anwendung von geschabtem Eise leicht eintreten kann, dass warme Luft längs des Dilatometers bis zum Gefässe eindringt. Das Dilatometer wurde möglichst vertical gestellt und nur soweit herausgezogen, dass die Kuppe gerade über dem Rande des Eisapparates hervorsah, und die Ablesungen mit einem Mikrometerfernrohr gemacht. Mit den Eispunktsbeobachtungen begann ich erst dann, wenn das Dilatometer hinreichend lange sich im Eise befand und unterbrach dieselben erst, wenn in etwa 20 Minuten keine messbare Standänderung mehr eintrat.

In dieser Weise bestimmte ich die mittlere Ausdehnung des Wassers mit vier verschiedenen Wassermengen und zwar in der Art, dass die entsprechenden Eis- und Siedepunkte ungefähr die folgenden Lagen hatten:

Eispunkt: 2500 1500 250 0.

Siedepunkt: 5100 4060 2760 2500.

Die Beobachtungen sind weiter unten zusammengestellt. In den einzelnen Spalten der darauf bezüglichen Tafeln sind nacheinander aufgeführt:

1. Die zum beobachteten Drucke gehörende Siedetemperatur;

2. die beobachtete scheinbare Ausdehnung des Wassers. Um die bei den verschiedenen Siedetemperaturen erhaltenen Werthe der Ausdehnung mit einander vergleichbar zu machen, konnte ich, da die Temperaturen nur innerhalb weniger Zehntelgrade von 100° abwichen, annehmen, dass die Ausdehnung in den Nähe von 100° proportional der Temperaturänderung vor sich gehe. Bezeichnet also v_t das Volumen bei t° , v_m das Mittel der Volumina bei der mittleren Temperatur t_m° , so ist demnach

$$v_t - v_m = a(t - t_m),$$

wo a einen Proportionalitätsfactor bedeutet. In Spalte 3 sind dann die Abweichungen der so berechneten und beobachteten Werthe von v_t im Sinne Beobachtung—Rechnung zusammengestellt.

1. Reihe: Eispunkt bei etwa 2500 σ .

Siede- temperatur	Ausdehnung	B.—R. in 0,000 001
99,657°	0,040 605 ₃	+ 38 ₈
649°	564 ₉	+ 4 ₃
716°	600 ₅	— 8 ₉
705°	594 ₂	— 7 ₁
680°	572 ₈	— 8 ₉
682°	577 ₅	— 7 ₁
742°	619 ₀	— 9 ₂
791°	666 ₅	+ 2 ₆
818°	677 ₀	— 6 ₃
100,042°	856 ₆	+ 10 ₆
021°	820 ₇	— 10 ₀
99,976°	801 ₀	+ 3 ₀

Hieraus folgt $v_t - v_m = 7,26 (t - t_m)$, wo $t_m = 99,790$;
 $v_m = 1,040\ 663_0$.

2. Reihe: Eispunkt bei etwa 1500 σ .

Siede- temperatur	Ausdehnung	B.—R. in 0,000 001
100,210°	0,040 968 ₆	— 3 ₈
175°	942 ₉	— 1 ₀
141°	923 ₀	+ 7 ₇
138°	910 ₃	— 3 ₄
086°	864 ₃	— 7 ₁
037°	827 ₇	— 3 ₈
99,991°	804 ₂	+ 10 ₃

Hieraus folgt $v_t - v_m = 8,15 (t - t_m)$, wo $t_m = 100,111$;
 $v_m = 1,040\ 891_7$.

3. Reihe: Eispunkt bei etwa 250 σ .

Siede- temperatur	Ausdehnung	B.—R. in 0,000 001
99,735°	0,040 632 ₁	+ 1 ₃
786°	663 ₃	+ 2 ₅
770°	648 ₀	— 3 ₇
860°	699 ₃	— 5 ₃
864°	707 ₃	— 0 ₆
845°	697 ₃	+ 0 ₃
839°	695 ₅	+ 2 ₅
917°	742 ₇	+ 3 ₁
916°	740 ₄	+ 1 ₄

Hieraus folgt $v_t - v_m = 5,98 (t - t_m)$, wo $t_m = 99,837$;
 $v_m = 1,040\ 691_8$.

4. Reihe: Eispunkt bei etwa 0 °.

Siede- temperatur	Ausdehnung	B.—R. in 0,000 001
99,886°	0,040 722 ₈	+ 2 ₈
857°	699 ₁	+ 3 ₇
854°	693 ₀	+ 0 ₂
797°	640 ₈	— 3 ₅
941°	773 ₈	+ 6 ₄
956°	770 ₈	— 8 ₉

Hieraus folgt $v_t - v_m = 8,50 (t - t_m)$, wo $t_m = 99,882$; $v_m = 1,040 716$.

Die scheinbare Ausdehnung des Wassers im Jenaer Glase für 100° selbst ergibt sich aus obigen Formeln, wenn man $t = 100$ setzt und zwar:

1. 12 Beob. zwischen 99,649° u. 100,042 40815,5² ± 2,7²
2. 7 „ „ 99,991° „ 100,210 40801,2² ± 1,6²
3. 9 „ „ 99,735° „ 99,917 40789,3² ± 0,7²
4. 6 „ „ 99,797° „ 99,956 40816,9² ± 1,5².

Die Differenzen zwischen den einzelnen Bestimmungen scheinen darauf hinzudeuten, dass durch das häufige Sieden das Kaliber des Dilatometers sich geändert habe. Leider war es nicht möglich, durch eine nochmalige Kalibrirung diese Fehlerquelle zu beseitigen, da das Innere des Rohres bereits vom Wasser so stark angegriffen war, dass die Quecksilberfäden bei der Verschiebung zerrissen.

Gibt man nun aber jeder Bestimmung das Gewicht, welches ihr gemäss der Anzahl der Einzelbeobachtungen zukommt, aus denen sie sich zusammensetzt, so ergibt sich im Mittel die scheinbare Ausdehnung des Wassers pro Liter:

$$40805,9^2 \pm 4,3^2.$$

II. Die scheinbare Ausdehnung zwischen 0° und 33°.

Die Ausdehnung des Wassers zwischen 0° und 33° wurde bestimmt durch Vergleichung des Dilatometers mit je zwei Quecksilberthermometern in einem Wasserbade von constanter Temperatur. Als Vergleichsgefäss diente dabei ein 70 cm hoher, etwa 100 Liter haltender irdener Topf, welcher durch einen mit Zinkblech ausgeschlagenen, etwa 2 cm dicken Holzdeckel verschlossen war. Dieser Deckel war in der Mitte

dreimal durchbohrt, um das Dilatometer und die beiden benutzten Thermometer ins Wasserbad einführen zu können. Durch eine vierte seitliche Oeffnung im Deckel konnte man während der Versuche dem Wasserbade warmes oder kaltes Wasser oder auch feingeschabtes Eis zufügen, um die Temperatur constant zu erhalten. Um aber auch im Wasserbade überall die gleiche Temperatur zu erhalten, d. h. die Bildung horizontaler Schichten zu verhindern, bediente ich mich eines Rührers, welcher ebenfalls durch den Deckel des Topfes geführt war. — An drei verzinkten starken Eisendrähnen, welche oberhalb des Deckels durch eine dreieckige Handhabe verbunden waren, sassen im Wasserbade zwei durchlöchernte, etwa 10 cm breite Ringe aus Zinkblech an, und zwar in solcher Entfernung, dass, wenn der Rührer ganz eingeschoben war, der untere Ring fast den Boden des Topfes berührte, während der obere etwa in der Mitte des Topfes sich befand. Der Rührer konnte dann soweit aufgezozen werden, dass der obere Ring fast den Deckel berührte.

Die Anordnung der Versuche war die folgende: Nachdem das Wasserbad auf diejenige Temperatur gebracht war, bei welcher die Beobachtungen vorgenommen werden sollten, wurden das Dilatometer und die beiden Thermometer in das Bad eingeführt und von da ab bis zur Beendigung der Versuche durch stetes Auf- und Abbewegen des Rührers, was nur während der Zeit der Ablesungen selbst unterbrochen wurde, das Wasser des Bades durcheinander geworfen. Von der Constanz des Bades überzeuete ich mich durch häufiges Ablesen der Thermometer, welche ganz in das Wasser eintauchen und deren Scalen nur jedesmal zum Zwecke der Beobachtung herausgezogen wurden. Die geringen Wärmemengen, welche vom Bade an die Umgebung abgegeben oder von derselben aufgenommen wurden, compensirte ich durch Zufügen von warmem Wasser oder feingeschabtem Eise. Nach einiger Uebung ist es mir gelungen, auf diese Weise die Temperatur des Bades während einer Stunde innerhalb weniger Tausendstel eines Grades constant zu erhalten. Ich begann die eigentlichen Beobachtungen erst dann, wenn der Stand des Dilatometers sich nicht mehr stetig änderte, sodass ich annehmen konnte, dass das Dilatometer auch wirklich die Temperatur

des Bades angenommen habe. Die definitiven Ablesungen an den drei Apparaten wurden dann möglichst schnell nach einander in geeigneter Abwechselung von fünf zu fünf Minuten vorgenommen. Der weiteren Rechnung zu Grunde gelegt wurde im allgemeinen der Mittelwerth der während 50 Minuten erfolgten letzten 11 Ablesungen. — Solche Reihen habe ich, je nach Umständen, an einem Tage zwei, drei oder mehrere ausführen können; stets aber habe ich am selben Tage nur Beobachtungen innerhalb kleiner Temperaturintervalle angestellt, um sicher zu sein, dass an allen drei Instrumenten die Eispunkte während der Messungen sich nicht wesentlich änderten. Um von den Eispunktvariationen völlig frei zu werden, habe ich dann an jedem Beobachtungstage vor und nach den Messungen an allen drei Instrumenten die Eispunkte bestimmt. Die zu beiden Zeiten erhaltenen Werthe gingen im allgemeinen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler, d. h. auf $\pm 0,003^\circ$, zusammen, sodass ich für alle Messungen desselben Tages die Eispunkte interpoliren konnte. Ergaben die beiden erhaltenen Werthe keine befriedigende Uebereinstimmung, so wurden die Beobachtungen des ganzen Tages verworfen.

In dieser Weise beobachtete ich die Ausdehnung des Wassers von 0° bis 33° von Grad zu Grad in zwei verschiedenen Reihen (I und II); ferner führte ich im Intervall zwischen 3° und 5° mehr als dreissig Beobachtungen aus.

Die Beobachtungsergebnisse sind nach Temperaturen geordnet die Folgenden:

Reihe	Nummer der Beobachtung	Temperatur nach dem Wasserstoff- Thermometer	Scheinbare Ausdehnung des Wassers $10^{-6} \times$	Uebrigbleibende Fehler (B.—R.) in λ pro Liter	
				1	2
I	44	0,937	— 67,1	+ 6,4	+ 7,4
I	45	1,097	— 82,2	+ 2,4	+ 3,6
I	46	1,893	— 131,8	+ 2,2	+ 3,7
I	47	2,084	— 145,5	— 1,2	+ 0,4
I	40	2,101	— 191,9	— 2,2	— 0,6
I	26	3,103	— 190,6	— 1,8	— 0,2
I	48	3,222	— 194,8	— 0,6	+ 0,9
I	41	3,231	— 193,1	+ 1,3	+ 2,8
I	42	3,426	— 200,8	+ 0,1	+ 1,5
I	49	3,459	— 203,8	— 1,9	— 0,5

Reihe	Nummer der Beobachtung	Temperatur nach dem Wasserstoff- Thermometer	Scheinbare Ansehnung des Wassers $10^{-6} \times$	Uebrigbleibende Fehler (B.—R.) in λ pro Liter	
				1	2
I	38	3,631	— 208,0	— 0,9	+ 0,5
I	43	3,648	— 208,4	— 0,8	+ 0,6
I	50	3,803	— 210,8	+ 1,0	+ 2,4
I	34	3,852	— 213,4	— 0,4	+ 0,9
I	35	3,926	— 215,9	— 1,1	+ 0,2
I	51	3,948	— 215,3	+ 0,1	+ 1,4
I	53	4,006	— 217,2	— 0,4	+ 0,9
I	39	4,008	— 215,8	+ 1,0	+ 2,3
I	36	4,021	— 215,3	+ 1,8	+ 3,1
I	25	4,048	— 221,8	— 4,1	— 2,8
I	52	4,110	— 221,4	— 2,4	— 1,2
I	54	4,153	— 220,3	— 0,3	+ 0,9
I	33	4,257	— 223,7	— 1,7	— 0,5
I	55	4,273	— 225,0	— 2,7	— 1,5
I	32	4,457	— 224,1	+ 1,4	+ 2,5
I	56	4,472	— 227,1	— 1,3	— 0,3
I	37	4,505	— 224,8	+ 1,5	+ 2,5
I	57	4,601	— 228,4	— 0,7	+ 2,0
I	31	4,654	— 229,8	— 1,3	— 0,4
I	58	4,827	— 233,6	— 3,1	— 2,3
I	30	4,839	— 232,1	— 1,6	— 0,7
I	24	5,019	— 233,8	— 1,6	— 0,9
I	27	5,114	— 237,3	— 4,3	— 3,6
I	29	6,017	— 232,8	+ 0,8	+ 0,8
II	70	6,117	— 234,6	— 2,9	— 2,8
I	28	6,918	— 221,1	— 0,9	— 1,5
II	71	7,103	— 219,3	— 3,1	— 3,8
II	72	8,031	— 187,2	+ 1,7	+ 0,2
I	23	8,127	— 185,3	+ 0,1	— 1,5
II	73	8,950	— 149,0	+ 0,9	— 1,2
I	22	9,053	— 142,2	+ 2,6	+ 0,4
I	21	9,961	— 87,2	+ 6,3	+ 3,7
II	74	10,088	— 87,0	— 1,6	— 4,3
II	75	10,930	— 24,1	+ 2,4	— 0,7
I	1	11,113	— 10,6	+ 1,9	— 1,3
II	76	12,106	+ 73,6	+ 1,9	— 1,5
I	2	12,108	+ 78,7	+ 6,9	+ 3,5
I	3	12,999	+ 158,6	+ 0,5	— 2,9
II	77	13,069	165,9	+ 0,6	— 2,9
II	78	13,987	271,0	+ 5,4	— 1,7
I	4	13,995	268,1	+ 1,6	+ 2,0
I	5	14,988	387,1	+ 0,2	— 2,7
II	79	15,039	397,5	+ 4,1	+ 2,3
I	6	16,054	537,5	+ 8,2	+ 5,9
II	63	16,064	531,7	+ 1,0	— 1,3
I	7	16,970	664,7	+ 2,1	+ 0,9
II	64	17,102	686,5	+ 3,9	+ 2,4
I	8	17,910	814,1	+ 4,5	+ 3,9
II	65	17,970	817,1	+ 2,2	— 2,8

Reihe	Nummer der Beobachtung	Temperatur nach dem Wasserstoff- Thermometer	Scheinbare Ausdehnung des Wassers $10^{-6} \times$	Uebrigbleibende Fehler (B.—R.) in λ pro Liter	
				1	2
I	9	18,940	986,2	+ 4,1	+ 4,6
II	59	18,976	988,1	— 0,1	+ 0,3
I	10	19,985	1166,1	— 3,0	— 1,3
II	60	20,050	1181,6	+ 0,5	+ 2,2
II	61	20,978	1354,3	— 3,3	— 0,5
I	11	21,014	1367,8	+ 3,2	+ 6,1
I	12	21,948	1552,1	+ 0,9	+ 4,8
II	62	22,009	1565,5	+ 1,3	+ 5,3
I	13	23,016	1774,2	— 2,5	+ 2,6
II	66	23,083	1786,3	— 4,9	+ 0,2
I	14	23,963	1980,4	— 5,3	+ 0,6
II	67	23,984	1981,5	— 8,9	— 3,0
II	68	24,882	2187,0	— 9,9	— 3,5
I	15	25,056	2229,3	— 8,4	— 1,9
I	16	25,893	2421,6	— 16,7	— 10,1
II	69	25,984	2446,3	— 14,1	— 7,6
II	80	26,895	2685,0	— 1,8	+ 4,6
I	17	26,926	2693,4	— 1,2	+ 5,2
II	81	27,891	2937,0	— 5,5	0,0
I	18	27,903	2938,6	— 7,1	— 0,3
I	19	28,907	3205,0	— 7,3	— 3,4
II	82	28,962	3221,4	— 5,7	— 1,9
II	85	29,964	3495,5	— 6,5	— 5,3
I	20	30,032	3512,1	— 8,8	— 8,0
II	89	30,884	3768,7	+ 7,2	+ 5,0
II	84	30,940	3771,1	— 6,4	— 8,9
II	83	30,949	3773,7	— 6,8	— 9,1
II	86	30,989	3804,1	+ 12,6	+ 10,0
II	90	31,927	4078,7	+ 15,1	+ 7,9
II	87	32,008	4098,2	+ 10,8	+ 3,2
II	91	32,871	4364,3	+ 20,2	+ 7,3
II	88	33,039	4404,5	+ 9,8	— 3,7

Es war von vornherein unwahrscheinlich, dass sämtlichen Beobachtungen der gleiche Grad der Genauigkeit zukomme. Da aber die Ausdehnung des Wassers sich darstellen lässt als eine nach Potenzen der Temperatur fortschreitende Function, deren Charakter erfahrungsmässig wesentlich durch das quadratische Glied bestimmt wird, da ferner diese Function, gemäss des eigenthümlichen Verhaltens des Wassers in der Nähe von 4^0 C. ein Minimum besitzt, so ist die Bestimmung des Gewichts der einzelnen Beobachtungen eine äusserst schwierige Aufgabe. Ich bin daher Hrn. Thiesen, der bereits ähnliche Fälle behandelte, zu besonderem Danke ver-

pflichtet, dass er mich bei den folgenden Ueberlegungen mit seinem Rathe unterstützte:

Bezeichnet f die Ausdehnung des Wassers, t die Temperatur, so kann man schreiben

$$f - (a t + b t^2 + c t^3) = 0,$$

wo a, b, c Konstante sind. Nennt man nun $\pm \Delta f$ den Fehler, wie er bei der Ablesung des Dilatometers, $\pm \Delta t$ den Fehler, wie er bei der Ablesung des Thermometers begangen wird, so ist der Gesamtfehler ausgedrückt durch die Form

$$\pm \sqrt{(\Delta f)^2 + \Delta t^2 \left(\frac{df}{dt}\right)^2}$$

und es wird demnach das Gewicht, welches den einzelnen Beobachtungen zukommt

$$\frac{1}{(\Delta f)^2 + (\Delta t)^2 \left(\frac{df}{dt}\right)^2}$$

Einen Anhalt für die Veränderung der Grösse

$$(\Delta f)^2 + (\Delta t)^2 \left(\frac{df}{dt}\right)^2 = (\delta f)^2$$

mit der Temperatur gewinnt man leicht aus den Beobachtungen selbst. Ermittelt man nämlich für die Ausdehnung des Wassers eine angenäherte Interpolationsformel, so ergeben die Quadrate der übrigbleibenden Fehler, nachdem systematische Abweichungen durch geeignete Combinationen beseitigt sind, eben diese $(\delta f)^2$. In dieser Weise erhält man $(\delta f$ genommen als Mikroliter pro Liter)

Grad	$(\delta f)^2 =$	$\left(\frac{df}{dt}\right)^2 =$
3	4,77	0,1
8	9,09	0,3
13	4,93	1,5
18	9,16	3,3
23	24,26	5,6
28	19,89	8,0
32	60,73	10,0

Bildet man nun für die Ausdehnung des Wassers (df/dt) und zwar genommen in Einheiten der vierten Decimale, so

kann man die Werthe von $(\delta f)^2$ als Ordinaten, die von $(df/dt)^2$ als Abscissen für die oben aufgeführten Temperaturen graphisch auftragen. Da nun $(\delta f)^2 = (\Delta f)^2 + (\Delta t)^2 (df/dt)^2$ eine lineare Function von $(df/dt)^2$ ist, so müssen streng genommen alle eingetragenen Punkte auf einer geraden Linie liegen. Obwohl diese Bedingung nicht ganz erfüllt ist, so schmiegen sich doch die Werthe derjenigen Linie, die durch die Eigenschaft $(\Delta f)^2 = (\Delta t)^2$ definirt ist, verhältnissmässig gut an. Man kommt daher der Wahrheit am nächsten, wenn man $(\Delta f)^2 = (\Delta t)^2$ setzt und somit für das Gewicht die Form $C/[1 + (df/dt)^2]$ einführt, wo C eine Constante bedeutet und (df/dt) in Einheiten der vierten Decimale zu nehmen ist. — Da die Gewichte nur Verhältnisszahlen ausdrücken, so ist es gleichgültig welchen Werth man der Constanten C beilegt. Wählt man dieselbe so, dass für die Beobachtungen bei 4° C. das Gewicht gleich 10 wird, so lässt sich für die Gewichte die folgende Tafel aufstellen:

Grad	Gew.	Grad	Gew.	Grad	Gew.	Grad	Gew.	Grad	Gew.
1	10	8	9	15	4	22	2	29	1
2	10	9	8	16	3	23	2	30	1
3	10	10	7	17	3	24	2	31	1
4	10	11	6	18	3	25	2	32	1
5	10	12	6	19	3	26	1	33	1
6	10	13	5	20	2	27	1		
7	10	14	4	21	2	28	1		

Es handelt sich jetzt darum, die Beobachtungen durch eine Interpolationsformel zusammenzufassen. Wie schon oben angedeutet wurde, lässt sich die Ausdehnung des Wassers darstellen als eine nach ganzen Potenzen fortschreitende Function der Temperatur. Bezeichnet man also das scheinbare Volumen bei t° mit V_t , so ist demnach:

$$V_t = V_0 (1 + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \dots)$$

Beschränkt man sich auf die dritte Potenz, so wird:

$$A = \frac{V_t - V_0}{V_0} = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 \dots \dots \dots 1),$$

wo α , β , γ noch zu bestimmende Constante, A die in der vorausgegangenen Zusammenstellung der Resultate in der vierten Spalte aufgeführten Werthe bedeutet. —

Nach einer solchen dreigliedrigen Formel wurden nach der Methode der kleinsten Quadrate die Beobachtungen ausgeglichen, jedoch nicht mit dem gewünschten Erfolg. Wie nämlich ein Blick auf die nach der resultirenden Formel berechneten übrigbleibenden Fehler, die in der mit 1 überschriebenen Spalte aufgeführt sind, lehrt, zeigen dieselben noch einen systematischen Gang, der darauf hinzuweisen scheint, dass die bis zur dritten Potenz fortschreitende Reihe die Beobachtungen noch nicht in genügender Weise darstellt. Es lag deshalb nahe, die Potenzreihe noch weiter fortzusetzen und die Beobachtungen darzustellen durch die Form:

$$A = \frac{V_t - V_0}{V_0} = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \delta t^4.$$

Zur Vereinfachung der Rechnung genügt es jedoch, für den Coefficienten δ , der nur noch einen ausgleichenden Character besitzt, von vorneherein einen festen Werth anzunehmen. Mehrere Ausgleichungsversuche liessen als wahrscheinlichsten Werth

$$\delta = + 0,000\ 000\ 000\ 401\ 209$$

erscheinen. Unter Zugrundelegung dieses Coefficienten ergibt ein erneuter Ausgleich der Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate

$$V_t = V_0 (1 - 0,000087\ 389\ t + 0,000\ 008\ 496\ 18\ t^2 - 0,000\ 000\ 068\ 093\ 1\ t^3 + 0,000\ 000\ 000\ 401\ 209\ t^4)$$

wo t die Temperatur gemessen nach der Wasserstoffscale bedeutet.

Führt man diese Werthe in die Beobachtungsgleichungen ein, so erhält man die in den Spalten 2 aufgeführten übrigbleibenden Fehler, welche

$$\Sigma(pv^2) = 3699,9 \times 10^{-12}$$

und den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung vom Gewichte 10:

$$r_B = \pm 1,37 \times 10^{-6},$$

d. h. = $\pm 1,37$ Mikroliter pro Liter ergeben.

III. Die absolute Ausdehnung des Wassers.

Bezeichnet man den Ausdehnungscoefficienten des Wassers mit q , den des Glases mit $g = a + b\ t$; sei ferner V_0 das

Volumen des Ballons bis zum Eispunkte, v_0 das Volumen des Rohres vom Eispunkte bis zum Stande der Wasserkuppe bei t^0 ; beide V_0 und v_0 gemessen bei 0^0 , so ist:

$$(V_0 + v_0)(1 + g t) = V_0(1 + q t) \text{ oder:}$$

$$\frac{v_0}{V_0} = \frac{(q - g)t}{1 + g t}.$$

v_0/V_0 ist diejenige Grösse, die wir oben mit

$$A = \frac{V_t - V_0}{V_0} = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \delta t^4$$

bezeichnet haben; also wird:

$$A = \frac{(q - g)t}{1 + g t},$$

woraus sich der absolute Ausdehnungsfcoefficient des Wassers:

$$(1) \quad q = \frac{A}{t}(1 + g t) + g$$

ergiebt.

Die Ausdehnung des Jenaer Glases 16^m ist neuerdings von Hrn. Prof. Thiesen und mir ¹⁾ in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt bestimmt worden. Wir fanden in der Scale des Wasserstoffthermometers linear

$$l_t = l_0(1 + 10^{-6} \times 7,707 t + 10^{-6} \times 0,003\,64 t^2)$$

woraus sich die kubische Ausdehnung ergibt:

$$(2) \quad v_t = v_0(1 + 10^{-6} \times 23,121 t + 10^{-6} \times 0,011\,10 t^2)$$

und somit

$$(3) \quad g_{100} = 0,000\,024\,231.$$

Mittelst dieses letzten Werthes ergiebt sich durch die Formel 1) die wahre Ausdehnung des Wassers für 100^0 , wenn man nach p. 445 setzt:

$$A = 0,0\,40\,8059$$

im Werthe

$$q = 0,000\,433\,36$$

also

$$V_{100} = V_0 \times 1,043\,336,$$

oder wenn man das Volumen im Minimum, also bei $3,960^0$ gleich 1 setzt

1) M. Thiesen u. K. Scheel, Zeitschr. f. Instr.-Kde. 12. p. 293. 1892.

$$V_{100} = 1,043\,466 \pm 0,000\,004$$

und somit das specifische Gewicht

$$s_{100} = 0,958\,345.$$

Vergleicht man dies Resultat mit den ebenfalls durch dilatometrische Messungen gefundenen Werthen von

Pierre: 1,043 950

Kopp: 1,043 300

Jolly: 1,043 160

und dem daraus folgenden Mittel

$$1,043\,470,$$

so ergibt sich, dass die nur 4 Mikroliter betragende Differenz gegenüber dem von mir gefundenen Werthe völlig innerhalb der Unsicherheit des Mittelwerthes liegt und dass das von Pierre gefundene Resultat wesentlich zu gross sein dürfte.

Dagegen ergeben die hydrostatischen Wägungen die Ausdehnung des Wassers für 100° nach

Hagen: 1,042 970

Matthiessen: 1,043 160,

im Mittel:

$$1,043\,065,$$

also einen sehr viel kleineren Werth. Da nach den neueren hydrostatischen Wägungen von Hrn. Thiesen und Hrn. Marek auch bei niederen Temperaturen die Werthe von Hagen wesentlich zu klein sind, so dürfte eine neue hydrostatische Bestimmung der Ausdehnung für 100° der von mir nach der dilatometrischen Methode gefundenen ziemlich nahe kommen.

Um die absolute Ausdehnung des Wassers im Intervall von 0° bis 33° zu erhalten, setzen wir in die Formel 1) der vorigen Seite für A und g ihre Werthe ein. Vernachlässigt man die Glieder höherer Ordnung, so wird:

$$q = (a + \alpha) + (b + \beta + a\alpha)t + (\gamma + a\beta + \alpha b)t^2 + \delta t^3;$$

oder wenn man für α β γ δ die Werthe von p. 462 und für a und b gemäss der obigen Discussion für die Ausdehnung des Jenaer Glases:

$$a = + 23,121 \times 10^{-6}$$

$$b = + 0,011\,10 \times 10^{-6}$$

einführt, so wird (nach der Wasserstoffscale):

$$q = [-64,268 + 8,505\,26\,t - 0,067\,897\,7\,t^2 + 0,000\,401\,209\,t^3] \\ \times 10^{-6}$$

und somit das Volumen V_t ausgedrückt durch das Volumen V_0 bei 0° :

$$V_t = V_0 [1 - 0,000\,064\,268\,t + 0,000\,008\,505\,26\,t^2 \\ - 0,000\,000\,067\,897\,7\,t^3 + 0,000\,000\,000\,401\,209\,t^4],$$

woraus sich das Minimum des Volumens bei $3,960$ zu

$$V_{3,960} = 0,999\,874\,8$$

ergibt.

In der folgenden Tabelle sind die Dichten des Wassers, wie sie sich aus der letzten Formel ableiten lassen, im Verhältniss zur Dichte bei $3,960^\circ$ angegeben, denen zur Vergleichung die entsprechenden Werthe von Thiesen und Marek beigelegt sind.

Dichte des Wassers.

Wasserstoff- scala Temperatur	Scheel	Thiesen	Marek	Mittel	Abweichung vom Mittel in Einheiten d. 7. Stelle		
					Scheel- Mittel	Thiesen- Mittel	Marek- Mittel
0	0,999 8748	8696	8767	8737	+ 11	- 41	+ 30
1	9306	9278	9314	9299	+ 7	- 21	+ 15
2	9699	9704	9700	9701	- 2	+ 3	- 1
3	9929	9935	9928	9931	- 2	+ 4	- 3
4	1,000 0000	0000	0000	0000	0	0	0
5	0,999 9918	9916	9919	9918	0	- 2	+ 1
6	9684	9685	9688	9686	- 2	- 1	+ 2
7	9303	9307	9312	9307	- 4	0	+ 5
8	8777	8778	8792	8782	- 5	- 4	+ 10
9	8112	8107	8128	8116	- 4	- 9	+ 12
10	7309	7296	7327	7311	- 2	- 15	+ 16
11	6373	6351	6391	6372	+ 1	- 21	+ 19
12	5305	5273	5321	5300	+ 5	- 27	+ 21
13	4109	4067	4123	4100	+ 9	- 33	+ 23
14	2789	2738	2797	2775	+ 14	- 37	+ 22
15	1347	1290	1347	1328	+ 19	- 38	+ 19
16	0,998 9786	9722	9776	9761	+ 25	- 39	+ 15
17	8108	8041	8087	8079	+ 29	- 38	+ 8
18	6314	6242	6282	6279	+ 35	- 37	+ 3
19	4412	4333	4365	4370	+ 42	- 37	- 5
20	2399	2321	2339	2353	+ 46	- 32	- 14
21	0280	0211	0205	0232	+ 48	- 21	- 27
22	0,997 8057	7996	7972	8008	+ 49	- 12	- 36
23	5731	5683	5639	5684	+ 47	- 1	- 45
24	3305	3270	3207	3261	+ 44	+ 9	- 54

Wasserstoff- scala Temperatur	Scheel	Thiesen	Marek	Mittel	Abweichung vom Mittel in Einheiten d. 7. Stelle		
					Scheel- Mittel	Thiesen- Mittel	Marek- Mittel
25	0,997 0781	0749	0681	0737	+ 44	+ 12	— 56
26	0,996 8161	8121	8061	8114	+ 47	+ 7	— 53
27	5445	5401	5353	5400	+ 45	+ 1	— 47
28	2637	2595	2558	2597	+ 40	— 2	— 39
29	0,995 9737	9704	9679	9707	+ 30	— 3	— 28
30	6746	6731	6720	6732	+ 14	— 1	— 12
31	3667	3660	3682	3670	— 3	— 10	+ 12
32	0502						
33	0,994 7250						

In weiteren Spalten sind der Mittelwerth aus den Resultaten von Thiesen, Marek und mir, sowie die Abweichung aller drei Beobachter von diesem Mittel aufgeführt.

Diese Zusammenstellung lehrt, dass die Differenzen der Resultate, namentlich auch der nach verschiedenen Methoden ermittelten auf eine erträgliche Grösse herabgemindert sind; sie zeigen, dass im Intervall zwischen 0° und 30°, wenn man den Mittelwerth von allen drei Beobachtern zu Grunde legt, die Ausdehnung des Wassers bis auf wenige Mikroliter pro Liter nunmehr bekannt ist.