ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA

PROPRIETÀ DI UNA CLASSE D' INTEGRALI DI IRRAZIONALI ALGEBRICI
POSSIBILI CON SOLI LOGARITMI.

N O T A
DI PIUMA CARLO MARIA DA GENOVA.

1. Gli illustri Abel e Liouville hanno dimostrato (il primo nella Memoria a pagina 33 del primo volume delle sue opere complete, ed il secondo nella Nota: *Sui trascendenti elittici, di prima e di seconda specie, considerati come funzione dell' ampiezza*, nota che fa parte del vol: XIV del Giornale della Scuola Politecnica) hanno dimostrato il

TEOREMA. *Se l'integrale*

$$(1) \quad \int \frac{f dx}{\sqrt{R}}$$

è possibile con soli logaritmi, devono necessariamente esistere due polinomi interi, P e Q, i quali soddisfacciano alla equazione

$$(2) \quad (P + Q \sqrt{R})(P - Q \sqrt{R}) = P^2 - Q^2 R = \text{una costante},$$

ove si supponga che f ed R sieno polinomi interi rispetto alla x, l'ultimo dei quali non ammetta fattori multipli.

Tale teorema, che è base di ricerche importanti di questi due Grandi Analisti, può essere esteso, con poca modificazione, a tutti gli integrali della forma

$$\int \frac{f dx}{\theta^{\frac{1}{m}}},$$

ove f e θ rappresentano polinomi interi rispetto alla x, il secondo dei quali, se ammette un fattore della forma $(x - x_0)^p$, p essendo intero, si suppone $p < m$, e dove m è un numero *primo qualunque*.

La dimostrazione di questa proposizione, generalizzazione del teorema sopra ricordato, è scopo principale della presente nota.

2. Prima però di procedere a tale dimostrazione, mi giova ricordare alcune proposizioni; ed in primo luogo, che

L'integrale

$$(3) \quad \int \frac{f dx}{\theta^{\frac{1}{m}}}$$

le lettere f e θ conservano il significato che avevano nel numero precedente, preso fra limiti finiti, reali od immaginari, facendo percorrere alla variabile complessa x , fra detti limiti, una linea retta, non può mai essere infinito.

Dapprima è evidente, che se sulla porzione finita della retta, lungo la quale si effettua l'integrazione, non esistono punti pei quali l'espressione $\frac{f}{\theta^{\frac{1}{m}}}$ sia infinita, nemmeno il valore dell'integrale definito potrà divenirlo.

In secondo luogo, supponiamo che x_0 sia un valore della variabile complessa x , situato su detta porzione della retta lungo la quale si effettua l'integrazione, il quale faccia acquistare alla espressione $\frac{f}{\theta^{\frac{1}{m}}}$ un valore infinito. Tale valore della x , dovrà

necessariamente soddisfare alla equazione $\theta(x_0) = 0$, e perciò esisterà la relazione $\theta = (x - x_0)^n \theta_1$, ove $n < m$ e θ_1 è un polinomio, intero rispetto alla x , primo con $x - x_0$; e perciò, per le formole del Ch^{mo}. Cauchy, saremo condotti a considerare l'integrale definito singolare

$$(4) \quad \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\mu\epsilon} \frac{f dx}{\theta^{\frac{1}{m}}},$$

ove ϵ è una quantità piccolissima, e che si può supporre decrescere fino al limite zero, e μ una quantità finita. Dalla natura dell'integrale definito (4), e da quella di tutti gli altri analoghi allo stesso, e che prendono origine dalle altre radici della equazione $\theta = 0$, che per avventura si potessero trovare sulla porzione della retta d'integrazione compresa fra i limiti, quella dipende dell'integrale definito (3). E l'integrale definito (3), preso nel modo stato indicato, non potrà riuscire nè infinito, nè indeterminato, se tale non è l'integrale definito (4), il quale è atto a rappresentare uno qualunque degli integrali definiti singolari, dalla valutazione dei quali, quella dipende del (3).

Ora l'integrale (4) può venir calcolato nel modo seguente,

$$\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\mu\epsilon} \frac{f dx}{\theta^{\frac{1}{m}}} = \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\mu\epsilon} \frac{f dx}{(x - x_0)^{\frac{n}{m}} \theta_1^{\frac{1}{m}}} = \frac{f(x)}{\theta_1^{\frac{1}{m}}(x)} \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\mu\epsilon} \frac{dx}{(x - x_0)^{\frac{n}{m}}},$$

ove χ rappresenta un valore della x , preso sulla retta d'integrazione, intermedio fra $x_0 - \epsilon$ ed $x_0 + \mu\epsilon$. Dalla relazione precedente risulta

$$\frac{f(\chi)}{\theta_1^{\frac{1}{m}}(\chi)} \int_{x_0}^{x_0 + \mu\epsilon} \frac{dx}{(x - x_0)^{\frac{n}{m}}} = \frac{m}{m - n} \frac{f(\chi)}{\theta_1^{\frac{1}{m}}(\chi)} \left((\epsilon\mu)^{\frac{m-n}{m}} - (-\epsilon)^{\frac{m-n}{m}} \right)$$

e facendo tendere ϵ verso zero, $\frac{f(\chi)}{\theta_1^{\frac{1}{m}}(\chi)}$ tende verso $\frac{f(x_0)}{\theta_1^{\frac{1}{m}}(x_0)}$, e quindi verso un va-

lore finito; ma la quantità fra parentesi, poichè $n < m$, tenderà verso zero, e sarà nulla con ϵ , dunque il valore dell'integrale definito singolare (4) tende verso zero, e perciò l'integrale definito (3), che consideriamo, non può divenire nè infinito nè indeterminato, quando si prenda nel modo indicato, fra limiti finiti.

3. Altra proposizione, che mi giova ricordare, è la seguente :

Se la funzione

$$X = P_0 + P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + P_2 \theta^{\frac{2}{m}} + \dots + P_{m-1} \theta^{\frac{m-1}{m}},$$

nella quale $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{m-1}$ sono polinomi interi rispetto alla x , si annulla per $x = a$; il polinomio θ essendo sempre nelle condizioni fin qui supposte, ed m uno intero qualunque, si verificherà una di queste due cose: 1° quando θ non è divisibile per $x - a$, X , divisa per una certa potenza di esponente intero di $x - a$, conserverà un valore finito diverso da zero per $x = a$. 2° quando $x = a$ divide θ , allora X divisa per una certa potenza di $x - a$, di esponente intero, o frazionario il denominatore del quale sia divisore di m , conserverà un valore finito per $x = a$.

1° È certo che nessuna delle derivate successive, ad indice intero, di X può divenire infinita per $x = a$; poichè ridotti allo stesso denominatore tutti i termini dei quali tale derivata è composta, questo denominatore comune sarà una certa potenza di $\theta^{\frac{1}{m}}$, e quindi da zero differente, poichè $\theta(a)$ è da zero diverso.

Le derivate successive di X non possono essere tutte nulle, per $x = a$. Diffatti il prodotto, ove α è radice primitiva dell'equazione $x^m - 1 = 0$,

$$(5) \quad (P_0 + P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots + P_{m-1} \theta^{\frac{m-1}{m}}) (P_0 + \alpha P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots + \alpha^{m-1} P_{m-1} \theta^{\frac{m-1}{m}}) \dots \\ (P_0 + \alpha^{m-1} P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots + \alpha P_{m-1} \theta^{\frac{m-1}{m}})$$

essendo funzione simmetrica delle radici dell'equazione

$$(6) \quad \{\theta^{\frac{1}{m}}\}^m = \text{funzione razionale della } x,$$

si ridurrà ad una funzione intera della x , e quindi non potrà essere in rapporto finito, che con una potenza di grado finito di $x - a$, nell'ipotesi di $x = a$.

Si osservi che nessuno dei fattori del prodotto (5), nè delle derivate degli stessi diviene infinito per $x = a$; dunque nessuno di tali fattori assieme a tutte le sue derivate può esser nullo per $x = a$, senza di che lo sarebbe il prodotto (5) e tutte le sue derivate, il che è impossibile. Diffatti una derivata d'ordine qualunque, intero del prodotto (5) può essere decomposta in una somma di prodotti, ciascuno dei quali abbia per fattore, od uno dei fattori del prodotto (5) od una delle derivate di tale fattore, le quali se tutte, assieme a questo fattore, fossero nulle, nulle sarebbero pure tutte le derivate del prodotto (5), dunque ec.

Se s'indica con q , l'ordine della prima derivata di X , che non si annulla per $x = a$, $\frac{X}{(x-a)^q}$, sarà evidentemente finita per $x=a$, con che è provata la prima parte della proposizione sopra ricordata (*).

2° Se si ammette che $x - a$ sia fattore di $\theta(x)$ allora $\theta(a) = 0$, e quindi per $x = a$ si ha

$$P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + P_2 \theta^{\frac{2}{m}} + \dots + P_{m-1} \theta^{\frac{m-1}{m}} = 0,$$

ma per ipotesi, si ha pure $X = 0$, e per la sottrazione della prima di queste equazioni dalla seconda si ottiene, nell'ipotesi istessa, $P_0 = 0$.

Sia k un'intero, e θ_1 un polinomio intero rispetto alla x , non divisibile per $x-a$, determinati in modo che si abbia $\theta = (x-a)^k \theta_1$, allora sarà

$$X = P_0 + P_1(x-a)^{\frac{k}{m}} \theta_1^{\frac{1}{m}} + P_2(x-a)^{\frac{2k}{m}} \theta_1^{\frac{2}{m}} + \dots + P_{m-1}(x-a)^{\frac{(m-1)k}{m}} \theta_1^{\frac{m-1}{m}}.$$

Quindi tutti i termini di X saranno divisibili, ciascuno per una certa potenza di $x-a$.

Fra i diversi interi $0, k, 2k, \dots, (m-1)k$, scegliamo gli incongrui rispetto al modulo m , e sieno, $0, p_1, p_2, \dots, p_n$ i loro residui minimi positivi relativamente al modulo suddetto, ciascuno d'essi perciò, sarà dagli altri differente, e può essere residuo di parecchi degli interi contenuti nella serie $0, k, 2k, \dots, (m-1)k$. Radunando tutti i termini di X nei quali il residuo minimo positivo del numeratore dello esponente di $x-a$ è lo stesso, si avrà

$$X = Q_0 + Q_1(x-a)^{\frac{p_1}{m}} + Q_2(x-a)^{\frac{p_2}{m}} + \dots + Q_n(x-a)^{\frac{p_n}{m}}$$

ove $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ saranno polinomi della forma $\chi_0 + \chi_1 \theta_1^{\frac{1}{m}} + \text{etc.}$, e dove $\chi_0, \chi_1, \text{etc.}$ sono funzioni intere della x .

Per il detto relativamente al primo caso, poichè θ_1 non è divisibile per $x-a$,

(*) Allo stesso risultato si perviene mediante lo sviluppo in serie della funzione X , metodo che però ho creduto conveniente evitare.

$Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ saranno ciascuno in rapporto finito con una certa potenza intera di $x - a$ (l'esponente ne può essere anche zero); per un certo numero di essi, l'esponente di $x - a$ potrà avere lo stesso valore, e fra questi ve ne sarà uno più piccolo che negli analoghi, fra quelli nei quali detto esponente è più piccolo che negli altri, quello scegliamo che è coefficiente di $(x - a)^{\frac{1}{m}}$ con l'esponente inferiore a tutti gli altri; due di questi ultimi esponenti non possono mai essere uguali tra loro.

Sia $Q_r(x - a)^{\frac{p_r}{m}}$ tale termine, e sia q_r l'esponente della potenza intera, di $x - a$, che è in rapporto finito con Q_r , e q_p il numero corrispondente a q_r per Q_p . Allora facendo

$$Y = X - Q_r(x - a)^{\frac{p_r}{m}}$$

e dividendo i due membri di questa eguaglianza per $(x - a)^{q_r + \frac{p_r}{m}}$, Y per $x = a$ si annullerà. Diffatti tutti i termini del quoziente del secondo membro, nella fatta ipotesi, si annullano poichè in quelli pei quali $q_p = q_r$, l'esponente $p_p > p_r$, e per quelli nei quali lo esponente $q_p > q_r$ si ha $q_p = q_r + 1$ ovvero $q_p > q_r + 1$, ora essendo $p_r < m$ sarà $q_r + \frac{p_r}{m} < q_r + 1$ e perciò $q_p > q_r + \frac{p_r}{m}$ e quindi tutti i

termini di Y divisi per $(x - a)^{q_r + \frac{p_r}{m}}$ contengono ancora per fattore $x - a$ con un' esponente positivo, e quindi sono nulli per $x = a$, dunque per $x = a$,

$$\frac{X}{(x - a)^{q_r + \frac{p_r}{m}}} = \frac{Q_r(x - a)^{\frac{p_r}{m}}}{(x - a)^{q_r + \frac{p_r}{m}}} = \frac{Q_r}{(x - a)^{q_r}}$$

= una quantità finita diversa da zero.

Quindi la potenza di $x - a$, che è in questo secondo caso in rapporto finito con X o è intera, od il suo esponente ha per divisore m , ad un suo fattore, con che resta provata la proposizione ricordata.

4. Consideriamo ora l'integrale

$$(7) \quad \int \frac{f dx}{\theta^{\frac{1}{m}}}$$

ove f e θ soddisfano alle condizioni enunciate al N° 1.

È noto, per la Memoria del Sig. Tchebichef, inserita nel volume pel 1853 del Giornale di Matematica pura ed applicata del Sig. Liouville, che quando l'integrale (7)

può essere espresso con soli logaritmi, sarà sempre lecito supporre l'equazione seguente identicamente soddisfatta,

$$(8) \quad \int \frac{f dx}{\theta^{\frac{1}{m}}} = A \log \prod_{n=0}^{n=m-1} \left\{ P_0 + \alpha^n P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \alpha^{2n} P_2 \theta^{\frac{2}{m}} + \dots + \alpha^{(m-1)n} P_{m-1} \theta^{\frac{m-1}{m}} \right\} \alpha^n$$

ove i $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{m-1}$ sono polinomi interi rispetto alla x , ed α radice primitiva dell'equazione $x^m - 1 = 0$, e dove $\prod_{n=0}^{n=m-1}$ indica, al solito, il prodotto di tutti i fattori che si ottengono ponendo in quello, che da tale segno è preceduto, al luogo di n , successivamente tutti gli interi compresi fra zero ed $m - 1$ inclusivamente.

5. Se θ ammette $(x - a)^p$ per fattore, e che f non sia esattamente divisibile per $(x - a)^{p-1}$, P_0 sarà divisibile per $x - a$.

Dalla differenziazione dell'equazione (8) immediatamente si ricava

$$(9) \quad \frac{1}{A} \frac{f}{\theta^{\frac{1}{m}}} = \sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{\alpha^n (P_0 + P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots) \dots (P_0 + \alpha^{n-1} P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots) (P_0 + \alpha^{n+1} P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots) \dots}{(P_0 + \alpha^n P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots + \alpha^{(m-1)n} P_{m-1} \theta^{\frac{m-1}{m}})} \frac{d}{dx} (P_0 + \alpha^n P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots + \alpha^{(m-1)n} P_{m-1} \theta^{\frac{m-1}{m}})$$

$$= \sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{\alpha^n (P_0 + P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots) \dots (P_0 + \alpha^{n-1} P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots) (P_0 + \alpha^{n+1} P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots) \dots}{(P_0 + P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots) \dots (P_0 + \alpha^{m-1} P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots)} \frac{d}{dx} P_0$$

$$+ \dots + \sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{\alpha^{n(r+1)} (P_0 + P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots) \dots (P_0 + \alpha^{n-1} P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots) (P_0 + \alpha^{n+1} P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots) \dots}{(P_0 + \alpha^{n-1} P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots) \dots (P_0 + \alpha^{m-1} P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots)} \frac{d}{dx} (P_r \theta^{\frac{r}{m}})$$

$$+ \dots + \sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{\alpha^{mn} (P_0 + P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots) \dots (P_0 + \alpha^{n-1} P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots) (P_0 + \alpha^{n+1} P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots) \dots}{(P_0 + \alpha^{m-1} P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots) \dots (P_0 + \alpha^{m-1} P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots)} \frac{d}{dx} (P_{m-1} \theta^{\frac{m-1}{m}})$$

Nel secondo membro di questa identità consideriamo in particolare il termine generico

$$(10) \quad \sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{\alpha^{n(r+1)} (P_0 + P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots) \dots (P_0 + \alpha^{n-1} P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots) (P_0 + \alpha^{n+1} P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots) \dots}{(P_0 + \alpha^{m-1} P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots) \frac{d}{dx} (P_r \theta^{\frac{r}{m}})} \\ = \frac{\frac{d}{dx} (P_r \theta^{\frac{r}{m}})}{\theta^{\frac{r+1}{m}}} \sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{\alpha^{n(r+1) \frac{r+1}{m}} (P_0 + P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots) \dots (P_0 + \alpha^{n-1} P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots) (P_0 + \alpha^{n+1} P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots) \dots}{(P_0 + \alpha^{m-1} P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots)}$$

Ora il numeratore ed il denominatore della frazione risultante dal $\sum$ del secondo membro della identità (10), sono funzioni simmetriche delle radici della equazione (6), e quindi funzioni razionali intere della x . Il numeratore poi di questa frazione si annulla per ciascuna delle radici dell'equazione $\theta = 0$, dunque esso ammetterà θ come fattore (*), e perciò potrà essere messo sotto la forma θX_r , X_r essendo funzione intera della x . Rappresento con Y la funzione della x , essa pure intera, che ne è denominatore. In tale modo il termine (10), che attualmente consideriamo, prenderà la forma

$$\frac{1}{\theta^{\frac{r+1}{m}}} \cdot \frac{\theta X_r}{Y} \frac{d}{dx} (P_r \theta^{\frac{r}{m}}) = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{m}}} \cdot \frac{X_r}{Y} \left(P'_{r,\theta} + \frac{r}{m} P_r \theta' \right)$$

ed indicando con $X_0, X_1, \dots, X_{m-1}$, le funzioni intere della x analoghe ad X_r , provenienti dagli altri termini della equazione identica (9), questa ultima equazione potrà essere scritta nel modo seguente

$$(11) \quad \frac{f}{\theta^{\frac{1}{m}}} = \frac{A}{Y \theta^{\frac{1}{m}}} \sum_{r=0}^{r=m-1} \left(P'_{r,\theta} + \frac{r}{m} P_r \theta' \right) X_r,$$

e moltiplicandone i due membri per $Y \theta^{\frac{1}{m}}$ si ottiene

$$fY = A \sum_{r=0}^{r=m-1} \left(P'_{r,\theta} + \frac{r}{m} P_r \theta' \right) X_r.$$

(*) Tale proposizione è evidentemente dimostrata così, solamente pel caso in cui θ non ammetta fattori multipli, ma nel caso opposto è facile lo stabilirla pure, facendo uso del notissimo metodo di supporre dapprima le radici corrispondenti a tali fattori poco tra loro differenti, e fare poi decrescere le loro differenze, fintantochè al limite zero, queste radici vengono a riuscire tra loro eguali, e fattori corrispondenti, divenendolo pure, si riducano, in θ , ad un fattore multiplo.

Mettiamo in evidenza il fattore, $(x - a)^p$ di θ , ponendo

$$\theta = (x - a)^p \theta_1 \quad \text{da cui} \quad \theta' = p(x - a)^{p-1} \theta_1 + (x - a)^p \theta'_1,$$

fatte tali sostituzioni, dividendo i due membri dell'identità così ottenuta per $(x - a)^{p-1}$, si avrà

$$(12) \quad \frac{fY}{(x - a)^{p-1}} = A \sum_{r=0}^{m-1} \left(P'_r (x - a) \theta_1 + \frac{r}{m} p P_r \theta_1 + \frac{r}{m} (x - a) \theta'_1 P_r \right) X_r :$$

il secondo membro dell'eguaglianza (12) è un polinomio intero rispetto alla x , dunque lo stesso deve essere del primo membro, ma $\frac{f}{(x - a)^{p-1}}$ è una frazione, poichè, per ipotesi, f non ammette il fattore $(x - a)^{p-1}$, dunque Y dovrà esso pure essere divisibile per $x - a$, e quindi nullo per $x = a$. Ma, per ipotesi, avendo $\theta(a) = 0$, Y , per $x = a$ si riduce al valore di P'_0 , ove al luogo della x mettasi a , e quindi per $x = a$ si dovrà avere $P'_0 = 0$ e quindi $P_0 = 0$. Ma P_0 è un polinomio intero, rispetto alla x , che si annulla per $x = a$, dunque esso deve ammettere $x - a$ per fattore; nel che consiste appunto la proposizione ch'io mi proponeva dimostrare.

6. Ritorniamo ora alla equazione generale (8), (e da qui in poi supporrò che m sia *numero primo*) e consideriamo l'integrale preso fra due limiti finiti, dei quali ci riserbiamo di fissare i valori in seguito. Effettuando l'integrazione, facendo percorrere alla variabile reale od immaginaria fra detti limiti, la retta che li riunisce. Applicando, a questo integrale, la teoria esposta dal Sig. Raabe nel suo trattato che ha per titolo *die differenzial-und-integral Rechnung* dal N° 130 al 134, si dovranno, per calcolarne il valore, sostituire nella espressione che si trova nel secondo membro della equazione (8), presa in senso *determinato*, al luogo della variabile i due limiti, e sottrarre il valore che ottiene pel limite inferiore, da quello che dalla sostituzione del superiore si ricava. Ben inteso però, che è d'uopo aver riguardo (quando l'espressione della quale si prende il logaritmo è immaginaria) alle variazioni del suo argomento, cioè osservare se sia da prendere, ai due limiti il valore minimo positivo di tale argomento, o questo valore aumentato di un certo determinato multiplo di Π corrispondente al valore dato della sua tangente (*).

(*) Non credo inopportuno lo spiegare queste generalità, applicandole all'esempio dell'integrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{che, come è noto, ha per valore} \quad -\pi\sqrt{-1}.$$

Dapprima, messo l'integrale indefinito sotto la forma analoga a quella del teorema del Sig.^r Tchebichef, può scriversi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{2} \log \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} + c$$

se si sostituissero immediatamente i due limiti in questa espressione, senza aver riguardo al variar del-

7. Poichè l'integrale del primo membro della (8) non può divenire infinito, quando si prenda fra limiti finiti nel modo indicato al N° 2.

Sia in tal caso x_1 un valore della x pel quale la funzione

$$(13) \quad P_0 + \alpha^n P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \alpha^{2n} P_2 \theta^{\frac{2}{m}} + \dots + \alpha^{n(m-1)} P_{m-1} \theta^{\frac{m-1}{m}} = 0.$$

La funzione (13) per quanto fu già dimostrato al N° 3 sarà in rapporto finito con una certa potenza di $x - x_1$ l'esponente della quale, sarà *razionale* positivo intero o *frazionario* nella ipotesi di $x - x_1$.

Nell'espressione (13) ponendo $\beta + \gamma \sqrt{-1}$ al luogo di x , essa prenderà la forma $X_n + \Omega_n \sqrt{-1}$, X_n ed Ω_n essendo funzioni reali di β e di γ . Scegliamo il limite inferiore x_0 dell'integrale, e perciò i valori corrispondenti a_0 , b_0 di β e di γ in modo che tra esso ed x_1 (pel quale i valori corrispondenti di β e γ sono rappresentati da a_1 , b_1) non esista alcuna coppia di valori, di β e γ , sulla retta d'integrazione per la

l'argomento, si avrebbe

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2} \log \frac{+1}{+1} - \frac{1}{2} \log \frac{-1}{-1} = 0 - 0 = 0,$$

il che è evidentemente assurdo.

Ciò proviene dacchè le espressioni delle quali si prendono i logaritmi, nel secondo membro della equazione precedente, benchè ai limiti, abbiano argomenti, le tangenti dei quali sono eguali, pure tali argomenti non sono eguali. Difatti se facciamo $x = \cos z$ potremo porre

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2} \log \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} + C = \frac{1}{2} \log(\cos z + \sqrt{-1} \sin z) - \frac{1}{2} \log(\cos(2\Pi-z) + \sin(2\Pi-z)\sqrt{-1}) + C.$$

Si osservi che $\operatorname{tg} z = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ha lo stesso valore per $x = -1$ come per $x = +1$, come pure ai due

due limiti non differisce $\operatorname{tg}(2\Pi - z) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Il primo di questi rapporti, mentre x varia da -1

a $+1$, passa una sola volta per l'infinito e vi passa diventando positivo da negativo che era, e quindi

fra i due limiti l'arco z è diminuito di Π ; si prova in modo analogo che invece, il rapporto $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

diventando negativo di positivo che era, passando per l'infinito una volta soltanto, mentre x varia da -1 a $+1$, l'arco $2\Pi - z$ in questo intervallo aumenterà di Π , dunque dovremo porre, indicando, con γ un arco la tangente del quale sia zero,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \frac{1}{2} \log [\cos(\gamma - \Pi) + \sin(\gamma - \Pi)\sqrt{-1}] - \frac{1}{2} \log [\cos(3\Pi - \gamma) + \sin(3\Pi - \gamma)\sqrt{-1}] \\ &\quad + \frac{1}{2} \log [\cos(2\Pi - \gamma) + \sin(2\Pi - \gamma)\sqrt{-1}] - \frac{1}{2} \log [\cos \gamma + \sin \gamma \sqrt{-1}] \\ &= \frac{1}{2} \log (e^{(\gamma-\Pi)\sqrt{-1}}) - \frac{1}{2} \log (e^{(3\Pi-\gamma)\sqrt{-1}}) + \frac{1}{2} \log (e^{(2\Pi-\gamma)\sqrt{-1}}) - \frac{1}{2} \log (e^{\gamma\sqrt{-1}}) \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2} (\gamma - \Pi - 3\Pi + \gamma + 2\Pi - \gamma - \gamma) = -\frac{2}{2} \Pi \sqrt{-1} = -\Pi \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Ciò che dovevasi trovare.

quale X_n sia nullo. Questo è sempre possibile prendendo tale limite inferiore, x_0 , sufficientemente ravvicinato ad x_1 , si può inoltre supporre, che sulla retta d'integrazione, fra x_0 ed x_n , X_n e Ω_n sieno sempre reali.

Indicando con $X_0, \Omega_0, X_1, \Omega_1$, etc. funzioni analoghe a X_n, Ω_n ed avendo scelto x_0 , in modo da soddisfare per tutte alle condizioni surriferite relativamente a X_n, Ω_n , potremo porre

$$\begin{aligned}
 (14) \quad \int_{x_0}^{x_1} \frac{f dx}{\theta^{\frac{1}{n}}} &= A \left\{ \log(X_0 + \Omega_0 \sqrt{-1}) + \alpha \log(X_1 + \Omega_1 \sqrt{-1}) + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \alpha^{m-1} \log(X_{m-1} + \Omega_{m-1} \sqrt{-1}) \right\}_{x_0}^{x_1} \\
 &= A \left\{ \log(\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1}) + \alpha \log(\cos \varphi_1 + \sin \varphi_1 \sqrt{-1}) + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \alpha^{m-1} \log(\cos \varphi_{m-1} + \sin \varphi_{m-1} \sqrt{-1}) \right\}_{x_0}^{x_1} \\
 &\quad + A \left\{ \log \sqrt{X_0^2 + \Omega_0^2} + \alpha \log \sqrt{X_1^2 + \Omega_1^2} + \dots + \alpha^{m-1} \log \sqrt{X_{m-1}^2 + \Omega_{m-1}^2} \right\}_{x_0}^{x_1}
 \end{aligned}$$

$$\text{ove } \lg \varphi_r = \frac{\Omega_r}{X_r}.$$

La prima linea del valore di questo integrale, poichè, tra x_0 ed x_1 , φ_r è reale, e $\cos \varphi_r$ non si annulla, non può divenire infinita.

La seconda al limite superiore, cioè per $x = x_1$, è infinita (poichè $\sqrt{X_n^2 + \Omega_n^2}$ è nullo) se assieme a questo, qualche altro modulo non è eguale a zero. Questo modulo $\sqrt{X_n^2 + \Omega_n^2}$ è nullo perchè nulla è l'espressione (13) per tale valore della x . E poichè essa espressione, come è stato dimostrato, è in rapporto finito con una certa potenza, affetta da esponente razionale, di $x - x_1$ nella ipotesi di $x = x_1$, tale modulo dovrà essere pure in rapporto finito col modulo corrispondente a tale potenza di $x - x_1$, per tale valore della variabile. Ed effettuandosi l'integrazione in linea retta potremo esprimere tutta la seconda linea del secondo membro della (14) in funzione di β o di γ , di β per esempio in virtù della relazione $\beta = g\gamma + h$ che si suppone legare le due variabili reali β e γ . Quindi ancora il modulo di $x - x_1$ innalzato ad una certa potenza, di esponente razionale positivo, sarà nullo per $x = x_1$, dovrà essere in rapporto finito quando sia espresso per mezzo di β colla stessa potenza di $\beta - a_1$ per $\beta = a_1$, e quindi ancora $\sqrt{X^2 + \Omega^2}$ dovrà essere per $\beta = a_1$, in rapporto finito colla stessa potenza di $\beta - a_1$: indicherò con p_n l'esponente di questa potenza, e con T_n una funzione di β non nulla nè infinita per $\beta = a_1$, de-

terminata per mezzo dell'equazione

$$\frac{\sqrt{X_n^2 + \Omega_n^2}}{(\beta - a)^{p_n}} = T_n.$$

Si osservi inoltre, poichè per la sostituzione del limite inferiore nell'espressione dell'integrale indefinito nessuno dei moduli si annulla, risulterà che indicando con P una quantità finita si avrà

$$\begin{aligned} (15) \quad \int_{x_0}^{x_1} \frac{f dx}{\theta^m} &= P + A \left\{ \log(\beta - a_1)^{p_0} T_0 + \alpha \log(\beta - a_1)^{p_1} T_1 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \alpha^{m-1} \log(\beta - a_1)^{p_{m-1}} T_{m-1} \right\} \\ &= P + A \left\{ \log(T_0 T_1^\alpha \dots T_{m-1}^{\alpha^{m-1}}) + (p_0 + \alpha p_1 + \dots + \alpha^{m-1} p_{m-1}) \log(\beta - a_1) \right\} \end{aligned}$$

ove al posto di β , fra le parentesi si ponga a_1 , e dove T_0 , T_1 etc. sono quantità che hanno proprietà analoghe a quelle di T_n : allora $\log(\beta - a_1)$ è infinito, $\log(T_0 T_1^\alpha \dots T_{m-1}^{\alpha^{m-1}})$ è finito, perchè per ipotesi nessuna delle funzioni T_0 è nulla od infinita per $\beta = a_1$. Quindi il valore del secondo membro della (15) sarebbe infinito se non si avesse l'equazione

$$(16) \quad p_0 + \alpha p_1 + \alpha^2 p_2 + \dots + \alpha^{m-1} p_{m-1} = 0$$

dunque questa equazione deve necessariamente essere soddisfatta dagli esponenti razionali p_0 , p_1 , p_2 ... p_{m-1} .

Ma si ha pure

$$(17) \quad 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-1} = 0$$

dalle equazioni (16) e (17) ne seguirebbe

$$(18) \quad p_0 - p_{m-1} + (p_1 - p_{m-1})\alpha + (p_2 - p_{m-1})\alpha^2 + \dots + (p_{m-2} - p_{m-1})\alpha^{m-2} = 0.$$

Si sa, d'altronde, che l'equazione (17) è irriducibile (*Serret, Algèbre Supérieure*, pagina 516) e perciò niuna delle sue radici può renderne soddisfatta un'altra (18), a coefficienti pure razionali di grado inferiore a quello della (17), a meno che essa non sia identica, e quindi dovrà aversi la serie di eguaglianze

$$p_{m-1} = p_{m-2} = p_{m-3} = \dots = p_2 = p_1 = p_0.$$

8. Il seguito di queste eguaglianze legittima il sistema seguente di equazioni lineari. Poichè se i moduli devono essere tutti nulli e fra loro in rapporto finito per $x = x_1$, come risulta da tale sistema di eguaglianze, anche le funzioni, cui tali mo-

ovvero

$$(20) \quad \frac{P_n \theta^{\frac{n}{m}}}{(x - x_1)^{p_0}} = (\lambda_0 + \alpha^{-n} \lambda_1 + \alpha^{-2n} \lambda_2 + \dots + \alpha^{-n(m-1)} \lambda_{m-1}).$$

Se in questa equazione si fa $x = x_1$ il secondo membro conserva un valore finito, perciò dovendolo conservare anche il primo, sarà necessario che $(x - x_1)^{p_0}$ sia fattore di $P_n \theta^{\frac{n}{m}}$.

9. Vediamo l'immediata conseguenza di ciò.

Convorrà qui pure esaminare successivamente i due casi, quando cioè, θ non è divisibile per $(x - x_1)$, e quando tale divisione può essere eseguita senza resto.

10. Sia θ primo con $x - x_1$. Poichè in tal caso, tutti i termini $P_n \theta^{\frac{n}{m}}$ sono divisibili per $(x - x_1)^{p_0}$ e θ è primo con $x - x_1$, risulterà che tutti i coefficienti $P_0, P_1, \dots, P_{m-1}$ saranno divisibili per $(x - x_1)^{p_0}$ e perciò potremo porre, indicando con p l'esponente della maggiore potenza di $x - x_1$ per la quale tali coefficienti sono tutti divisibili, ed indicando egualmente con $Q_0, Q_1, \dots, Q_{m-1}$ polinomi interi rispetto alla x , uno dei quali almeno non è divisibile per $x - x_1$,

$$P_0 = (x - x_1)^p Q_0, \quad P_1 = (x - x_1)^p Q_1, \quad \dots, \quad P_{m-1} = (x - x_1)^p Q_{m-1}.$$

Allora l'equazione (8) si ridurrà alla seguente

$$(21) \quad \int \frac{f dx}{\theta^{\frac{1}{m}}} = A \log \prod_{n=0}^{n=m-1} \left\{ (x - x_1)^p Q_0 + \alpha^n (x - x_1)^p Q_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots + \alpha^{n(m-1)} (x - x_1)^p Q_{m-1} \theta^{\frac{m-1}{m}} \right\}^{\alpha^n} \\ = A \log \prod_{n=0}^{n=m-1} \left\{ Q_0 + \alpha^n Q_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots + \alpha^{n(m-1)} Q_{m-1} \theta^{\frac{m-1}{m}} \right\}^{\alpha^n} \\ + A p (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-1}) \log(x - x_1)$$

ovvero, poichè $1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-1} = 0$ risulterà

$$(22) \quad \int \frac{f dx}{\theta^{\frac{1}{m}}} = A \log \prod_{n=0}^{n=m-1} \left\{ Q_0 + \alpha^n Q_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots + \alpha^{n(m-1)} Q_{m-1} \theta^{\frac{m-1}{m}} \right\}^{\alpha^n}.$$

Operando allo stesso modo si perverrà, senza alterare la forma della (8), ad una sua trasformata, nella quale, i polinomi interi della x , coefficienti delle varie potenze di $\theta^{\frac{1}{m}}$, nella espressione dello integrale, non ammetteranno alcun fattore, funzione della x , che li divida tutti simultaneamente, a meno che tale fattore non divida pure θ ,

Per cui la funzione generica

$$P_0 + \alpha P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \alpha^2 P_2 \theta^{\frac{2}{m}} + \dots + \alpha^{n(m-1)} P_{m-1} \theta^{\frac{m-1}{m}}$$

può già supporre formata in modo, che se si annulla, per valori finiti della x , tali valori rendano pure θ eguale a zero.

11. Sia ora $x - x_1$ uno di questi fattori di θ . Indichiamo con θ_1 un polinomio intero rispetto alla x , non divisibile per $x - x_1$, determinato in modo che si abbia $\theta = (x - x_1)^k \theta_1$, dove k rappresenta un'intero inferiore di m .

Ammesse dunque le fatte ipotesi, ed i risultati del n° 3, converrà supporre che P_0 sia esattamente divisibile per $x - x_1$ (ed abbiamo visto al n° 5 un caso in cui P_0 e θ debbono, per uno stesso valore attribuito alla variabile x , ridursi simultaneamente a zero). La massima potenza di $x - x_1$ che dividerà esattamente tutti i ter-

mini $P_n \theta^{\frac{n}{m}}$ o avrà un'esponente intero od un'esponente frazionario, il denominatore del quale sarà m (n° 3) poichè m è un numero primo. Nel primo caso, indichiamo con $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$ i residui minimi positivi di $k, 2k, \dots, (m-1)k$ rispetto al modulo m , e con $n_1, n_2, \dots, n_{m-1}$ i multipli di m contenenti in $k, 2k, \dots, (m-1)k$, rispettivamente. Indicheremo pure con $Q_0, Q_1, \dots, Q_{m-1}$ polinomi interi, rispetto alla x , nessuno dei quali sia divisibile per $x - x_1$, determinati per mezzo delle equazioni

$$P_0 = (x - x_1)^{p_0} Q_0, \quad P_1 = (x - x_1)^{p_1} Q_1, \quad \dots, \quad P_{m-1} = (x - x_1)^{p_{m-1}} Q_{m-1}$$

si avrà

$$\begin{aligned} (23) \quad P_0 + \alpha^n P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots + \alpha^{n(m-1)} P_{m-1} \theta^{\frac{m-1}{m}} &= (x - x_1)^{p_0} Q_0 \\ &+ \alpha^n (x - x_1)^{p_1 + n_1} Q_1 (x - x_1)^{\frac{k_1}{m}} \theta_1^{\frac{1}{m}} \\ &+ \alpha^{2n} (x - x_1)^{p_2 + n_2} Q_2 (x - x_1)^{\frac{k_2}{m}} \theta_1^{\frac{2}{m}} \\ &+ \dots \\ &+ \alpha^{n(m-1)} (x - x_1)^{p_{m-1} + n_{m-1}} Q_{m-1} (x - x_1)^{\frac{k_{m-1}}{m}} \theta_1^{\frac{m-1}{m}}. \end{aligned}$$

Ora poichè l'esponente della potenza di $x - x_1$ per la quale diviso il primo membro della (23) esso più non si annulla, per $x = x_1$, e per tale valore della x resta finito, è un'intero ciò dovendo verificarsi pure pel secondo membro, tale esponente dovrà essere eguale a p_0 . Non può essere maggiore. Diffatti, in tale ipotesi, è facile vedere che il secondo membro della (23); quando fosse diviso per $(x - x_1)^h$, ove $h > p_0$, per $x - x_1$ diverrebbe infinito, nè h può essere a p_0 inferiore, perchè

allora essa dovrebbe essere eguale al più piccolo degli interi $p_i + n_i$, $p_r + n_r$, ec. ed il secondo membro per $x = x_i$ si ridurrebbe a zero mentre per ipotesi il primo sarebbe da zero differente, ciò che è assurdo, dunque si dovrà avere l'esponente della potenza di $x - x_i$ che per $x = x_i$ è in rapporto finito dal primo membro della (23) eguale a p_0 .

Vediamo ora, come il caso in cui l'esponente di $x - x_i$ nella potenza in discorso di tale binomio, abbia per denominatore m possa venir ridotto al precedente.

Si osservi perciò l'eguaglianza

$$\log \prod_{n=0}^{n=m-1} \left\{ P_0 + \alpha^n P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots + \alpha^{n(m-1)} P_{m-1} \theta^{\frac{m-1}{m}} \right\} \alpha^n \\ = \frac{1}{m} \log \prod_{n=0}^{n=m-1} \left\{ \left(P_0 + \alpha^n P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots + \alpha^{n(m-1)} P_{m-1} \theta^{\frac{m-1}{m}} \right)^m \right\} \alpha^n$$

Se si sviluppa la m^{ma} potenza indicata nel secondo membro della eguaglianza precedente, e si riducano gli esponenti di $\theta^{\frac{1}{m}}$ per mezzo della (6), e quelli di α^n per mezzo della $(\alpha^n)^m = 1$ si vede facilmente che si avrà

$$\frac{1}{m} \log \prod_{n=0}^{n=m-1} \left\{ \left(P_0 + \alpha^n P_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots + \alpha^{n(m-1)} P_{m-1} \theta^{\frac{m-1}{m}} \right)^m \right\} \alpha^n \\ = \frac{1}{m} \log \prod_{n=0}^{n=m-1} \left(A_0 + \alpha^n A_1 \theta^{\frac{1}{m}} + \dots + \alpha^{n(m-1)} A_{m-1} \theta^{\frac{m-1}{m}} \right) \alpha^n$$

ove $A_0, A_1, \dots, A_{m-1}$ sono polinomi interi rispetto alla x .

Si osservi inoltre che se $(x - x_i)^{\frac{q}{m}}$ è la potenza di $x - x_i$ in rapporto finito con $P_0 + \dots + \alpha^{n(m-1)} P_{m-1} \theta^{\frac{m-1}{m}}$ per $x = x_i$; $(x - x_i)^q$ sarà, nella stessa ipotesi, in rapporto finito con $A_0 + \dots + \alpha^{n(m-1)} A_{m-1} \theta^{\frac{m-1}{m}}$, e q essendo un'intero questo caso è ridotto così al precedente.

Quando l'esponente in discorso è intero, (e sempre lo possiamo supporre tale) la relazione (8) combinata colla (23) ci fornisce la relazione seguente

$$\int \frac{f dx}{\theta^{\frac{1}{m}}} = A \log \prod_{n=0}^{n=m-1} \left\{ (x - x_i)^{p_0} Q_0 + \alpha^n (x - x_i)^{p_1 + n_1} Q_1 (x - x_i)^{\frac{k_1}{m}} \theta^{\frac{1}{m}} + \text{ec} \right\} \alpha^n$$

e facendo su questa riduzioni simili a quelle che si sono operate sulla (22) si avrà

$$\int \frac{f dx}{\theta^{\frac{1}{m}}} = A \log \prod_{n=0}^{n=m-1} \left\{ Q_0 + \alpha^n (x - x_i)^{p_1 + n_1 - p_0} Q_1 (x - x_i)^{\frac{k_1}{m}} \theta^{\frac{1}{m}} + \text{ec} \right\} \alpha^n$$

ove pel dimostrato sul principio del presente numero, le differenze $p_r + n_r - p_0$ sono intere positive o zero, e l'identità (8) del Sig. Tchebichef potrà essere finalmente ridotta alla seguente, ove θ_1 è determinato come è stato indicato precedentemente, e $P_0, P_1, \dots$ rappresentano polinomi interi rispetto alla x

$$(24) \quad \int \frac{f dx}{\theta^{\frac{1}{m}}} = A \log \prod_{n=0}^{n=m-1} \left\{ P_0 + \alpha^n P_1 (x - x_1)^{\frac{k_1}{m}} \theta_1^{\frac{1}{m}} + \dots \right. \\ \left. + \alpha^{n(m-1)} P_{m-1} (x - x_1)^{\frac{k_{m-1}}{m}} \theta_1^{\frac{m-1}{m}} \right\}^{\alpha^n}.$$

Nessuno dei fattori sotto il segno $\log$ si potrà più annullare per $x = x_1$, stantechè P_0 è diverso da zero per $x = x_1$.

Facendo dunque, per tutti i fattori del polinomio θ , la stessa riduzione, che si è eseguita pel fattore $x - x_1$, si avrà il seguente:

TEOREMA. *Se si ponga*

$$\theta^{\frac{1}{m}} = \left\{ (x - x_1)^h (x - x_2)^k \dots (x - x_p)^l \right\}^{\frac{1}{m}}$$

ove gli interi $h, k, \dots, l$ sono tutti inferiori ad m , e si indichino con $h_1, h_2, \dots, k_1, k_2, \dots; \dots; l_1, l_2, \dots; i$ residui minimi positivi di $h, 2h, \dots; k, 2k, \dots; \dots; l, 2l, \dots$; rispettivamente secondo il modulo primo m , e che l'integrale (3) sia possibile con soli logaritmi, esisteranno dei polinomi interi, $P_0, P_1, \dots, P_{m-1}$, rispetto alla x tali, che soddisfaranno alla identità

$$\int \frac{f dx}{\theta^{\frac{1}{m}}} = A \log \prod_{n=0}^{n=m-1} \left\{ P_0 + \alpha^n P_1 \left\{ (x - x_1)^{h_1} (x - x_2)^{k_1} \dots (x - x_p)^{l_1} \right\}^{\frac{1}{m}} + \dots \dots \dots \right. \\ \left. \dots + \alpha^{n(m-1)} P_{m-1} \left\{ (x - x_1)^{h_{m-1}} (x - x_2)^{k_{m-1}} \dots (x - x_p)^{l_{m-1}} \right\}^{\frac{1}{m}} \right\}^{\alpha^n}$$

in modo che nessuno dei fattori, dai quali risulta il prodotto posto sotto il segno $\log$, possa ridursi a zero o divenire infinito, per valori finiti della variabile x .

12. Ammesso questo, dico che il prodotto

$$C = \prod_{n=0}^{n=m-1} \left\{ P_0 + \alpha^n P_1 \left\{ (x - x_1)^{h_1} (x - x_2)^{k_1} \dots (x - x_p)^{l_1} \right\}^{\frac{1}{m}} + \dots \dots \dots \right. \\ \left. + \alpha^{n(m-1)} P_{m-1} \left\{ (x - x_1)^{h_{m-1}} (x - x_2)^{k_{m-1}} \dots (x - x_p)^{l_{m-1}} \right\}^{\frac{1}{m}} \right\}$$

dovrà ridursi ad una costante.

Diffatti per qualunque valore finito della x , tale prodotto, conserva un valore finito e differente da zero, ciò verificandosi per ciascuno dei suoi fattori.

Dietro ciò, indichiamo con φ_n il polinomio intero rispetto alla x che rende soddisfatta l'equazione

$$\varphi_n \left\{ (x - x_1)^{h_n} (x - x_2)^{k_n} \dots (x - x_p)^{l_n} \right\}^{\frac{1}{m}} = \theta^{\frac{n}{m}}$$

da cui

$$\left\{ (x - x_1)^{h_n} (x - x_2)^{k_n} \dots (x - x_p)^{l_n} \right\}^{\frac{1}{m}} = \frac{\theta^{\frac{n}{m}}}{\varphi_n}$$

e sostituendo questa espressione nel prodotto precedente avremo

$$C = \prod_{n=0}^{n=m-1} \left\{ P_0 + \alpha^n P_1 \frac{\theta^{\frac{1}{m}}}{\varphi_1} + \alpha^{2n} P_2 \frac{\theta^{\frac{2}{m}}}{\varphi_2} + \dots + \alpha^{(m-1)n} P_{m-1} \frac{\theta^{\frac{m-1}{m}}}{\varphi_{m-1}} \right\}.$$

Si osservi ora che il secondo membro di questa eguaglianza, è funzione simmetrica intera delle radici della equazione (6) e perciò funzione razionale intera dei coefficienti della stessa e di $P_0, \frac{P_1}{\varphi_1}, \frac{P_2}{\varphi_2}, \dots, \frac{P_{m-1}}{\varphi_{m-1}}$ e quindi funzione razionale della x : ma C non è nullo nè infinito per valori finiti della x , dunque la funzione razionale della x da esso rappresentata deve ridursi identicamente ad una costante; e così si ha il

TEOREMA. *Tutte volte che l'integrale $\int \frac{f dx}{\theta^{\frac{1}{m}}}$ è possibile con soli logaritmi f*

e θ soddisfacendo alle condizioni più volte accennate e conservando ad $h_1, h_2, \dots; k_1, k_2, \dots; \dots; l_1, l_2, \dots$ il significato che avevano nel teorema precedente, θ conservando esso pure la stessa forma che in esso aveva, esisteranno sempre dei polinomii interi rispetto alla x , $P_0, P_1, \dots, P_{m-1}$ tali che il prodotto

$$\prod_{n=0}^{n=m-1} \left\{ P_0 + \alpha^n P_1 \left[(x - x_1)^{h_1} (x - x_2)^{k_1} \dots (x - x_p)^{l_1} \right]^{\frac{1}{m}} \dots \dots \dots \alpha^{n(m-1)} P_{m-1} \left[(x - x_1)^{h_{m-1}} (x - x_2)^{k_{m-1}} \dots (x - x_p)^{l_{m-1}} \right]^{\frac{1}{m}} \right\}$$

si ridurrà identicamente ad una costante.

Quest'ultima proposizione è l'estensione ch'io mi proponeva dare al teorema d'Abel, estensione che è scopo principale della presente nota.

Genova, Luglio 1861.