10. Fortpflanzung magnetischer Wellen in Eisen- zylindern; von J. Zenneck.

Für die Fortpflanzung *elektrischer* Wellen längs Metall-
drähten gelangt man bekanntlich zu einer einfachen Differential-
gleichung, welche die Beobachtungen in erster Annäherung
richtig wiedergibt, wenn man die Beziehungen, welche für den
geschlossenen Wechselstromkreis streng gelten, auf ein Draht-
element anwendet.¹⁾

Für den geschlossenen Wechselstromkreis gilt

$$i w' = E - p \frac{\partial i}{\partial t},$$

wenn i den Strom, w' bez. p Widerstand bez. Selbstinduktions-
koeffizienten für Wechselströme der betreffenden Wechselzahl
und E die von außen auf den Stromkreis wirkende elektro-
motorische Kraft bedeutet. Auf ein Drahtelement von der
Länge dx übertragen geht dies über in

$$i w' dx = V_x - V_{x+dx} - p \cdot dx \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$$

oder

$$(1) \quad i w' = - \frac{\partial V}{\partial x} - p \frac{\partial i}{\partial t},$$

wenn nun w' und p auf die Längeneinheit bezogen und unter
 V_x die elektrische Spannung an der Stelle x verstanden wird.

Nimmt man dazu die Kontinuitätsgleichung

$$(2) \quad - \frac{\partial i}{\partial x} = c \frac{\partial V}{\partial t}$$

(c = Kapazität der Längeneinheit), so erhält man

$$c p \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + c w \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}.$$

1) Vgl. G. Kirchhoff, Ges. Abhandl. p. 131. 1882. Die folgende
einfachere Ableitung z. B. bei G. Wiedemann, Die Lehre von der
Elektrizität, 2. Aufl. 4. p. 375 ff. 1895.

Für das magnetische Analogon, die Fortpflanzung *magnetischer* Wellen in Eisenzylindern, fehlt, soweit mir bekannt ist, eine einfache aus einfachen Annahmen abgeleitete Differentialgleichung, welche die Beobachtungen befriedigend darstellt.¹⁾ Man gelangt dazu, indem man das für die elektrischen Wellen eben geschilderte Verfahren auch hier befolgt.

1. Ableitung der Differentialgleichung.

a) Für den magnetischen Induktionsfluß Q im geschlossenen oszillatorischen magnetischen Kreis besteht die Beziehung²⁾

$$Q w'_m = M - p_m \frac{\partial Q}{\partial t},$$

wenn w'_m bez. p_m den Ohmschen magnetischen Widerstand bez. magnetischen Selbstinduktionskoeffizienten für oszillatorische Felder der betreffenden Wechselzahl, M die äußere magneto-motorische Kraft bedeutet.

Die Übertragung auf ein Element eines Eisenzylinders liefert die Beziehung

$$(3) \quad Q w'_m = - \frac{\partial V_m}{\partial x} - p_m \frac{\partial Q}{\partial t},$$

wenn nun die Bezeichnung Q für den Induktionsfluß in der Richtung der Zylinderachse (x -Richtung), w'_m bez. p_m für die Längeneinheit des Zylinders und V_m für das magnetische Analogon der elektrischen Spannung gebraucht wird.

b) Zu derjenigen Gleichung, die an Stelle der Kontinuitätsgleichung (2) zu setzen ist, gelangt man durch folgende Annahmen:

1. Es sollen nirgends im Eisenzylinder magnetische Kraftlinien endigen oder entspringen.

2. Die Anzahl von Kraftlinien, welche an irgend einer Stelle des Eisenzylinders in die Luft austritt („gestreut“ wird),

1) Die von mir (Ann. d. Phys. 9. p. 517. Anm. 1. 1902) angegebene Übertragung der Differentialgleichung für elektrische Wellen auf magnetisches Gebiet hat sich als unzulässig herausgestellt. Diese Anmerkung ist also zu streichen.

2) Vgl. J. Zenneck, Ann. d. Phys. 9. p. 497. 1902.

soll der magnetischen Spannung V_m an der betreffenden Stelle proportional sein.¹⁾ Das heißt also:

$$\begin{aligned} \text{oder} \quad Q_x - Q_{x+dx} &= c_m \cdot dx \cdot V_x \\ (4) \quad -\frac{\partial Q}{\partial x} &= c_m \cdot V, \end{aligned}$$

worin c_m eine der elektrischen Kapazität analoge Konstante der Längeneinheit ist. Gleichung (4) und Gleichung (3) zusammen geben die Differentialgleichung

$$(5) \quad \underline{c_m p_m \frac{\partial Q}{\partial t} + c_m w_m' Q = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}}.$$

2. Das Integral der Differentialgleichung.

Für den Fall einer in der positiven x -Richtung fortschreitenden Welle, d. h. für

$$Q = Q_0 \cdot e^{-\beta x} \cdot e^{i(\pi n t - \gamma x)}$$

folgt aus Gleichung (5) die Relation:

$$(6) \quad \begin{cases} \beta^2 - \gamma^2 = c_m \cdot w_m', \\ 2\beta\gamma = c_m \cdot \pi n p_m. \end{cases}$$

Darin ist n die Wechselzahl, β der Absorptionskoeffizient; γ bestimmt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v in der Weise, daß

$$(7) \quad v = \frac{\pi n}{\gamma}$$

ist.

3. Spezielle Fälle.

$$a) \pi n p_m = w_m'.$$

Dieser Fall ist für eine Wechselzahl von ca. 100/sec annähernd realisiert bei Eisenstäben mittlerer Permeabilität und Leitfähigkeit, wenn der Radius r mindestens einige Millimeter beträgt und zwar ist dann

$$\pi n p_m = w_m' = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \cdot w_m,$$

1) Die Annahme, daß die Streuung an irgend einer Stelle eines Eisenkörpers der magnetischen Spannung an der betreffenden Stelle (auch „magnetischer Druck“ genannt) proportional sei, scheint in der Technik durchaus geläufig zu sein. Vgl. z. B. G. Kapp, Transformatoren für Wechselstrom und Drehstrom p. 3 ff. 1900.

wenn w_m den Ohmschen magnetischen Widerstand für stationäres Feld und α eine Größe bedeutet, die dem Leitvermögen, der magnetischen Permeabilität und der Wechselzahl proportional ist.¹⁾

Man erhält dann aus Gleichung (6) mit um so größerer Genauigkeit, je größer $r\sqrt{\alpha/2}$ ist:

$$(8) \quad \begin{cases} \beta = 1,10 \cdot \sqrt{c_m \cdot w_m'} = 1,10 \sqrt{c_m \cdot \pi n p_m}, \\ \gamma = 0,46 \cdot \sqrt{c_m \cdot w_m'} = 0,46 \sqrt{c_m \cdot \pi n p_m}.^2) \end{cases}$$

Sowohl Fortpflanzungsgeschwindigkeit als Absorption werden um so größer, je größer cet. par. die Wechselzahl ist.

b) $\pi n p_m$ klein gegen w_m' .

Bei einer Wechselzahl von ca. 100/sec trifft dies zu bei *dünnen* Eisendrähten (Radius bei mittlerer Leitfähigkeit und Permeabilität jedenfalls < 1 mm) mit der Besonderheit, daß dann annähernd

$$w_m' = w_m, \\ \pi n p_m = \frac{r^2 \cdot \alpha}{4} \cdot w_m$$

wird.

Die Gleichungen (6) ergeben dann:

$$(9) \quad \begin{cases} \beta = \text{appr.} \sqrt{c_m \cdot w_m'}, \\ \gamma = \frac{\pi n p_m}{2 w_m'} \cdot \sqrt{c_m \cdot w_m'}. \end{cases}$$

Von der Wechselzahl werden in erster Annäherung sowohl Fortpflanzungsgeschwindigkeit als Absorption unabhängig. Während aber die Abnahme der Amplitude hier in erster Annäherung sich durch die Streuung (c_m) und nicht durch die Wirkung der Foucaultströme (p_m) bestimmt, bleibt für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit auch hier die Wirkung der Foucaultströme maßgebend.

1) Vgl. J. Zenneck, l. c. § 7.

2) $1,10 \equiv \sqrt{\frac{\sqrt{2+1}}{2}},$

$0,46 \equiv \sqrt{\frac{\sqrt{2-1}}{2}}.$

c) $\pi n p_m$ sehr groß gegen w_m' .

Dieser Fall kann experimentell dadurch hergestellt werden, daß man einen unterteilten Eisenkern mit einer gut leitenden Metallröhre¹⁾ aus nicht ferromagnetischem Material oder kurz geschlossenen Metallringen²⁾ umgibt. Es wird dann sehr annähernd

$$w_m' = w_m, \\ \pi n p_m = r \cdot d \cdot \frac{\alpha}{2} = r \cdot d \cdot \frac{\pi n \lambda \mu}{2 \cdot V^2} \quad 3),$$

wenn r der Radius, d die Wandstärke und λ das Leitvermögen der als dünn gedachten Röhre und μ die Permeabilität des Eisenkernes ist.

Die Gleichungen (6) liefern:

$$(10) \quad \beta = \gamma = \sqrt{c_m \cdot \frac{\pi n p_m}{2}} \quad 4).$$

Für die Abhängigkeit der Absorption und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wechselzahl gilt das unter a) gesagte. Die Art der Ausbreitung ist dieselbe wie die einer Temperaturwelle.

d) Qualitativ ist den drei betrachteten Fällen gemeinsam, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit um so kleiner wird, je größer cet. par. der magnetische Selbstinduktionskoeffizient p_m pro Längeneinheit ist. Dasselbe gilt von der Absorption mit Ausnahme des Falles b).

1) Vgl. J. Zenneck, l. c. § 14.

2) Anordnung, die in den Wechselstromzählern von Borel, Wright und Ferranti praktisch benutzt ist (vgl. J. A. Fleming, „The alternate current transformer“ 1. 3. Aufl. p. 326. 1900).

3) Vgl. J. Zenneck, l. c. § 5.

4) Setzt man den Wert von $\pi n p_m$ in diese Gleichung ein, so wird

$$\beta = \gamma \text{ proportional } \sqrt{\frac{\pi n \lambda \mu}{2 V^2}}.$$

Die Verhältnisse besitzen also eine bemerkenswerte Analogie mit der Ausbreitung ebener elektromagnetischer Transversalwellen in relativ guten Leitern, wo bekanntlich

$$\beta = \gamma = \sqrt{\frac{\pi n \lambda \mu}{2 V^2}}$$

ist (vgl. E. Cohn, Das elektromagnetische Feld p. 433. Leipzig 1900).

4. Prüfung durch die Beobachtung.

Für die Prüfung der entwickelten Beziehungen kommen in Betracht¹⁾ die Beobachtungen von A. Oberbeck²⁾, außerdem die von mir in § 14 der zitierten Mitteilung veröffentlichten Figuren. Die letzteren hatten zwar ursprünglich nur den Zweck einer qualitativen Illustration; die meisten von ihnen gestatten aber eine genügend genaue Bestimmung von Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Absorptionskoeffizient.

a) Wenn die Eisendrähte bez. Eisenstäbe *nicht mit Metallröhren umgeben sind*, gelten die Formeln Gleichungen (8) und (9), die ersteren, wenn es sich um relativ dicke, die letzteren, wenn es sich um relativ dünne Drähte bez. Stäbe handelt. Ein Vergleich der beiden Formeln zeigt: *Das Verhältnis β/γ muß bei dünnen Eisendrähten eine große Zahl sein* (da hier $\pi n p_m$ sehr klein gegen w'_m ist), *bei dicken Eisenstäben strebt es dem Grenzwert $1,10/0,46 = 2,4$ zu.*

Oberbeck gibt als allgemeines Resultat seiner Messungen an: „bei den dünneren Kernen ist γ sehr klein im Vergleich zu β und nur bei den dicksten Stäben von derselben Größenordnung,“ eine qualitative Bestätigung dessen, was die Gleichungen (8) und (9) bezüglich des Verhältnisses $\beta:\gamma$ ergeben.

Quantitativ liegen die Verhältnisse folgendermaßen. Für *dünne* Drähte muß auf einen Vergleich zwischen den Gleichungen (8) und (9) und den Beobachtungen Oberbecks verzichtet werden: Oberbeck gibt Leitvermögen und Permeabilität der von ihm benutzten Drähte nicht an; die Kenntnis von beiden ist aber für die Berechnung von β/γ aus Gleichung (9) notwendig.³⁾

1) Die Messungen von W. Peuckert (Elektrotechn. Zeitschr. 16. p. 611. 1895) sind für den vorliegenden Zweck nicht verwendbar, da die Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit aus denselben nicht möglich ist.

2) A. Oberbeck, Wied. Ann. 22. p. 73—74. 1884.

3) Nur als Beispiele dafür, welche Werte man ungefähr für β/γ bekommt, führe ich an, daß aus Oberbecks Zahlen für Eisendrähte von 1 mm Radius und $n = 133/\text{sec}$ etwa 32 als Wert von β/γ , daß aus den von mir l. c. p. 507 für Drähte von 0,5 mm Radius und mittlerer Permeabilität und Leitfähigkeit angegebenen Zahlen $\beta/\gamma = 19$ folgen würde.

Für sehr *dicke* Drähte bez. Stäbe geben aber die Gleichungen (8) einen Wert von β/γ , der von Permeabilität, Wechselzahl und Leitvermögen unabhängig ist, nämlich 2,4. In der Nähe dieses Wertes müßten also die beobachteten jedenfalls liegen. Aus den Oberbeckschen Zahlen folgt in der Tat für die dicksten verwandten Eisenstäbe $\beta/\gamma = 2,1$.

b) *Zylinder aus unterteiltem Eisen mit Metallröhre umgeben.*

Qualitativ sagt die Gleichung (10) aus: Je größer der induktive magnetische Widerstand pro Längeneinheit ist, desto kleiner wird *cet. par.* die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, desto größer die Absorption. Daß das bezüglich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit richtig ist, habe ich schon früher gezeigt.¹⁾ Daß es auch bezüglich der Absorption gilt, ist den Figg. 12, 15, 18 l. c. unmittelbar zu entnehmen.

Quantitativ folgt aus Gleichung (10): Wird derselbe Eisenkern mit zwei verschiedenen Metallröhren umgeben, d. h. behält man denselben Ohmschen magnetischen Widerstand, ändert aber den induktiven, und bezeichnet man mit $\beta_1 \beta_2$ bez. $\gamma_1 \gamma_2$ die Werte von β bez. γ in den beiden Fällen, so muß zwischen den β und γ die Beziehung bestehen:

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Die Ausmessung der zitierten Figuren liefert

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = 1,40,$$

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 1,44.$$

Der Unterschied der beiden Verhältnisse bleibt innerhalb der Beobachtungsfehler.

Darf außerdem angenommen werden, daß für denselben Eisenkern c_m wenigstens unter diesen Versuchsbedingungen denselben Wert besitzt, so folgt aus Gleichung (10):

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \sqrt{\frac{\pi n p_{m1}}{\pi n p_{m2}}}$$

1) l. c. § 14.

und für Röhren desselben Materiales aber verschiedener Wandstärke d_1 und d_2

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \sqrt{\frac{d_1}{d_2}}.$$

In den Versuchen, auf welche sich die zitierten Figuren beziehen, war $d_1 = 1,03$ mm, $d_2 = 0,53$ mm, also

$$\sqrt{\frac{d_1}{d_2}} = 1,39.$$

Bis hierher ist also die Übereinstimmung so gut, als sie nur verlangt werden kann.

Nun soll aber auch noch bei demselben Kern und derselben Röhre nach Gleichung (10)

$$\beta = \gamma$$

sein. Die Ausmessung der zitierten Figuren ergab

$$\beta_1 = 0,078 \text{ cm}^{-1}, \quad \beta_2 = 0,0535 \text{ cm}^{-1},$$

$$\gamma_1 = 0,059 \text{ „ „ } , \quad \gamma_2 = 0,041 \text{ „ „ } .$$

Wenn auch in beiden Fällen β sich nicht sehr viel von γ unterscheidet (es ist $\beta_1/\gamma_1 = 1,32$, $\beta_2/\gamma_2 = 1,31$), so ist die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung hier doch weit weniger gut als oben.

Ich verzichte darauf, zur Begründung dieser mangelhafteren Übereinstimmung naheliegende Vermutungen anzuführen. Bei der Ableitung der Differentialgleichung sind weder Hysteresisverluste¹⁾ noch die Wirkungen derjenigen Komponente der Induktion, die senkrecht zur Zylinderachse gerichtet ist, berücksichtigt worden. Viel mehr als eine brauchbare *qualitative* Wiedergabe der Erscheinungen kann also billigerweise von der Gleichung nicht erwartet werden. Eine solche scheint sie aber, soweit das dürftige vorliegende Beobachtungsmaterial ein Urteil darüber gestattet, auch wirklich darzustellen.

Straßburg i. E., Physik. Institut.

1) Nach den Resultaten von M. Wien, Wied. Ann. **67**. p. 859—953. 1898 ist ein ziemlich kräftiger Einfluß der Hysteresis zu erwarten.

(Eingegangen 31. Dezember 1902.)