SULL'INVERSIONE QUADRICA DELLE CURVE PIANE.**MEMORIA**

DI

T. A. HIRST (*)

Introduzione.

1. Il metodo di inversione che forma l'argomento di questa memoria è un' immediata generalizzazione di quello che ora è universalmente adoperato. In luogo di un circolo fisso coll'origine nel suo centro, si prende come curva fondamentale una qualsivoglia conica (*quadratica*) fissa, e si pone l'origine in un punto qualunque del suo piano. Per tal modo parecchie relazioni descrittive che nella teoria ordinaria sono mascherate, riguadagnano quella generalità e quel risalto che loro competono. Essendomi da molto tempo convinto della *utilità* di questo metodo generalizzato di inversione, credo desiderabile che se ne stabiliscano i primi principii generali, collo scopo di futuri rinvii. E siccome vorrei che il lettore si famigliarizzasse il più possibile cogli effetti della inversione, così faccio uso di considerazioni puramente geometriche e do sempre la preferenza alla diretta e immediata contemplazione delle varie forme geometriche che si offrono da sè stesse. Gli esempi introdotti di quando in quando non hanno altro fine che quello di illustrare la teoria; essi non mettono in chiaro tutta la potenza del metodo. Inoltre, affinchè questa memoria destinata ad essere inserita nei *Proceedings* della Società Reale non ricevesse troppa estensione, non si è tentato di assoggettare quei casi speciali ad una trattazione completa. Le figure sono, per la maggior parte semplici; data quella che è la fondamentale, le altre sono agevoli a delinearsi o a immaginarsi; nel trattare poi degli effetti dell'inversione sulle singolarità superiori delle curve, ho creduto conveniente di rinviare per mezzo delle iniziali (A. C), il lettore ad articoli e a figure della elaborata opera *Theorie der algebraischen Curven* di PLÜCKER. La relazione che il metodo presente ha con quello, un po' più generale, della *trasformazione quadratica*, sviluppato nel 1832 da STEINER nel suo libro *Geometrische Gestalten*, e da MAGNUS nell'8° volume del giornale di

(*) Estratta dai *Proceedings* della Società Reale di Londra, 2 marzo 1863. Stimiamo cosa buona e utile il far conoscere ai lettori degli *Annali* questo importante ed elegantissimo lavoro del nostro amico, il Sig. HIRST.— Chiediamo poi licenza di derivare *quadrato* da *quadro*, come *cubico* da *cubo* (LUIGI CREMONA).

CRELLE, offre alcuni punti importanti sui quali mi propongo di ritornare in una futura occasione (*).

Definizioni.

2. Due punti, p e p' , coniugati fra loro rispetto ad una data *conica fondamentale* (F), ed altresì collineari con un'origine fissa A nel piano di questa, si chiameranno *inversi* fra loro relativamente alla conica ed all'origine. In altre parole, l'inverso di un punto è l'intersezione della sua polare, rispetto ad (F), colla retta che va da esso all'origine. Se ne deduce a dirittura la seguente proprietà:

i. *Le diverse coppie di punti inversi p, p' su di una retta qualunque R passante per l'origine A, formano un'involuzione, i punti doppi della quale sono le intersezioni reali o immaginarie di quella retta colla conica fondamentale (F).*

Due curve si diranno *inverse* fra loro quando i punti dell'una sono gli inversi dei punti dell'altra. Qualche volta l'ultima è riferita alla *primitiva*, e la prima alla sua *inversa*; ma la relazione fra le due curve è scambievole, ed esse non si distinguono che per convenienza di espressione. Per raggiungere un chiaro concetto delle varie relazioni che esistono fra le curve inverse, trovo conveniente di collocare l'origine A fuori della conica fondamentale (F). Le modificazioni da introdursi quando l'origine è situata altrimenti sono affatto ovvie, e, tranne pochi casi, non vi si farà speciale allusione.

3. Adottando le denominazioni introdotte da MAGNUS, l'origine A e i due punti di contatto B e C delle tangenti tirate per A alla conica fondamentale (F) si chia-

(*) Non senza interesse ho trovato di recente che il metodo dell'inversione quádrica fu esplicitamente suggerito, quantunque non sviluppato, dal prof. BELLAVITIS di Padova, non meno di ventisette anni fa.

meranno *punti principali*; il triangolo che ha in essi i suoi vertici *triangolo principale*; e i lati del medesimo, BC, AB, AC, cioè le polari A, B, C, *rette principali*. Talvolta converrà considerare B e C come distinti da A, che è sempre reale; quei due si diranno allora *i punti fondamentali*, e le rette principali AB, AC, che ivi toccano (F), si chiameranno analogamente le rette *fondamentali*, polari di B, C.

4. Ciò premesso, è chiaro dall' art. 2 che, in generale, un punto p ha un solo inverso p' . Non fanno eccezione che i tre punti principali, ciascuno de' quali è evidentemente inverso ad ogni punto della retta principale che è la sua polare. È inoltre evidente che ciascun punto della conica fondamentale (F) coincide col proprio inverso; e che i punti di (F) sono i soli dotati di questa proprietà.

Se ne inferisce, senza difficoltà, il seguente teorema:

i. *Se due curve hanno un contatto $(r)^{\text{punto}}$ in un punto p che non sia sopra una retta principale, anche le loro inverse avranno un contatto $(r)^{\text{punto}}$ nel punto inverso p' .*

Relazione fra gli ordini delle curve inverse.

5. L'ordine della curva inversa ad una data curva (P) d'ordine n può essere facilmente determinato. In primo luogo, siccome (P) ha n punti su ciascuna delle rette principali, la sua inversa passerà n volte per ciascuno de' punti principali (art. 4); e in secondo luogo, siccome una retta R condotta per l'origine A interseca (P) in n punti, nessuno de' quali è in generale situato nella retta principale BC, polare di A, così la medesima retta R intersecherà la curva inversa, non soltanto in n punti coincidenti coll'origine, ma anche in n altri punti distinti da A. Dunque

L' inversa quàdrlica completa di una curva qualunque dell' ordine n è una curva dell' ordine $2n$, che ha un punto multiplo del grado n in ciascuno dei tre punti principali.

6. Si è detto *completa* perchè in certe circostanze la curva inversa si decompone in una o più delle rette principali, ciascuna presa una o più volte, ed in una *effettiva* curva inversa (P') d'ordine minore, la quale passa un minor numero di

Considerando la data della sua pubblicazione, la memoria, nell' ultimo paragrafo della quale è suggerito quel metodo, è rimarchevole per più rispetti. Ha per titolo *Saggio di Geometria derivata*, e fa parte del 4° volume dei *Nuovi Saggi* dell' i. r. Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova. Due anni prima, cioè nel 1836, lo stesso geometra aveva esposti completamente i principii dell' ordinario metodo dell' inversione *circolare*; la quale ultima, dopo un lasso di sette anni fu proposta (sembra) per la prima volta in Inghilterra dal sig. J. W. STUBBS in una memoria *On the application of a new method to the geometry of curves and curves surfaces*, inserita nel *Philosophical Magazine* vol. XXIII, pag. 533. (T. A. H.).

volte pei punti principali. Ciò accade, per l'art. 4., quando la curva primitiva (P) ha dei rami passanti per un punto principale; ed è evidente che l'ordine di (P') sarà $2n$ diminuito del numero totale di quei rami. Inoltre la molteplicità di un punto principale per (P') sarà n diminuito del numero di volte che le due rette principali incrociate ivi entrano a far parte della inversa completa; in altre parole, n diminuito del numero di volte che la curva primitiva (P) passa pei poli di quelle rette principali.

Quindi se a, b, c indicano rispettivamente i gradi di molteplicità dei punti principali A, B, C per la curva (P), e se $a' b' c'$ hanno lo stesso significato rispetto alla curva inversa (P') d'ordine n' , avremo

$$n' = 2n - a - b - c,$$

$$a' = n - b - c,$$

$$b' = n - a - c,$$

$$c' = n - a - b,$$

Queste equazioni si possono trasformare in quelle che ne risulterebbero col semplice scambio delle lettere accentate colle analoghe non accentate; il che mostra esistere fra le curve inverse effettive la stessa relazione mutua come tra i punti inversi. In virtù di questa mutua relazione i teoremi che si incontreranno in seguito sono tutti reciprocamente veri; l'enunciazione dei teoremi reciproci può adunque essere omessa in ogni caso.

7. Le equazioni superiori danno anche le seguenti relazioni

$$n' - (a' + b' + c') = (a + b + c) - n = n - n'$$

$$n' - a' = n - a; n' - b' = n - c, n' - c' = n - b,$$

donde apprendiamo che

i. *La differenza tra gli ordini di due curve inverse è numericamente eguale alla differenza tra l'ordine d'una di esse e il numero totale de' suoi passaggi pei tre punti principali.* Quest'ultima differenza ha diverso segno per le due curve.

ii. *Perchè una curva sia dello stesso ordine della sua inversa, e passi lo stesso numero di volte per ciascuno dei punti principali, è necessario e sufficiente 1.º che il suo ordine sia eguale al numero totale de' suoi passaggi pei tre punti principali; 2.º che passi lo stesso numero di volte pei due punti fondamentali.*

Per mezzo del secondo teorema sarebbe facile determinare il numero e la natura delle varie curve di un dato ordine che hanno curve inverse dello stesso ordine e dotate di analoghe proprietà rispetto ai punti principali. Però questa deter-

mi nazione e la soluzione della quistione affine « *sotto quali condizioni una curva di dato ordine può coincidere colla propria inversa* » formeranno più propriamente l'argomento di una memoria separata. Qui basterà notare che una retta passante per l'origine, e la conica fondamentale riguardata come curva primitiva, sono i più semplici esempi di linee coincidenti colle proprie inverse. Ad un altro esempio si accenna nell'art. 11. es. 3°

Coniche inverse di linee rette.

8. Dagli art. 2 e 6, come anche direttamente da principii geometrici elementari (*), segue che

i. *L' inversa di una retta è, in generale, una conica passante pei tre punti principali, per le due intersezioni della conica fondamentale colla retta primitiva, e pel polo di questa rispetto a quella.*

Ma quando la retta primitiva passa per un punto principale, la conica inversa si scompone nella retta principale, polare di quel punto, e in un' altra retta (l' inversa effettiva) passante pel punto principale opposto a quella retta principale (art. 4). Così :

ii. *L' inversa effettiva di una retta passante per uno dei due punti fondamentali è una retta passante per l' altro, e queste rette inverse si segano sempre sulla conica fondamentale.*

Da questo e dal teorema i. art. 4 segue immediatamente:

iii. *Se l' una di due curve inverse ha un contatto (r)^{punto} (non sopra una retta principale) con una retta passante per un punto fondamentale, l' altra avrà un contatto (r)^{punto} colla retta inversa che passa per l' altro punto fondamentale; e i punti di contatto, essendo inversi fra loro, sono collineari coll' origine.*

In breve si esaminerà completamente la modificazione che questo teorema subisce quando uno dei punti di contatto cade in una retta principale.

9. La retta all' infinito ha pur essa la sua conica inversa (I), che è d' importanza in certe ricerche connesse coll' inversione. Osservando (art. 2) che l' inverso del punto all' infinito di una retta R, che passi per l' origine, è il punto di mezzo del segmento che (F) intercetta su R, e che (art. 4.) i punti all' infinito di (F) appartengono necessariamente anche ad (I), si vedrà che

i. *La conica (I) circoscritta al triangolo principale, che è inversa della retta*

(*) Un' elegante dimostrazione di questo teorema, identica con quella elementare a cui si fa allusione, è stata inserita dal sig. CHASLES all' art. 209 del suo eccellente *Traité des sections coniques* (T.A.H.).

all'infinito, è simile e similmente posta alla conica fondamentale, della quale taglia pel mezzo tutte le corde convergenti all'origine.

Per mezzo di questa conica (I) si possono costruire facilmente gli assintoti di qualunque curva inversa. Siccome però l'articolo seguente è consacrato alla costruzione della tangente in un punto qualunque di una curva inversa, basterà per ora di notare i seguenti ovvii corollari del teorema superiore:

ii. *Gli assintoti dell'una fra due curve inverse sono rispettivamente paralleli alle rette che vanno dall'origine alle intersezioni dell'altra curva colla conica (I) che è circoscritta al triangolo principale ed è simile e similmente posta alla conica fondamentale (F).*

iii. *La conica inversa di una data retta è un'iperbola o un'ellisse secondochè questa retta taglia, tocca o non incontra la conica (I) che è circoscritta ecc.*

La conica (F) ed il circolo circoscritto al triangolo principale ABC hanno, oltre a BC, un'altra corda comune H (coniugata con BC), che è l'inversa di quel circolo (art. 8, i.), e questa corda è manifestamente la sola retta nel piano la cui inversa sia un circolo. Le intersezioni immaginarie di H con (I) sono inverse ai *punti circolari all'infinito*, epperò giacciono insieme con questi su due rette immaginarie incrociate nell'origine A.

È poi ben noto che tutte le corde di (I) che sottendono un angolo retto di vertice A passano per un punto fisso h (*). Le coniche inverse di tali corde sono, com'è facile a persuadersene, iperbole equilatera, passanti tutte, come le linee primitive per uno stesso punto h' , l'inverso di h ; questo punto h' si sa essere l'intersezione delle tre altezze del triangolo ABC, a cui sono circoscritte tutte le iperbole equilatera (**). Inoltre da un noto teorema segue che le corde di (I) sottendenti un angolo costante di vertice A inviluppano una conica che ha doppio contatto con (I) negli inversi dei punti circolari, ossia nelle intersezioni immaginarie di (I) ed H; e viceversa, che tutte le tangenti di quella conica intercettano sopra (I) un arco che sottende un angolo costante di vertice A (***). Le coniche inverse delle tangenti, quando queste tagliano effettivamente (I), sono iperbole i cui assintoti comprendono un angolo costante, ossia (per abbracciare tutti i casi) sono *coniche simili*. Ora per gli art. 4 e 6, l'inversa di una conica avente doppio contatto con (I) negli inversi dei punti

(*) SALMON, *Conic sections*, 4^a ed. art. 181, ex. 2. (T. A. H.)

(**) *Ibid.* art. 228, ex 1. Due distinti teoremi sulle coniche sono così ridotti a sovrapposizione, mediante l'inversione; e ci danno un semplice esempio della *dualità* che questo metodo, come quello delle polari reciproche, conferisce ad ogni teorema. (T. A. H.)

(***) CHASLES, *Sections coniques*, art. 473, 474; ed anche SALMON, *Conic. sections*, art. 276, 277, 296. (T. A. H.).

circolari è, in generale, una curva del quart' ordine avente tre punti doppi in A, B, C, e tangente nei punti circolari alla retta all'infinito. Questa curva è dunque anche l'involuppo delle coniche simili circoscritte al triangolo ABC (+). È chiaro che il punto h appartiene alla serie delle coniche aventi doppio contatto con (I), e che H è la sua polare rispetto ad (I)... (+), così che noi possiamo riassumerci come segue:

iv. Le rette le cui coniche inverse sono iperbole equilatera, passano tutte pel punto h inverso dell' intersezione delle tre altezze del triangolo principale; il circolo circoscritto a questo triangolo è l'inverso della polare H del punto h , rispetto alla conica (I) che è inversa della retta all' infinito; le intersezioni immaginarie di H ed (I) sono inverse dei punti circolari, e tutte le rette che inviluppano una conica (Σ) avente doppio contatto in questi punti inversi colla conica (I) sono inverse a coniche simili fra loro.

Tangenti alle curve inverse nei punti inversi.

10. Ad un fascio di rette L, il cui centro sia p , corrisponde, per l' inversione quádrica, un fascio di coniche (L') passanti pei tre punti principali (art. 8, i.) e pel punto inverso p' . Ad ogni elemento dell' un fascio corrisponde manifestamente un solo elemento dell' altro; di maniera che le rette L per p e le tangenti L', in p' , alle rispettive coniche inverse (L') costituiscono due fasci omografici (+++); e siccome due raggi corrispondenti dei fasci coincidono con pp' , così le rette di ogni altro paio si intersecheranno sopra una retta fissa D (vedi la figura). Siccome poi, ai raggi pB , pC corrispondono rispettivamente i raggi $p'C$, $p'B$ (art. 8, ii), così è evidente che la retta D non è altro che una delle tre diagonali del quadrilatero completo

(+) Di qui si deduce facilmente una nuova definizione dell' interessante curva del 4° ordine e 3ª classe (con tre regressi, una tangente doppia all' infinito e i contatti ne' punti circolari), che si è presentata a STEINER come involuppo della retta che passa pei piedi delle perpendicolari abbassate da un punto qualunque di un circolo sui lati di un triangolo inscritto, e della quale egli ha enunciate molte rimarchevoli proprietà in una memoria inserita nel vol. 53 del giornale di Crelle (*). In fatti quella curva è l'involuppo di un' iperbole equilatera circoscritta ad un triangolo equilatero ed avente i suoi asintoti inclinati fra loro come due lati di quel triangolo. La stessa curva si può generare anche come un' ipocicloide ed è identica con quella la cui equazione si trova a pag. 214 dell' opera *Higher plane curves* di SALMON (T. A. H.).

(++) CHASLES, *Sections coniques*, art. 474 (T. A. H.).

(+++)
(+) CHASLES, *Principe de correspondance entre deux objets variables* (Comptes rendus, 24 decemb. 1855) e *Sections coniques* art. 325. Vedi anche CREMONA, *Teoria geometrica delle curve piane*, p. 7. (T. A. H.).

(*) Vedi la mia memoria *Sur l'hypercycloïde à trois rebroussements* nel vol. 64 del giornale di Crelle-Borchardt, p. 101. (L. C.).

$pBp'C$, le altre due diagonali del quale sono pp' e BC . Quindi se queste si intersecano in a , la retta D passerà, in virtù di una ben nota proprietà del quadrilatero, pei punti d' , ed α coniugati di a rispetto a pp' e BC . Ma α si vede subito essere il polo di pp' , ossia R , rispetto alla conica fondamentale; così che d , l'inverso di d' , dev'essere il polo di D , ossia $\alpha d'$, come anche il coniugato armonico di A rispetto a pp' (art. 2, i.). Per conseguenza, dal fatto che quando L tocca in p una curva primitiva (P) , la conica (L') epperò la sua tangente L' dee toccare in p' la curva inversa (P') ... (art. 4, i.), noi possiamo dedurre il seguente teorema, per mezzo del quale si può facilmente costruire, per tutte le posizioni dell'origine, la tangente in un punto qualunque della curva inversa di una data:

i. *Le tangenti in due punti inversi di due curve inverse s'intersecano sulla polare, relativa alla conica fondamentale, del punto coniugato armonico dell'origine rispetto ai punti di contatto.*

Di qui s'inferisce inoltre:

ii. *Ad un punto multiplo di una curva (il quale non sia sopra una retta principale) corrisponde nella curva inversa un punto multiplo dello stesso grado di molteplicità, e le tangenti ai rami corrispondenti (inversi) si intersecano sulla polare, relativa alla conica fondamentale, del punto coniugato armonico dell'origine rispetto ai due punti multipli.*

La realtà, il contatto e la generale distribuzione dei varii rami saranno comuni ai due punti multipli; i quali non differiranno che in certe proprietà secondarie. Per es. un ramo inflesso in uno di questi punti non corrisponderà in generale ad un ramo inflesso nell'altro; ma questo ramo avrà nel secondo punto multiplo un contatto tripunto colla conica inversa della retta che tocca il ramo inflesso nel primo punto multiplo.

11. Le tangenti a due curve inverse nei punti principali si possano investigare come segue.

Esclusi i punti principali B e C , la curva primitiva (P) intersechi la retta principale BC nei punti $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$; e immaginiamo una retta R che ruoti intorno all'origine A . Escluso A , questa retta R intersechi (P) in $n - a$ punti p , rispettivamente inversi degli $n' - a'$ in cui essa interseca la curva inversa (P') ... (art. 7). È chiaro che ogni qualvolta, per la rotazione di R , p si avvicina ad uno dei punti α , allora p' si accosta a coincidere con A , così che R toccherà ivi un ramo di (P') ; e più generalmente, se R ha un contatto $(r - 1)^{\text{punto}}$ in α con (P) , essa avrà simultaneamente in A un contatto $(r)^{\text{punto}}$ con uno dei rami di (P') .

Similmente, se (P) interseca la retta fondamentale AC nei punti $\beta, \beta_1, \beta_2, \dots$, esclusi A e C , e se una retta R_1 , girando intorno a B , interseca (P) in $n - b$ punti p , i loro $n' - c'$ punti inversi p' (art. 7) saranno le intersezioni di (P') colla retta R_2

inversa di R_1 e passante per C (art. 8, ii.). Due punti inversi p, p' sono poi sempre in linea retta con A (art. 2). Donde segue che ogni qualvolta, per la rotazione di R_1 , due punti p e β si avvicinano, il punto inverso p' si avvicinerà a C ed ivi la retta R_2 toccherà un ramo di (P); e, come sopra, se R_1 ha un contatto $(r-1)^{punto}$ con (P) in un punto β , R_2 avrà in C un contatto $(r)^{punto}$ con un ramo di (P').

In modo analogo la retta R_2 , che congiunge C con una delle intersezioni γ di AB e (P), ha per sua inversa una retta R_1 , tangente in B ad un ramo di (P'). Tutti questi casi sono inclusi nei seguenti teoremi:

i. *Le tangenti in un punto principale all'una di due curve inverse sono rispettivamente inverse alle rette che uniscono le intersezioni dell'altra curva colla retta principale, polare di quel punto, al punto principale opposto.*

ii. *Se una retta non principale ha un contatto $(r)^{punto}$ in un punto principale con un ramo di una curva, la retta inversa avrà un contatto $(r-1)^{punto}$ colla curva inversa sulla retta principale polare di quel punto.*

Il secondo di questo teorema è leggermente modificato come si vedrà nell'articolo seguente, quando la retta del contatto $(r)^{punto}$ è principale; il primo teorema, quantunque sempre vero, diviene suscettibile di questo semplice enunciato:

iii. *Se l'una di due curve inverse ha un ramo toccato in un punto principale da una retta principale, l'altra curva ha un ramo toccato dalla polare di quel punto nel polo di questa retta.*

I seguenti esempi serviranno ad illustrazione di questi tre teoremi.

Es. 1° Se la linea primitiva è una retta segante le rette principali risp. in α, β, γ , (vedi la figura) $A\alpha$ sarà la tangente in A alla conica inversa; e se $B\beta, C\gamma$ s'intersecano in p , il punto inverso p' è il polo di BC rispetto alla conica inversa.

Questo polo è sempre reale; e può costruirsi facilmente, anche se B e C sono imaginari, osservando che p è l'intersezione della polare di α rispetto alla conica fondamentale, colla coniugata armonica di αA rispetto a BC ed alla retta primitiva.

Es. 2° Se la linea primitiva è una conica passante per l'origine e segante le rette fondamentali in β, γ , la sua inversa è una cubica passante per B e C ed avente un punto doppio in A (art. 6). Quest'ultimo punto è un nodo se la retta conica primitiva sega BC in punti reali α_1, α_2 ; $A\alpha_1, A\alpha_2$ saranno le tangenti ai due rami. Vi sarà invece un punto coniugato o isolato se la conica primitiva non incontra BC. Le tangenti alla cubica in B e C si intersecano, come sopra, nel punto p' , l'inverso del punto p comune alle $B\beta, C\gamma$. Se la conica primitiva tocca queste ultime rette in β e γ , nel qual caso è manifesto che non può segare BC, allora la cubica avrà *punti reali* di flesso in B e C, e necessariamente un punto coniugato

in A (*). La retta Ap è la polare, rispetto alla conica primitiva come anche rispetto alla conica fondamentale, dell'intersezione α delle rette $BC, \beta\gamma$; quindi αA tocca la conica primitiva in A, ed (i) α è un punto della cubica: ed invero esso è il terzo flesso della medesima.

Es. 3° Se la linea primitiva è una conica tangente alle rette fondamentali nei punti fondamentali, l'inversa è un'altra conica avente la stessa proprietà (art. 6.). La conica fondamentale non è la sola, in questa serie, che coincida colla propria inversa (art. 7); è facile a vedere che ve n'è una seconda che taglia ogni retta passante per l'origine in due punti inversi.

Singularità delle curve inverse.

12. Se due delle intersezioni $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ della curva primitiva (P) colla retta principale BC coincidono; in altre parole, se (P) tocca BC in α , allora due rami di (P') si uniranno a formare una cuspide in A, colla tangente $A\alpha$. Così pure, se (P) tocca una retta fondamentale, sia AC in β , allora (P') avrà una cuspide in C e la tangente sarà la retta inversa di $B\beta$. In breve:

i. *Se l'una di due curve inverse tocca una retta principale in un punto non principale, l'inversa della retta che congiunge il punto di contatto col punto principale opposto toccherà, nel polo di quella retta, un ramo cuspidato dell'altra curva.*

Il teorema più generale è evidentemente questo:

ii. *Se l'una di due curve inverse ha un contatto (r)^{punto} con una retta principale in un punto non principale, r rami dell'altra curva si uniscono in modo da formare un solo ramo con un punto multiplo d'ordine r nel polo di quella retta; e l'unica tangente di questo ramo è l'inversa della retta che congiunge il punto di contatto della prima curva col punto principale opposto.*

Si può aggiungere che, in generale, la singolarità al punto principale su questo ramo sarà invisibile o cuspidiforme, secondochè r è dispari o pari. Così:

Es 1° Se la conica primitiva considerata nell'art. 11. es. 2° non soltanto passa per l'origine, ma tocca la retta principale BC in α , le cubica inversa, oltre al passare per B e C avrà una cuspide in A colla tangente $A\alpha$.

Es. 2° Se la curva primitiva è una cubica con un nodo, allora, preso questo come origine, le relative tangenti come rette fondamentali, e la tangente stazionaria reale della cubica come terza retta principale, l'inversa sarà una curva di que-

(*) La verità di questo notissimo teorema sulle cubiche (*Higher plane curves* art. 183) è qui resa intuitiva (T. A. H.).

st'ordine tangente all'ultima retta nei punti fondamentali B e C (art. 6 e 11, iii.), ed avrà un punto triplo in A e per unica tangente ivi una retta passante pel flesso della cubica primitiva. Questa tangente incontra la curva di quart'ordine in quattro punti coincidenti con A (A. E. p. 190)... (*).

13. Se nel precedente teorema il contatto $(r)^{\text{punto}}$ ha luogo in un punto principale, possiamo immaginare che esso nasca dall'avvicinarsi indefinitamente ad A di un punto della retta principale ove abbia luogo un contatto $(r - 1)^{\text{punto}}$; l'unica tangente al ramo della curva inversa ov'è un punto multiplo del grado $r - 1$ si accosterà allora alla coincidenza con una retta principale (**). Quindi:

i. *Se un ramo dell'una di due curve inverse ha un contatto $(r)^{\text{punto}}$ con una retta principale in un punto principale, l'altra curva ha, nel polo di quella retta, un punto $(r - 1)^{\text{plo}}$ con una sola tangente che è la polare di quel punto principale.*

Es. Se la curva primitiva è una cubica avente i punti fondamentali B, C per punti di flesso, e le rette fondamentali per tangenti stazionarie, e per conseguenza un altro flesso α nella retta BC, la curva inversa sarà del quart'ordine, toccherà $A\alpha$ nell'origine e passerà due volte per ciascuno dei punti fondamentali (art. 6 e 10). Dal presente teorema concludiamo inoltre che gli ultimi punti sono cuspidi per la curva di quart'ordine e che le rette fondamentali sono le relative tangenti (A. E. p. 192, ix).

Dai precedenti articoli si possono dedurre anche le seguenti proprietà.

i. *Se l'una di due curve inverse ha un punto multiplo sopra una retta principale, ma non in un punto principale, l'altra ha in generale un numero corrispondente di rami toccantisi fra loro nel polo di quella retta; ed in questo polo la comune tangente di quei rami è l'inversa della retta che va dal primo punto multiplo al punto principale opposto alla retta principale nominata.*

Per ottenere un chiaro concetto delle modificazioni che si possono presentare, basterà di considerare il caso in cui la curva primitiva (P) ha un punto doppio in α sulla polare BC dell'origine A.

(a) La curva inversa avrà in generale un *tacnodo* in A (A. E. p. 164, fig. 17, 18), in altre parole, due rami si toccheranno fra loro in A, e la comun tangente sarà $A\alpha$; questi rami avranno inoltre, un contatto tripunto in A colle coniche inverse delle due tangenti in α alla curva primitiva (+). Se una delle tangenti in α coincide con $A\alpha$, uno de' rami della curva inversa sarà inflesso in A (A. E. fig. 21) (art. 11, ii.).

(*) Vedi anche *Higher plane curves*, art. 217. (T. A. H.).

(**) Il caso corrispondente ad $r = 2$ è già stato considerato all'art. 11, iii. (T. A. H.).

(+) Per l'art. 11, i. le coniche inverse a qualunque retta per α hanno un contatto bipunto in A con ciascun ramo del tacnodo (T. A. H.).

Se uno de' rami in α tocca la retta principale BC, uno de' rami in A sarà ivi cuspidato, ed $A\alpha$ sarà ancora la tangente comune al ramo cuspidato ed al ramo ordinario (A. E. fig. 28). Se queste due singolarità si trovano riunite nella curva primitiva, la curva inversa presenta in A un punto triplo, con una sola tangente, formato da un ramo inflesso e da un ramo cuspidato (A. E. fig. 30).

(b) Se le tangenti in α coincidono, così che i rami della curva primitiva formino ivi una cuspidale ordinaria o *ceratoide* (regresso di prima specie, A. E. fig. 16), le coniche aventi contatto tripunto in A coi corrispondenti rami della curva inversa coincideranno del pari, e quest'ultima avrà una cuspidale *ramfoide* ($\dagger$) (regresso di seconda specie, A. E. fig. 19), ove $A\alpha$ sarà ancora la sola tangente ed incontrerà la curva in *quattro* punti coincidenti nella cuspidale. Nel caso speciale in cui la tangente alla cuspidale α passi per l'origine, la cuspidale in A sulla curva inversa assumerà la forma ceratoide, ma sarà di un grado più elevato di quella della curva primitiva, perchè la tangente in A incontrerà ivi la curva, non in *tre* ma in *cinque* punti coincidenti (A. E. p. 167, iv.). Se la retta principale BC è la tangente alla cuspidale ordinaria α , la curva inversa avrà un punto triplo in A, coll' unica tangente $A\alpha$, incontrante la curva in *cinque* punti coincidenti. All'occhio, questa singolarità presenta la forma di un punto di flesso (A. E. p. 174, fig. 29).

I seguenti esempi illustreranno il prodursi delle cuspidi d'entrambe le specie, per mezzo dell'inversione.

Es. 1° La curva primitiva sia una cubica cuspidata, l'origine sia posta nel flesso reale, la tangente stazionaria sia scelta come una delle rette fondamentali, ed una retta qualunque passante per la cuspidale α si assuma come polare dell'origine. Se i punti B, C ne' quali l'ultima retta interseca la cubica e la tangente stazionaria si considerano come punti fondamentali, l'inversa sarà (art. 6) una curva di quart'ordine passante una volta per B e due volte per ciascuno dei punti C ed A. La tangente a questa curva in B è l'inversa della retta che va da C alla terza intersezione γ della cubica colla retta fondamentale AB (art. 11, i.). Il punto C è una cuspidale ceratoide per la curva di quart'ordine, e CB è la tangente (art. 13, i.). Da ultimo, $A\alpha$ è la tangente in A che è una cuspidale ramfoide (b). Perciò la curva inversa coincide con quella rimarchevole linea del quart'ordine che le recenti ricerche del prof. SYLVESTER, sulle radici dalle equazioni di quinto grado, hanno resa sì interessante (Phil. Trans. 1865). Essa è da lui denominata *bicorne*, e nella classificazione di PLÜCKER è numerata xvi (A. E. p. 193). Siccome la cubica primitiva,

($\dagger$) La denominazione *cuspinodo* del prof. CAYLEY è meglio appropriata (Quart. Journ. vol. 6, p. 74); la singolarità di cui si tratta può anche riguardarsi come un punto stazionario sopra una tangente stazionaria, perchè la curva giace tutta da una stessa banda di questa (T. A. H.).

dalla quale essa è stata derivata, può riguardarsi come l'inversa di una conica (art. 12, es. 1°), così è evidente che parecchie proprietà della bicorne si possono dedurre da quelle di una conica mediante una doppia inversione con due serie di punti principali.

Es. 2°. Se la curva primitiva è una conica, l'inversa è in generale una curva del quart'ordine passante due volte per ciascun punto principale (art. 6).

Tutte le dieci varietà di tali curve del quart'ordine, che sono state descritte da PLÜCKER, (*A. C.* p. 195), corrispondono d'una maniera semplicissima alle differenti posizioni che può avere la conica primitiva (*). Ora, è notissimo (**) che, in generale, si possono inscrivere in questa conica due triangoli, ciascun de' quali sia inoltre circoscritto al triangolo principale; d'onde inferiamo che nella curva di quart'ordine si possono inscrivere due triangoli per modo che ciascun lato di ciascun triangolo passi per un punto doppio. Perciò una seconda inversione, relativa ad uno di questi triangoli, trasformerà la curva del quart'ordine in una del quinto (art. 6) con tre tacnodi, le varietà della quale corrisponderanno a quelle della curva del quart'ordine. Se per es., la conica primitiva fosse inscritta nell'originario triangolo principale, allora la curva di quart'ordine avrebbe tre *cuspidi ceratoidi*, e la curva del quint'ordine sarebbe quella rimarchevole linea che PLÜCKER ha segnalata (*A. C.* p. 222, fig. 35) come dotata di tre *cuspidi ramfoidi*.

(c) Rispetto alle singolarità di grado superiore sulla curva primitiva e sopra una retta principale, poco più è mestieri aggiungere. Ad un tacnodo in α corrispondono nella curva inversa due rami tangenti alla retta $A\alpha$ ed aventi un contatto tripunto fra loro in A (*A. C.* p. 165, fig. 20). In sostanza, come regola generale, il contatto dei rami in A è d'ordine più elevato di quello de' corrispondenti rami in α . Se α fosse una cuspidi ramfoide sulla curva primitiva, A sarebbe pure una cuspidi ramfoide per la curva inversa, ma di grado più alto (*A. C.* p. 170), e così via. Merita da ultimo d'essere notato che, quantunque (a) l'inverso di un tacnodo in A sia un nodo ordinario in α sulla polare di A, questo nodo diviene pur esso un tacnodo quando si accosta sino a coincidere con B o C (art. 11, iii), e similmente:

(*) Per es. se il triangolo principale è coniugato rispetto alla conica primitiva, la curva inversa di 4° ordine ha in ciascun punto principale ambedue i suoi rami inflessi (art. 11, ii)...(*). In questo caso è poi evidente che due punti principali devono giacere al di fuori della conica primitiva; onde un punto principale sarà necessariamente un punto coniugato per la curva di 4° ordine (art. 11, es. 2°). Così l'inversione rende intuitive parecchie curiose proprietà, segnalate da PLÜCKER, che hanno luogo nella curva di 4° ordine quando i loro punti doppi sono anche punti d'inflessione (*A. C.* p. 199)... (T. A. H.).

(**) SALMON, *Conic sections*, p. 237; CHASLES, *Sections coniques*, art. 246 (T. A. H.)

(*) Vedi la mia memoria sulla superficie di 4° ordine di STEINER (giorn. di Crelle-Borchardt, vol. 63), art. 24-27 (L. C.)

i. Se l'una di due curve inverse ha una cuspidale ramfoide in un punto principale nel quale la tangente sia una retta principale, l'altra ha una cuspidale ramfoide nel polo di questa retta e la relativa tangente è la polare di quel punto.

Ciò infatti risulta da (b) considerando, col prof. CAYLEY (+), una cuspidale ramfoide in B colla tangente BC, come nascente dalla coincidenza di una cuspidale ceratoide in α con un nodo in B.

Casi speciali dell'inversione quàdrlica.

15. I casi speciali dell'inversione, che corrispondono a ipotesi particolari intorno alla posizione dell'origine ed alla natura della conica fondamentale, sono assai numerosi. La scelta di questi elementi dee naturalmente dipendere dalla natura delle proprietà che si vogliono investigare col metodo di inversione. Qui non si farà menzione che di pochi fra i casi speciali più utili.

(1) Quando la conica fondamentale (F) è un'iperbole col centro nell'origine A, i suoi assintoti costituiscono le rette fondamentali, e le loro intersezioni colla retta all'infinito sono i punti fondamentali (art. 3). Ogni retta parallela ad un assintoto ha per inversa una retta parallela all'altro: e le due rette si segano sull'iperbole fondamentale (art. 8 ii). L'inversa d'ogni altra retta nel piano è un'iperbole passante per l'origine ed aventi i suoi assintoti paralleli a quelli dell'iperbole fondamentale (art. 8, i); inoltre la conica (I) inversa della retta all'infinito si risolve in questi medesimi assintoti (art. 9, i). Ogni iperbola che non passi per l'origine, ma abbia gli assintoti paralleli a quelli della fondamentale, ha per inversa un'iperbole dotata delle stesse proprietà (art. 6); e se la primitiva ha il centro all'origine, questo punto sarà anche il centro dell'inversa (art. 11, es. 3°). Le tangenti a due curve inverse in due punti inversi p, p' s'intersecano ora sopra una retta D che divide pel mezzo pp' ed è parallela al diametro della conica fondamentale coniugato a pp' (art. 10).

(1a) Quando la conica fondamentale è un'iperbole equilatera, l'origine essendo sempre nel centro di essa, il metodo d'inversione diviene identico colla trasformazione iperbolica studiata dal prof. SCHIAPARELLI di Milano, nella sua interessante memoria *Sulla trasformazione geometrica delle figure* (*). Allora la retta D, sulla quale si intersecano le tangenti a due curve inverse in punti inversi p, p' , non solamente divide per metà pp' , ma è inclinata dello stesso angolo, come pp' , a ciascuno degli assintoti dell'iperbole fondamentale.

(+) Quarterly Journal of Mathematics, vol. 6, p. 74. (T. A. H.)

(*) Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, serie II, tom. 21 (T. A. H.).

(2) *Se la conica fondamentale è un' ellisse col centro nell' origine, l' inversa d' ogni retta nel piano è un' ellisse passante per l' origine ed inoltre simile e similmente posta all' ellisse fondamentale. L' ellisse (I) inversa della retta all' infinito si risolve ora in un punto che coincide coll' origine. Ogni ellisse non passante per l' origine, ma simile e similmente posta alla fondamentale, ha per sua inversa una ellisse dotata delle stesse proprietà; e se la primitiva fosse altresì concentrica colla fondamentale, tale sarebbe pure l' inversa. Le tangenti a due curve inverse in due punti inversi p, p' s' intersecano ancora sopra una retta D che dimezza pp' , ed è parallela al diametro della ellisse fondamentale coniugato a pp'*

(2a) *Quando la conica fondamentale è un circolo col centro nell' origine, abbiamo, come già si è detto, il caso dell' inversione circolare, e i punti circolari (immaginari) all' infinito sono i punti fondamentali; la retta D diviene, com' è noto, perpendicolare a pp' nel suo punto di mezzo. Dai teoremi ii. ed iii. dell' art. 8 possiamo ora inferire che:*

(i) *L' inversa circolare di una retta passante per uno dei punti circolari è una retta passante per l' altro, e le due rette si segano sul circolo fondamentale.*

(ii) *L' inversa circolare di un fuoco semplice di una curva è sempre un fuoco della curva inversa; ma se il primo fuoco è nell' origine, allora la curva inversa ha due cuspidi nei punti circolari all' infinito (art. 12, i).*

Importa di notare che questo teorema non si applica ad un fuoco doppio f della curva primitiva, cioè all' intersezione delle tangenti di questa curva nei punti circolari. Perchè in questo caso le rette che congiungono il punto inverso f' coi punti circolari *intersecano* semplicemente la curva inversa sulle rette fondamentali (art. 11, i); di più la retta che unisce i punti d' intersezione (corda comune del punto-circolo f' e della curva inversa) biseca Af' ortogonalmente. Così avviene che l' inverso circolare del centro f di un circolo primitivo non è il centro del circolo inverso, ma è l' inverso dell' origine rispetto all' ultimo circolo. Se la curva primitiva ha punti di flesso nei punti circolari, l' inverso f' dell' intersezione f (un fuoco triplo) delle tangenti stazionarie non solamente sarà un fuoco della curva, ma la corrispondente direttrice dimezzerà Af' ad angolo retto. Però le relazioni focali delle curve inverse circolari meritano un esame più scrupoloso; ed io mi propongo di ritornarvi in altra occasione.

(3) *Quando la conica fondamentale consiste in un paio di rette reali F_1, F_2 intersecantisi in F , i punti fondamentali B, C coincidono con F , e la retta principale BC diviene la coniugata armonica di AF rispetto alle F_1, F_2 . La conica (I) inversa della retta all' infinito è ora un' iperbola per la quale AF è un diametro, e gli assintoti sono paralleli ad F_1, F_2 . Due rette coniugate armoniche rispetto ad F_1, F_2 costituiscono un paio di rette inverse, e l' inversa di ogni altra retta, che tagli*

BC in α , è una conica toccata in A ed in F da $A\alpha$ e BC, di maniera che le coniche inverse di tutte le rette parallele ad AC sono concentriche, ed hanno AF per diametro comune. Le coniche inverse di tutte le rette passanti per un punto fisso a di AF hanno evidentemente un contatto tripunto fra loro in F, così che le coniche inverse delle rette parallele ad AF avranno in F un contatto tripunto coll'iperbola (I). Tutte le coniche toccanti BC in F, ma non passanti per A, sono inverse di coniche dotate delle stesse proprietà, e tutte le coniche passanti per A e per F, ma non toccanti BC in quest'ultimo punto, hanno per inverse delle coniche di analoga descrizione. Le tangenti ai punti inversi p, p' di due curve inverse ora si intersecano sulla coniugata armonica di BC rispetto alle Fp, Fp' .

(3a) *La conica fondamentale può consistere in un pajo di rette perpendicolari fra loro.* Allora i risultati sono simili e alquanto più semplici di quelli sopra esposti.

(4) *Quando la conica fondamentale consiste in un pajo di rette immaginarie intersecantisi in un punto reale F,* gli effetti della inversione sono analoghi a quelli considerati in (3). Per avere costruzioni reali, basta considerare il *punto-ellisse* F come concentrico, simile e similmente posto ad una data ellisse (E). Le rette FA e BC divengono allora diametri coniugati di (E), e due punti inversi qualunque giaceranno del pari su diametri coniugati. Quando le rette immaginarie F_1, F_2 passano pei punti circolari, otteniamo la seguente specie di inversione.

(4a) *La conica fondamentale consiste in un punto-circolare F.* La retta principale BC è ora perpendicolare ad AF in F, e la congiungente di ogni coppia di punti inversi p, p' sottende un angolo retto di vertice F. Due rette inverse, per F, sono perpendicolari fra loro, e l'inversa di una retta qualunque nel piano è una conica passante per A e normale ad AF in F. Il circolo (I) descritto sopra AF come diametro è l'inversa della retta all'infinito, e tutte le rette che toccano uno stesso circolo concentrico con (I) sono inversi di coniche simili fra loro; e queste coniche sono ellissi, parabole o iperbole secondochè il circolo in discorso è più grande, eguale o minore di (I)... (art. 9, iii). Da ultimo ogni circolo per F, il cui centro sia sopra AF, è inverso di un circolo dotato della stessa proprietà; e ciò vale anche per ogni circolo passante pei punti A ed F.

(5) *Quando l'origine A è sulla conica fondamentale (F) i punti fondamentali B e C coincidono con A, e le tre rette principali coincidono colla tangente in A.* La conica (I) inversa della retta all'infinito tocca (F) in A e dimezza tutte le corde di (F) passanti per A, e la conica inversa di ogni altra retta nel piano ha evidentemente un contatto tripunto in A con (F). Tutte le rette che convergono in uno stesso punto della tangente in A sono inverse di coniche che hanno un contatto quadripunto fra loro; onde le rette parallele alla tangente in A sono inverse di co-

niche aventi in A un contatto quadripunto con (I). Finalmente, le tangenti a due curve inverse, in punti inversi p, p' , si segano sopra una retta D che tocca (F) nell'intersezione di questa conica con pp' .

Un caso un po' più speciale, nelle particolarità del quale non possiamo entrare, ha luogo *quando la curva fondamentale è una parabola, e l'origine all'infinito sull'asse di essa*. L'inversione relativa ad una conica ed al suo fuoco è pure un caso speciale che merita attenzione, ma che qui non può essere considerato.

Trasformazione correlativa all'inversione quàdrlica.

16. In corrispondenza al metodo dell'inversione quàdrlica, vi è naturalmente un metodo correlativo, che in certe indagini è egualmente utile. Esso però non richiede un'esposizione separata. Si può anche osservare che la polare reciproca, rispetto alla conica fondamentale, della curva inversa di una qualsivoglia curva primitiva, e l'inversa della sua polare reciproca conducono a dirittura a curve derivate, delle quali le curve pedali, negative e positive, non sono che casi speciali.