**15. Zur ballistischen Methode
der Messung von Elektricitätsmengen;
von H. Diesselhorst.**

Bei den meisten Anwendungen, welche das ballistische Galvanometer zur Messung von Elektricitätsmengen findet, ist die Annahme gestattet, dass die Zeitdauer des elektrischen Vorganges gegen die des mechanischen verschwindet. Wenn dies eintritt, oder genauer, wenn die Elektricitätsmenge völlig abgelaufen ist, noch ehe eine merkliche Verschiebung des beweglichen Systems stattgefunden hat, so erhält das letztere eine Anfangsgeschwindigkeit, die der Elektricitätsmenge proportional ist. Wenn aber die obige Voraussetzung nicht gilt, so ist die Bewegung abhängig von der Zeitdauer und Form des durch das Galvanometer fliessenden elektrischen Stromes.

Für diese Abhängigkeit sind von Dorn¹⁾ allgemeine Formeln aufgestellt, in denen auch auf die Rechtzeitigkeit der Stromstösse bei der Multiplications- und Zurückwerfungsmethode Rücksicht genommen wird.

Zur Zeit 0 gehe das Galvanometersystem mit der Geschwindigkeit v durch die Ruhelage. J_{ϑ} sei der Strom, der von der Zeit ϑ bis $\vartheta + \tau$ andauert, sodass

$$Q = \int_{\vartheta}^{\vartheta + \tau} J_{\vartheta} dt$$

die Elektricitätsmenge darstellt. Ferner sei K Trägheitsmoment, p Dämpfungsmoment, D Directionskraft des Galvanometers und q dynamische Galvanometerconstante (Product aus Feldstärke und Windungsfläche). A sei der durch v und die Wirkung von J_{ϑ} hervorgebrachte ballistische Ausschlag und V diejenige Anfangsgeschwindigkeit, welche den gleichen Ausschlag ohne Mitwirkung des Stromstosses hervorgebracht haben würde. A_0 und V_0 seien die entsprechenden Grössen bei

1) E. Dorn, Wied. Ann. 17. p. 654. 1882.

momentanem und rechtzeitigem Durchgang der gleichen Elektricitätsmenge. Die Ausschläge A und A_0 verhalten sich wie die Geschwindigkeiten V und V_0 . Setzt man dann zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{p}{2K}, \quad \varrho^2 = \frac{4KD - p^2}{4K^2},$$

$$c = \frac{1}{Q} \int_{\vartheta}^{\vartheta + \tau} J_{\vartheta} e^{\alpha t} \cos \varrho t dt, \quad s = \frac{1}{Q} \int_{\vartheta}^{\vartheta + \tau} J_{\vartheta} e^{\alpha t} \sin \varrho t dt,$$

und endlich

$$\eta = \frac{Kv}{qQ},$$

so ist nach Dorn

$$(1) \quad \frac{A}{A_0} = \frac{V}{V_0} = \frac{1}{1 + \eta} \sqrt{(c + \eta)^2 + s^2} \cdot e^{-\frac{\alpha}{\varrho} \operatorname{arctg} \frac{s}{c + \eta}}.$$

Für den Fall momentaner Inductionsstösse ($\tau = 0$) und für den Fall eines inducirten Sinusstromes, wie er bei der Anwendung des Erdinductors entsteht, ist die Formel von Dorn weiter entwickelt und in eine Reihe nach Potenzen von ϑ und τ geordnet. Dabei zeigt sich, dass in beiden Fällen die Glieder erster Ordnung verschwinden. Auf diesem Umstand beruht es, dass ziemlich grobe Versehen in der Rechtzeitigkeit und relativ langsame Umdrehung des Erdinductors den ballistischen Ausschlag nur wenig fehlerhaft machen.¹⁾

Es schien mir der Mühe wert, zu untersuchen, ob dies für die messende Physik so wichtige Resultat allgemeine Gültigkeit besitzt, oder an die specielle Stromform gebunden ist. Es zeigte sich die Allgemeingültigkeit des Dorn'schen Resultates. Zugleich ergab sich der Einfluss, den die Constanten des Galvanometers auf die Fehlergrösse haben, gesondert von dem Einfluss der Stromform.

Um den Nachweis zu führen, wollen wir zunächst auf directem Wege die Dorn'sche Formel in anderer Gestalt her-

1) Nach mündlicher Mitteilung ist in dem Zahlenbeispiel, welches Dorn auf die ältere Ohmbestimmung von Kohlrausch anwendet, die Umdrehungsdauer des Inductors etwa um das Doppelte zu gross angenommen, ihr Einfluss auf das Resultat also etwa viermal zu gross geschätzt.

leiten. Unter Benutzung der bereits oben eingeführten Bezeichnungen erhalten wir für die Bewegung des Galvanometersystems, d. h. für den Ausschlagswinkel x zur Zeit t , die Differentialgleichung

$$(2) \quad K \frac{d^2 x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + D x = q J_{\vartheta}.$$

Wenn $\vartheta > 0$ ist, d. h. wenn der Stromstoss erst nach dem Durchgang durch die Ruhelage beginnt, lautet die Anfangsbedingung

$$(2a) \quad \text{für } t = 0 \text{ ist } x = 0 \text{ und } \frac{dx}{dt} = v.$$

Wenn wir auch negative ϑ einbegreifen, können wir die Anfangsbedingung so aussprechen:

Vor dem Beginn des Stromstosses, also für $t < \vartheta$, soll die Bewegung derart sein, dass bei Fortsetzung derselben ohne Hinzukommen des Stromstosses die obige Bedingung (2a) erfüllt ist.

Man erkennt leicht, dass dieser Bedingung und der Gleichung (2) die Lösung genügt

$$x = \frac{e^{\mu t} - e^{\nu t}}{\mu - \nu} v + \frac{q}{K(\mu - \nu)} \left\{ e^{\mu t} \int_{\vartheta}^t J_{\vartheta} e^{-\mu t} dt - e^{\nu t} \int_{\vartheta}^t J_{\vartheta} e^{-\nu t} dt \right\},$$

deren erster Teil die Bewegung darstellt, wie sie ohne Hinzukommen des Stromstosses verlaufen würde. μ und ν sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$K \mu^2 + p \mu + D = 0.$$

Die Wurzeln sind entweder reell (aperiodischer Zustand des Galvanometers), oder conjugirt complex (periodischer Zustand). Im letzteren Falle nimmt die Lösung die Form an

$$\frac{F(a + b i) - F(a - b i)}{i}$$

und bleibt daher stets reell.

Wenn wir uns auf die Zeit beschränken, wo der Stromstoss bereits abgelaufen ist, d. h. wenn wir $t > \vartheta + \tau$ nehmen, so können wir in den bestimmten Integralen der Lösung als obere Grenze anstatt t einsetzen $\vartheta + \tau$, weil jenseits dieser

Grenze $J_{\vartheta} = 0$ ist. Die Integrale werden dann constant und wir setzen zur Abkürzung

$$(3) \quad \int_{\vartheta}^{\vartheta + \tau} J_{\vartheta} e^{-\mu t} dt = MQ \quad \text{und} \quad \int_{\vartheta}^{\vartheta + \tau} J_{\vartheta} e^{-\nu t} dt = NQ.$$

Q bedeutet die Elektrizitätsmenge

$$Q = \int_{\vartheta}^{\vartheta + \tau} J_{\vartheta} dt.$$

Danach nimmt die Lösung für $t > \vartheta + \tau$ die Form an

$$(4) \quad x = \frac{Q}{K(\mu - \nu)} \{ (M + \eta) e^{\mu t} - (N + \eta) e^{\nu t} \}.$$

Darin ist, wie früher, zur Abkürzung

$$(5) \quad \eta = \frac{K\nu}{Q}$$

gesetzt.

Bildet man dx/dt , berechnet aus der Gleichung $dx/dt = 0$ die Umkehrzeit und setzt sie in den Ausdruck für x ein, so erhält man den ballistischen Ausschlag

$$(6) \quad A = C \cdot (M + \eta)^{\frac{\nu}{\nu - \mu}} \cdot (N + \eta)^{\frac{\mu}{\mu - \nu}}.$$

C stellt einen Factor dar, der von M und N , d. h. von ϑ und τ unabhängig ist. Im Grenzfall $\vartheta = \tau = 0$, während die Elektrizitätsmenge Q constant bleibt, wird $M = N = 1$. Durch Einsetzen dieser Werte in (6) erhält man den Ausschlag A_0 und es ergibt sich für das Verhältniß des fehlerhaften zum idealen Ausschlag der Wert

$$(7) \quad \frac{A}{A_0} = \left(\frac{M + \eta}{1 + \eta} \right)^{\frac{\nu}{\nu - \mu}} \left(\frac{N + \eta}{1 + \eta} \right)^{\frac{\mu}{\mu - \nu}}.$$

Wenn μ und ν imaginär sind, bleibt der Ausdruck reell und lässt sich durch Umformung in die Dorn'sche Formel (1) verwandeln, indem man setzt

$$\mu + \nu = -2\alpha \quad \text{und} \quad \mu\nu = \varrho^2 + \alpha^2.$$

Wir wollen jetzt den Ausdruck für A/A_0 aus der Form (7), die leichter zu behandeln ist, als die Dorn'sche Form (1), in eine Reihe nach Potenzen von ϑ und τ entwickeln und dann zeigen, dass die Glieder erster Ordnung verschwinden. In den

Coefficienten der Reihe werden die Wurzeln μ und ν nur in den stets reellen symmetrischen Verbindungen

$$\mu + \nu = -\frac{p}{K} \quad \text{und} \quad \mu \nu = \frac{D}{K}$$

vorkommen, sodass das Resultat ohne weitere Umformung sowohl für den periodischen als den aperiodischen Zustand des Galvanometers brauchbar ist.

Die beiden Factoren auf der rechten Seite der Formel (7) gehen durch Vertauschen von μ und ν ineinander über. Wir betrachten daher nur den ersten und fassen speciell den in (3) gegebenen Ausdruck für M ins Auge.

Der Strom J_{ϑ} hängt nur insofern von der Verzögerung ϑ ab, als er zur Zeit $t = \vartheta$ beginnt. Die Form des weiteren Verlaufes ist unabhängig von ϑ , d. h. J_{ϑ} ist eine Function von $t - \vartheta$. Bezeichnet J dieselbe Function mit dem Argument t , so stellt J die eigentliche Stromform, von der Zeit 0 bis τ gerechnet, dar

$$\left(\text{z. B. } J_{\vartheta} = \sin \frac{\pi(t - \vartheta)}{\tau}, \quad J = \sin \frac{\pi t}{\tau} \right).$$

Jetzt führen wir in die Integrale (3) an Stelle von t die Integrationsvariable $z = t - \vartheta$ ein und bezeichnen nachher den Integrationsbuchstaben z wieder mit t . Dann erhalten wir für M den Ausdruck

$$M = \frac{\int_0^{\tau} J e^{-\mu(t + \vartheta)} dt}{\int_0^{\tau} J dt}$$

oder

$$(8) \quad M = M_0 \cdot e^{-\mu \vartheta},$$

wenn

$$M_0 = \frac{\int_0^{\tau} J e^{-\mu t} dt}{\int_0^{\tau} J dt}$$

gesetzt wird. Dadurch ist der Einfluss der Verzögerung ϑ abgesondert von dem Einfluss, welchen die Stromform ausübt.

Wir betrachten nun weiter den Ausdruck für M_0 . Da die obere Grenze τ der hier vorkommenden Integrale klein ist, t also während der Integration nur kleine Werte annimmt, so liegt es nahe, die Exponentialfunction $e^{-\mu t}$ durch ihre Reihe

$$e^{-\mu t} = 1 - \mu t + \frac{1}{2} \mu^2 t^2 \dots$$

zu ersetzen. Dann treten folgende neuen Integrale auf

$$(9) \quad \Phi_1 = \frac{\int_0^\tau t J dt}{\int_0^\tau J dt}, \quad \Phi_2 = \frac{\int_0^\tau t^2 J dt}{\int_0^\tau J dt} \dots$$

und man erhält

$$(10) \quad M_0 = 1 - \mu \Phi_1 + \frac{1}{2} \mu^2 \Phi_2 \dots$$

Die Integrale Φ sind von den Constanten des Galvanometers unabhängig und allein durch die Form des Stromes J bestimmt. Ferner werden alle Integrale Φ_n mit τ unendlich klein und zwar von der Ordnung, welche der Index von Φ anzeigt. Wir erhalten also die Entwicklung nach Potenzen von ϑ und τ , wenn wir eine solche nach ϑ und den Functionen Φ vornehmen. Die letztere bietet keine Schwierigkeit. Man erhält zunächst aus (8) und (10)

$$M = M_0 e^{-\mu \vartheta} = 1 - \mu (\vartheta + \Phi_1) + \frac{1}{2} \mu^2 (\vartheta^2 + 2 \vartheta \Phi_1 + \Phi_2) + \dots$$

Anstatt der durch (5) definirten Grösse η führen wir jetzt bequemer

$$(11) \quad \omega = \frac{\eta}{1 + \eta} = \frac{K v}{K v + q Q}$$

ein. Den Ausdruck $(M + \eta)/(1 + \eta)$, der für kleine ϑ und τ nahe gleich 1 wird, schreiben wir in der Form

$$\frac{M + \eta}{1 + \eta} = 1 + (1 - \omega)(M - 1),$$

oder nach der obigen Entwicklung von M

$$\frac{M + \eta}{1 + \eta} = 1 + (1 - \omega) [-\mu (\vartheta + \Phi_1) + \frac{1}{2} \mu^2 (\vartheta^2 + 2 \vartheta \Phi_1 + \Phi_2) + \dots],$$

und analog durch Vertauschen von μ und v

$$\frac{N + \eta}{1 + \eta} = 1 + (1 - \omega) [-v (\vartheta + \Phi_1) + \frac{1}{2} v^2 (\vartheta^2 + 2 \vartheta \Phi_1 + \Phi_2) + \dots].$$

Hieraus ergibt sich gemäss der Formel (7) entweder direct nach dem binomischen Lehrsatz, oder bequemer durch Logarithmiren und Reihenentwicklung die gesuchte Darstellung. Wir beschränken uns auf Glieder zweiter Ordnung, da die höheren ohne allgemeines Interesse sind, und erhalten

$$\frac{A}{A_0} = 1 - \frac{1}{2} \mu \nu (1 - \omega) [(\Phi_2 - \Phi_1^2) + \omega (\vartheta + \Phi_1)^2].$$

Die Glieder erster Ordnung sind fortgefallen. Nun ist $\mu \nu = D/K$ oder, ausgedrückt durch die Schwingungsdauer T_0 des ungedämpften Systems, $\mu \nu = \pi^2/T_0^2$. Danach erhalten wir endlich für den relativen Fehler des ballistischen Ausschlages den Wert

$$(12) \quad \frac{A - A_0}{A_0} = - \frac{\pi^2(1 - \omega)}{2 T_0^2} [(\Phi_2 - \Phi_1^2) + \omega (\vartheta + \Phi_1)^2],$$

wo Φ_1 und Φ_2 durch die Formeln (9) und ω durch (11) definiert ist. Um für ω einen anderen Ausdruck zu gewinnen, nehmen wir für einen Augenblick an, die Elektrizitätsmenge $Q = \int J dt$ flosse momentan, d. h. ehe x einen merklichen Wert erlangt. Für die von dem vorangehenden Ausschlage herrührende Anfangsgeschwindigkeit v haben wir dann einen etwas anderen Wert v_0 zu setzen; und durch den Stromstoss wird dieser auf V_0 erhöht. Für den Geschwindigkeitszuwachs $V_0 - v_0$ ergibt sich in bekannter Weise durch Multiplication der Differentialgleichung (2) mit dt und Integration über das kleine Zeitintervall des Stromstosses die Beziehung

$$K(V_0 - v_0) = q Q.$$

Setzt man dies in (11) ein, so kommt

$$\omega = \frac{v}{v + V_0 - v_0},$$

oder, da wir uns auf Grössen zweiter Ordnung beschränken, also in dem Fehlergliede $v = v_0$ setzen dürfen,

$$\omega = \frac{v_0}{V_0}.$$

Hiernach kann man, wie das auch Dorn thut, ω durch das Dämpfungsverhältnis k ausdrücken und zwar bei den verschiedenen Methoden in verschiedener Weise. Man erhält

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{bei einmaligem Stromstoss} & \omega = 0, \\ \text{bei Multiplication} & \omega = \frac{1}{k}, \\ \text{bei Zurückwerfung} & \omega = -\frac{1}{k^2}. \end{array} \right.$$

Die Formel (12) lässt sich noch etwas anders schreiben, insofern Φ_1 von erster, Φ_2 von zweiter Ordnung in Bezug auf τ ist. Wir können daher setzen

$$(14) \quad \Phi_1 = \varepsilon \tau, \quad (\Phi_2 - \Phi_1^2) = a \tau^2,$$

wo a und ε zwei Zahlen sind, die von der Stromform abhängen. Danach wird

$$(15) \quad \frac{A - A_0}{A_0} = -\frac{\pi^2}{2 T_0^2} (1 - \omega) (a \tau^2 + \omega (\vartheta + \varepsilon \tau)^2).$$

Man hat es in der Hand, die Verzögerung ϑ nicht als unbeabsichtigten Fehler aufzufassen, sondern durch sie einen bestimmten Anfangsmoment des Stromstosses festzulegen. Man kann dann ϑ so wählen, dass das zweite Glied der Klammer verschwindet, d. h. dass $\vartheta + \varepsilon \tau = 0$ wird. Die Zeit

$$\vartheta_0 = -\varepsilon \tau = -\Phi_1,$$

gerechnet von dem Augenblick, in welchem das Galvanometersystem durch die Ruhelage geht, wählt man also zweckmässig zum Beginn des Stromstosses. Verspätet man denselben um den Betrag z gegen diesen Zeitpunkt, so wird $\vartheta = -\varepsilon \tau + z$ und die Formel (15) geht über in

$$(16) \quad \frac{A - A_0}{A_0} = -\frac{\pi^2}{2 T_0^2} (1 - \omega) (a \tau^2 + \omega z^2).$$

Ein positives und ein negatives z , d. h. eine Verspätung und eine Verfrühung von gleichem Betrage gegen den Anfangsmoment ϑ_0 bringen die gleiche Wirkung hervor.

Ueber die Zahlenwerte a und ε lassen sich einige allgemeine Angaben machen. Sie hängen zunächst nur von der Form des Stromes, nicht von seiner absoluten Stärke ab,

d. h. sie bleiben ungeändert, wenn man die Stromstärke mit einem constanten Factor multiplicirt. Dies geht daraus hervor, dass nach der Definition (9) das Gleiche für die Functionen Φ gilt.

Hieraus lässt sich sogleich die Folgerung ziehen, dass der relative Fehler unabhängig ist von der absoluten Grösse des Ausschlages. Wenn es also nur auf das Verhältniss zweier mit verschiedener Stromstärke (Elektricitätsmenge), aber gleicher Stromform und Stromdauer erhaltenen Ausschläge ankommt, wie z. B. bei der Bestimmung der Inclination mit dem Erdinductor, so fällt der von der Stromdauer τ herrührende erste Teil des Fehlers heraus. Der ganze Fehler fällt fort, wenn ausserdem der Stromstoss in jeder Periode zur gleichen, aber sonst beliebigen Zeit ϑ beginnt. Um den Einfluss unvermeidlicher Unrechtzeitigkeiten möglichst gering zu machen, wird man aber auch dann die günstige Zeit $\vartheta_0 = -\varepsilon\tau$ zum Beginn des Stromstosses wählen.

Wenn ferner J während des Stromstosses das Vorzeichen nicht wechselt, lässt sich zeigen, dass ε zwischen 0 und 1 und α zwischen 0 und $\frac{1}{4}$ liegt. Für ε folgt die Behauptung nach der Definition (14) ohne weiteres aus dem in (9) gegebenen Wert von Φ_1 durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf das im Zähler stehende Integral. Man lässt den Factor J unter dem Integralzeichen und setzt einen bestimmten mittleren Wert $\varepsilon\tau$ des anderen Factors t vor das Integral. So kommt

$$\int_0^{\tau} t J dt = \varepsilon\tau \int_0^{\tau} J dt$$

und daher

$$\Phi_1 = \varepsilon\tau.$$

Behandeln wir ebenso das Integral in Φ_2 und setzen

$$\int_0^{\tau} t^2 J dt = \int_0^{\tau} t \cdot t J dt = \varepsilon'\tau \int_0^{\tau} t J dt = \varepsilon'\varepsilon\tau^2 \int_0^{\tau} J dt,$$

also

$$\Phi_2 = \varepsilon'\varepsilon\tau^2,$$

so liegt auch ε' zwischen 0 und 1. Man erkennt aber auch, dass $\varepsilon' > \varepsilon$ sein muss, weil bei dem Ausdruck $tJdt$ die nach

der oberen Grenze des Integrales zu liegenden Werte relativ mehr Gewicht haben, als bei dem Ausdruck $J dt$, und weil deswegen der vor das Integral tretende Wert des anderen Factors $t = \varepsilon' \tau$ näher an der oberen Grenze liegen muss als $\varepsilon \tau$. Für den Ausdruck $a = \varepsilon(\varepsilon' - \varepsilon)$ ergibt sich also die Bedingung

$$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon' \leq 1$$

und daraus folgt weiter

$$0 \leq a \leq \frac{1}{4}.$$

Der obere Grenzwert $a = \frac{1}{4}$ wird erreicht für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $\varepsilon' = 1$. Dies trifft thatsächlich ein, wenn der Strom J aus zwei gleichgrossen, durch das Zeitintervall τ getrennten momentanen Stromstössen besteht. Die untere Grenze $a = 0$ wird nur für $\tau = 0$, d. h. einen einzigen momentanen Stromstoss erreicht.

Man kann den Ausdruck $\Phi_2 - \Phi_1^2$, aus welchem a berechnet wird, als Doppelintegral darstellen in der Form

$$\Phi_2 - \Phi_1^2 = \frac{1}{2} Q^2 \int_0^\tau \int_0^\tau J_t J_z (t - z)^2 dt dz,$$

wo J_t und J_z die Stromfunction J mit dem Argument t bez. z bedeuten und Q die Elektrizitätsmenge ist. Aus dieser Form ist ebenfalls ersichtlich, dass $\Phi_2 - \Phi_1^2$ und damit a stets positiv, also $\varepsilon' > \varepsilon$ ist, wenn J während des Stromstosses die Richtung nicht wechselt.

Wenn die Stromcurve J symmetrisch zur Mitte des Intervalls τ liegt, so ist stets $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Denn durch Einführung der Symmetriebedingung $J(t) = J(\tau - t)$ ergibt sich aus (9)

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \tau.$$

Bei allen symmetrischen Stromcurven liegt also der günstige Anfangsmoment $\vartheta_0 = -\Phi_1$, durch welchen der Fehler des Ausschlages auf das erste Glied

$$\frac{A - A_0}{A_0} = - \frac{\pi^2}{2 T_0^2} (1 - \omega) a \tau^2$$

reducirt wird, so, dass die Ruhelage des Galvanometersystems in der Mitte des Intervalls τ passirt wird.

Zum Schluss mögen einige specielle Fälle behandelt und die Werte der Functionen Φ_1 und Φ_2 bez. der Zahlen a und ε für gegebene Stromformen berechnet werden.

1. *Momentane Stromstösse.* Für $\tau = 0$ erhält man aus der allgemeinen Formel (12) den auch von Dorn hergeleiteten Ausdruck

$$\left(\frac{A - A_0}{A_0}\right)_{\tau=0} = -\frac{\pi^2}{2 T_0^2} \omega (1 - \omega) \tau^2.$$

Für ω gelten je nach der angewandten Methode die Werte (13). Bei der Multiplication ist der Fehler stets negativ, d. h. durch eine Verfrühung oder Verspätung eines Stromstosses wird der nachfolgende Ausschlag stets zu klein. Bei der Zurückwerfung ist der Fehler immer positiv, also der Ausschlag zu gross.

2. *Einmaliger Stromstoss von der Zeitdauer τ .* Man setzt $\omega = 0$ in die Formel (12) oder (15) und erhält

$$\left(\frac{A - A_0}{A_0}\right)_{\omega=0} = -\frac{\pi^2}{2 T_0^2} (\Phi_2 - \Phi_1) = -\frac{a \pi^2}{2} \frac{\tau^2}{T_0^2}.$$

Der Fehler ist unabhängig von der Dämpfung des Galvanometers. Wenn der Strom die Richtung nicht wechselt, ist $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$, der Ausschlag also zu klein.

3. *Sinusstrom.* (*Erdinductor.*) $J = J_0 \sin \frac{\pi t}{\tau}$. Man findet

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \tau, \quad \Phi_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right) \tau^2$$

und daraus

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} = 0,04736$$

und endlich durch Einsetzen dieser Werte in (16)

$$\frac{A - A_0}{A_0} = -0,2337 (1 - \omega) \frac{\tau^2}{T_0^2} - 4,935 \cdot \omega (1 - \omega) \frac{\tau^2}{T_0^2}$$

(z gleich Verzögerung gegen den Anfangsmoment $\tau_0 = -\frac{1}{2} \tau$). Auch diese Formel ist von Dorn angegeben.

4. *Constanter Strom J_0 von der Zeitdauer τ .* Es wird

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{12}.$$

Für Stromcurven, welche kein Minimum besitzen, liegt a zwischen 0 und $\frac{1}{12}$.

5. *Gedämpfter Strom.* (*Inductionsspule.*) $J = J_0 e^{-t/\tau_0}$ Die eigentliche Stromdauer ist unendlich. Doch kommen nur solche Fälle in Betracht, bei denen der Strom bis auf einen verschwindenden Rest abgelaufen ist, bevor die Umkehr des Galvanometers eintritt. In den Integralen (9) ist es dann einerlei, ob wir bis zu einer willkürlichen, hinreichend grossen Grenze τ oder bis ∞ integrieren. Thun wir das letztere, so werden Φ_1 und Φ_2 Functionen von τ_0 allein und wir erhalten

$$\Phi_1 = \tau_0, \quad \Phi_2 = 2 \tau_0^2,$$

also

$$\Phi_2 - \Phi_1^2 = \tau_0^2.$$

(Eingegangen 7. August 1902.)