4. *Über die elektromagnetische Energie der Elektronenbewegung;* von *Emil Kohl.*

Die folgenden Entwicklungen schließen sich bezüglich der darin vorkommenden Formeln an frühere Arbeiten des Verfassers¹⁾ über das elektromagnetische Feld bewegter elektrischer Massen und speziell der Elektronen an, wenn diese nach der Hypothese von Abraham²⁾ als starre kugelförmige Oberflächen- bez. Körperladungen aufgefaßt werden. Es wurde gezeigt, daß unter gewissen beschränkenden Annahmen, wovon die wichtigste in der Zugrundelegung einer rein fortschreitenden Bewegung besteht, die Bewegungsgleichungen des Elektrons eine besonders einfache Gestalt annehmen und auf die in der Elektronentheorie gewöhnlich angewendeten Formeln führen. Die allgemeinere Bewegungsform wurde mehrfach untersucht, so von Herglotz³⁾, Sommerfeld⁴⁾ und vor allem von Schwarzschild⁵⁾, welcher zuerst die Schraubenbewegung des Elektrons im kraftfreien Felde nachgewiesen hat. Es läßt sich nun zeigen, daß sich für die elektromagnetische Energie eines in beliebiger Bewegung begriffenen Elektrons ein verhältnismäßig einfacher Ausdruck ergibt, welcher einen Aufschluß über die Frage liefert, in welchem Verhältnisse die fortschreitende und die drehende Bewegung eines Elektrons in einem gegebenen Felde steht.

Es möge im folgenden bezeichnet werden: Mit P, Q, R die elektrischen Kraftkomponenten, mit α, β, γ die magnetischen Kraftkomponenten, mit $\mathfrak{B}$ die Lichtgeschwindigkeit, mit c_0, c_x, c_y, c_z die Bahngeschwindigkeit des elektrischen

1) E. Kohl, Ann. d. Phys. 11. p. 515—528. 1903; 12. p. 842—848. 1903; 13. p. 770—790. 1904; Boltzmann-Festschrift, p. 678—686. 1904.

2) M. Abraham, Physik. Zeitschr. 5. Jahrg. Nr. 18. p. 576—579 (p. 577, F, G).

3) G. Herglotz, Gött. Nachr. 1903. p. 357—382.

4) A. Sommerfeld, Gött. Nachr. 1904. p. 99—130.

5) K. Schwarzschild, Gött. Nachr. 1903. p. 245—278.

Teilchens und ihre Komponenten, mit h , die Quotienten $c_r/\mathfrak{B}$, mit σ die elektrische Massendichte, mit e die Elektrizitätsmenge im elektrostatischen Maße gemessen, mit a der Halbmesser des Elektrons, mit φ der Winkel zwischen der Bewegungsrichtung eines Punktes (x, y, z) und der Entfernung

$$\varrho = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}$$

desselben von einem zweiten Punkte (x_0, y_0, z_0) , mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

der Abstand des Punktes vom Mittelpunkt des Elektrons; ferner bedeute $\partial/\partial t$ eine Differentiation nach der Zeit bei festliegenden Koordinaten (x_0, y_0, z_0) , hingegen d/dt eine Differentiation, wenn dieser Punkt dem Elektron angehört und mit ihm sich bewegt. Dann gelten folgende Beziehungen:

$$(I) \quad \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{\partial P}{\partial t} + 4\pi\sigma h_{x_0} = \frac{\partial \beta}{\partial x_0} - \frac{\partial \gamma}{\partial y_0} \text{ etc.},$$

$$(II) \quad \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial y_0} - \frac{\partial Q}{\partial x_0} \text{ etc.};$$

$$(III) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= -\frac{\partial U}{\partial x_0} - \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial x_0} - \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{dF}{dt} \\ &+ \left[\frac{\partial F}{\partial x_0} h_{x_0} + \frac{\partial F}{\partial y_0} h_{y_0} + \frac{\partial F}{\partial z_0} h_{z_0} \right] \text{ etc.}; \end{aligned} \right.$$

$$(IV) \quad \alpha = \frac{\partial G}{\partial x_0} - \frac{\partial H}{\partial y_0} \text{ etc.};$$

$$(V) \quad \frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial G}{\partial y_0} + \frac{\partial H}{\partial z_0} = -\frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{\partial U}{\partial t};$$

$$(VI) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta U - \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= -4\pi\sigma, \\ \Delta F - \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= -4\pi\sigma h_{x_0} \text{ etc.}; \end{aligned} \right.$$

$$(VII) \quad -\frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_0}(\sigma h_{x_0}) + \frac{\partial}{\partial y_0}(\sigma h_{y_0}) + \frac{\partial}{\partial z_0}(\sigma h_{z_0}).$$

Setzt man weiter voraus, daß die Geschwindigkeitsänderungen stets so klein bleiben, daß die Produkte

$$\frac{1}{\kappa + 1!} \frac{d^\kappa c_r}{dt^\kappa} \left(\frac{a}{\mathfrak{B}} \right)_{(\kappa=1, 2, \dots)}^\kappa \text{ gegen } c_r$$

selbst vernachlässigt werden können und daß $1/1 - k_\sigma$ nicht überaus große Werte annimmt, so ist

$$\begin{aligned}
 U, F, G, H &= \int \frac{(\sigma, \sigma k_x, \sigma k_y, \sigma k_z) d\tau}{\varrho \sqrt{1 - k_\sigma^2 \sin^2 \varphi}} \\
 \text{(VIII)} \left\{ \begin{aligned} &= \int \frac{(\sigma, \sigma k_x, \sigma k_y, \sigma k_z) d\tau}{\sqrt{\varrho^2 (1 - k_\sigma^2) + ([x_0 - x] k_x + [y_0 - y] k_y + [z_0 - z] k_z)^2}} \\ &= \int \frac{(\sigma, \sigma k_x, \sigma k_y, \sigma k_z) d\tau}{\sqrt{\varrho^2 + [(x_0 - x) k_y - (y_0 - y) k_x]^2 + [(x_0 - x) k_z - (z_0 - z) k_x]^2 + [(y_0 - y) k_z - (z_0 - z) k_y]^2}} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Für die Zunahme dE/dt der Gesamtenergie des Elektrons hat man

$$\text{(IX)} \quad \frac{dE}{dt} = - \int \sigma [P c_x + Q c_y + R c_z] d\tau.$$

Endlich sollen die Komponenten X, Y, Z der auf jedes beliebige kleine Massenteilchen $\sigma d\tau$ des Elektrons wirkenden äußeren Kräfte die Gestalt besitzen:

$$\text{(X)} \quad X = P + \beta k_x - \gamma k_y \text{ etc.}$$

und es soll das Prinzip der gleichen Wirkung und Gegenwirkung gelten, wonach die äußeren Feldkräfte gleich den inneren Feldkräften des Elektrons sind.

Aus (IX) und (III) folgt nun für die Energie:

$$\begin{aligned}
 \text{(1)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \mathfrak{B} \int \left[\frac{\partial U}{\partial x_0} \sigma k_{x_0} + \frac{\partial U}{\partial y_0} \sigma k_{y_0} + \frac{\partial U}{\partial z_0} \sigma k_{z_0} \right] d\tau_0 \\ &\quad + \int \sigma k_{x_0} \frac{dF}{dt} d\tau_0 + \dots \\ &- \mathfrak{B} \int \left[\frac{\partial F}{\partial x_0} \sigma k_{x_0} k_{x_0} + \frac{\partial F}{\partial y_0} \sigma k_{y_0} k_{x_0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial F}{\partial z_0} \sigma k_{z_0} k_{x_0} + \dots \right] d\tau_0. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Man integriere partiell unter Anwendung des Kontinuitätsprinzips, nach welchem wegen der überall bestehenden Stetigkeit der auftretenden Funktionen die Oberflächenintegrale verschwinden. Ferner beachte man die Beziehungen (VII), sowie daß

$$\frac{dk_{x_0}}{dt} = \mathfrak{B} \left[\frac{\partial k_{x_0}}{\partial x_0} k_{x_0} + \frac{\partial k_{x_0}}{\partial y_0} k_{y_0} + \frac{\partial k_{x_0}}{\partial z_0} k_{z_0} \right] \text{ etc.}$$

ist, da $\partial k_{x_0}/\partial t \dots$ nach ihrer Definition Null sind; man erhält dann in etwas geänderter Anordnung

$$\begin{aligned}
 \text{(2)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \int [F \sigma k_{x_0} + G \sigma k_{y_0} + H \sigma k_{z_0}] d\tau_0 \\ &- \int [F \sigma k_{x_0} + G \sigma k_{y_0} + H \sigma k_{z_0}] \frac{\partial \sigma}{\partial t} d\tau_0 + \int U \frac{\partial \sigma}{\partial t} d\tau_0. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Führt man für F , G , H ihre Werte aus (VIII) ein, so läßt sich (2) auch in der Form

$$(2') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \iint \frac{\sigma k_x \sigma k_{x_0} + \sigma k_y \sigma k_{y_0} + \sigma k_z \sigma k_{z_0}}{\varrho \sqrt{1 - k_\sigma^2 \sin^2 \varphi}} d\tau d\tau_0 \\ &- \frac{1}{2} \iint \frac{\sigma k_x k_{x_0} + \sigma k_y k_{y_0} + \sigma k_z k_{z_0}}{\varrho \sqrt{1 - k_\sigma^2 \sin^2 \varphi}} \frac{\partial \sigma}{\partial t} d\tau_0 + \int U \frac{\partial \sigma}{\partial t} d\tau_0 \end{aligned} \right.$$

schreiben. Die Änderung der Energie besteht also aus drei Teilen, wovon der erste als Änderung des retardierten Arbeitspotentials der Konvektionsströme des Elektrons bezeichnet werden kann. Bezüglich des zweiten Teiles ist zu bemerken, daß $\partial \sigma / \partial t$ im Raume und im Innern des Elektrons überall verschwindet; wenn dasselbe aber eine fortschreitende Bewegung besitzt, so ändert sich σ an den Grenzen um seinen eigenen Betrag. Für diese Grenzen läßt sich der Wert $\partial \sigma / \partial t$ leicht angeben; man denke sich den Mittelpunkt des Elektrons während des Zeiteilchens Δt um $c_p \Delta t = c_p \Delta x_0$ verschoben, wo c_p die Geschwindigkeit des Mittelpunktes bedeutet; dann ist leicht zu übersehen, daß

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} d\tau_0 = \lim \pm \frac{\sigma}{\Delta t} \Delta x_0 \Delta y_0 \Delta z_0 = \pm \sigma c_p dy dz$$

wird, wobei sich das Zeichen $\pm$ auf die vordere, bez. hintere Hälfte der Kugelfläche bezieht. Der zweite Teil stellt also den Abfluß an retardiertem Arbeitspotential der Konvektionsströme durch die Oberfläche des Elektrons während der Bewegung dar. Der dritte Teil endlich liefert den Zufluß an retardiertem elektrostatischen Selbstpotential der elektrischen Massen des Elektrons.

Damit nun im kraftfreien Raume schließlich ein stationärer Bewegungszustand vorhanden sei, muß vor allem $dE/dt = 0$ sein; ferner müssen die Gesamtkräfte

$$\int X \sigma d\tau_0, \quad \int Y \sigma d\tau_0, \quad \int Z \sigma d\tau_0$$

jede für sich Null werden, da sonst der Mittelpunkt des Elektrons eine Beschleunigung erfahren würde; endlich kommt noch die Bedingung hinzu, daß auch die Drehmomente

$$\int (Y z_0 - Z y_0) \sigma d\tau_0, \quad \int (Z x_0 - X z_0) \sigma d\tau_0, \quad \int (X y_0 - Y x_0) \sigma d\tau_0$$

um die Achsen für sich verschwinden. Wendet man das Prinzip der gleichen Wirkung und Gegenwirkung an und setzt für X, Y, Z ihre Werte aus (X) ein, so erhält man außer der Gleichung (2') = 0 nach einigen Umformungen mittels partieller Integration noch folgende notwendig zu erfüllende Bedingungen:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int X \sigma d\tau_0 = \int U \frac{\partial \sigma}{\partial x_0} d\tau_0 - \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{d}{dt} \int F \sigma d\tau_0 \\ - \int \left[F \frac{\partial}{\partial x_0} (\sigma k_{x_0}) + G \frac{\partial}{\partial x_0} (\sigma k_{y_0}) + H \frac{\partial}{\partial x_0} (\sigma k_{z_0}) \right] d\tau_0 \text{ etc.}; \end{array} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int [Y z_0 - Z y_0] \sigma d\tau_0 = \int U \left[z_0 \frac{\partial \sigma}{\partial y_0} - y_0 \frac{\partial \sigma}{\partial z_0} \right] d\tau_0 \\ - \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{d}{dt} \int [G z_0 - H y_0] \sigma d\tau_0 \\ - \int \left\{ F \left[z_0 \frac{\partial (\sigma k_{x_0})}{\partial y_0} - y_0 \frac{\partial (\sigma k_{x_0})}{\partial z_0} \right] + G \left[z_0 \frac{\partial (\sigma k_{y_0})}{\partial y_0} - y_0 \frac{\partial (\sigma k_{y_0})}{\partial z_0} \right] \right. \\ \left. + H \left[z_0 \frac{\partial (\sigma k_{z_0})}{\partial y_0} - y_0 \frac{\partial (\sigma k_{z_0})}{\partial z_0} \right] \right\} d\tau_0 \text{ etc.} \end{array} \right.$$

Schwarzschild hat nun gezeigt, daß es zwei ausgezeichnete Fälle gibt, bei welchen eine mit der konstanten Geschwindigkeit k_p erfolgende geradlinige Fortschreitung und eine mit der ebenfalls konstanten Winkelgeschwindigkeit k_w vor sich gehende Drehung um eine raumparallel bleibende Achse als stationärer Zustand möglich ist; es tritt dies dann ein, wenn die Drehungsachse und die Fortschreitungsrichtung zusammenfallen, oder wenn sie aufeinander senkrecht stehen. Im ersten Falle kann man setzen:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_x = -k_w y, \quad k_y = k_w x, \quad k_z = k_p, \\ U, F, G, H = \int \frac{\sigma, -\sigma k_w y, \quad \sigma k_w x, \quad \sigma k_p}{\sqrt{\varrho^2 (1 - k_w^2) + [(x y_0 - y x_0) k_w + (x_0 - x) k_p]^2}} d\tau \\ = \int \sigma \cdot \left[\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2} \right. \\ \left. \frac{[k_p^2 + k_w^2 (x^2 + y^2)] - [(x y_0 - y x_0) k_w + (x_0 - x) k_p]^2}{\varrho^3} \pm \dots \right] d\tau, \end{array} \right.$$

im zweiten

$$6) \left\{ \begin{aligned} & k_x = k_p - k_w y, \quad k_y = k_w x, \quad k_z = 0, \\ & U, F, G = \int \frac{\sigma, \sigma k_p - \sigma k_w y, \sigma k_w x}{\sqrt{\varrho^2 - (x_0 - x)^2 (k_x^2 + k_y^2) - [(x x_0 + y y_0 - x^2 - y^2) k_w - (y_0 - y) k_p]^2}} d\tau \\ & = \int \sigma \cdot \left[\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2} \frac{(x_0 - x)^2 [k_p^2 - 2 k_p y + (x^2 + y^2) k_w^2] + [(x x_0 + y y_0 - x^2 - y^2) k_w - (y_0 - y) k_p]^2}{\varrho^3} \right. \\ & \quad \left. \pm \dots \right] d\tau, \quad H = 0. \end{aligned} \right.$$

Die Funktionen U, F, G, H besitzen in beiden Fällen ausgezeichnete Symmetrieeigenschaften; diese ermöglichen es, das Verschwinden der bestimmten Integrale ohne weitere Rechnung einfach dadurch zu zeigen, daß sich je zwei auf solche symmetrisch liegende Punkte beziehende Summanden innerhalb des Elektrons wegen ihres verschiedenen Vorzeichens heben. Es ist hierbei zu berücksichtigen, daß in der Richtung der Fortschreitung

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} d\tau_0 = \pm \sigma c_p dO, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x_0} d\tau_0 = \pm \sigma dO \text{ etc.}$$

ist, wobei dO das auf dieser Richtung senkrecht stehende Flächenteilchen bedeutet. Die Einsetzung der Werte (5) und (6) in die Gleichungen (3) und (4) würde den Satz liefern, daß diese unter der Annahme

$$\frac{dk_p}{dt} = \frac{dk_w}{dt} = 0$$

erfüllt werden, weswegen die Hauptfälle einen stationären Bewegungszustand des Elektrons darstellen. Von einer eingehenden mathematischen Durchführung soll hier abgesehen werden, da Schwarzschild den Beweis für das Stationärbleiben dieser Bewegungen im kraftfreien Raume in viel allgemeinerer Weise durchgeführt hat; es soll bloß mit Rücksicht auf die folgenden Betrachtungen der Nachweis geführt werden, daß bei jeder Bewegung, bei welcher die Drehungsachse senkrecht zur Richtung der Fortschreitung steht oder mit ihr zusammenfällt, in (2) die auf die Oberfläche des Elektrons bezüglichen, mit $\partial \sigma / \partial t$ behafteten Integrale verschwinden.

Es werde zu diesem Zwecke der Mittelpunkt des Elektrons

als Nullpunkt des Koordinatensystems gewählt und das Elektron durch eine auf der Fortschreitungsrichtung senkrecht stehende Ebene als Äquator in zwei Halbkugeln zerlegt. Dann sieht man im ersten Falle, daß sich zu jedem Punkte (x_0, y_0, z_0) auf der vorderen Halbkugelfläche ein entsprechend liegender $(-x_0, -y_0, -z_0)$ auf der hinteren finden läßt, so daß in (2) die Größen U, Fy_0, Gx_0, H in diesen Punkten gleiches Vorzeichen besitzen. Es folgt dies daraus, daß wegen der Symmetrie Integrale von der Form

$$\int \frac{x}{\varrho^n} d\tau \dots$$

in solchen Punkten verschieden, Integrale von der Form

$$\int \frac{x^2}{\varrho^n} d\tau \dots$$

aber gleich bezeichnet sind. Diese symmetrisch liegenden Summenglieder heben sich aber in den mit $\partial\sigma/\partial t$ behafteten Doppelintegralen von (2') auf, da $\partial\sigma/\partial t$ auf der vorderen Hälfte positiv, auf der hinteren aber gleich groß und negativ bezeichnet ist. Im zweiten Falle können als symmetrisch liegende Punkte die Schnittpunkte der Kugelfläche mit Geraden angenommen werden, welche mit der Fortschreitungsrichtung parallel liegen, da für diese wieder U, F, Fy_0, Gx_0 gleich groß und gleich bezeichnet sind.

Diese beiden Hauptfälle bieten ein Mittel, um einen schätzungsweisen Überblick über die erforderliche Größe der Inhomogenität des äußeren Feldes zu gewähren, wenn in ihm eine nennenswerte Drehung des Elektrons zustande kommen soll, eine Frage, deren Beantwortung das Hauptziel dieser Arbeit bildet. Um übersichtliche Resultate zu erhalten, wird es allerdings notwendig sein, für das äußere Feld möglichst einfache Annahmen zu machen; doch da es sich nur um die Größenordnung des Verhältnisses k_p/k_w , nicht um absolute Werte handelt, so wird sich leicht erkennen lassen, daß die für die einfachen Voraussetzungen gefundenen Ergebnisse auch für allgemeinere gültig bleiben.

Die einfachste Annahme über das äußere Feld besteht nun offenbar für den ersten Hauptfall im Ansätze

$$(7) \quad X = By, \quad Y = 0, \quad Z = A,$$

für den zweiten im Ansätze

$$(8) \quad X = A + By, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

wobei A und B Konstante bedeuten. Bezüglich des Gliedes By muß hierbei auf folgendes aufmerksam gemacht werden. Für die Drehung ist offenbar das Drehmoment $\int Xy d\tau$ maßgebend, und für dieses wieder der Betrag, um welchen sich die Kraft X auf der Y -Achse ändert; diese Änderung kann als Maß der Inhomogenität des Feldes betrachtet werden. Denkt man sich X durch eine Mac Laurinsche Reihenentwicklung, bezogen auf den Mittelpunkt des Elektrons, dargestellt, so wird das Drehmoment die Form

$$\begin{aligned} \int \sigma Xy d\tau &= \int [b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots] d\tau \\ &= e c_2 a^2 + e c_4 a^4 + e c_6 a^6 + \dots \end{aligned}$$

besitzen, worin b_v und c_v Konstante sind. Man erkennt nun, daß wegen der Kleinheit des Elektronenhalbmessers a in den weitaus meisten Fällen das erste Glied allein in Betracht kommt, welches aus dem Gliede By hervorgeht. Die Konstante B läßt sich also als Maß der Inhomogenität des Feldes auffassen.

Für die gesamte Energie des Feldes ergibt sich bei dieser Wahl der äußeren Kräfte für den ersten Hauptfall

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \iint \frac{\sigma^2 (x x_0 + y y_0) k_w^2}{\varrho \sqrt{1 - k_\sigma^2 \sin^2 \varphi}} d\tau d\tau_0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \iint \frac{\sigma^2 k_p^2}{\varrho \sqrt{1 - k_\sigma^2 \sin^2 \varphi}} d\tau d\tau_0 \right\} \\ &= k_w \int \sigma B y^2 d\tau + k_p \int \sigma A d\tau, \end{aligned} \right.$$

für den zweiten

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \iint \frac{\sigma^2 (x x_0 + y y_0) k_w^2}{\varrho \sqrt{1 - k_\sigma^2 \sin^2 \varphi}} d\tau d\tau_0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \iint \frac{\sigma^2 k_p^2}{\varrho \sqrt{1 - k_\sigma^2 \sin^2 \varphi}} d\tau d\tau_0 \right. \\ &\quad \left. - \iint \frac{\sigma^2 (y + y_0) k_w k_p}{\varrho \sqrt{1 - k_\sigma^2 \sin^2 \varphi}} d\tau d\tau_0 \right\} = \int \sigma (A + By) (k_p + k_w y) d\tau. \end{aligned} \right.$$

Denkt man sich

$$\frac{1}{q \sqrt{1 - k_\sigma^2 \sin^2 \varphi}}$$

wieder in seine binomische Reihe entwickelt und beachtet die früher erwähnten Symmetrieeigenschaften der einzelnen Glieder, so erkennt man leicht, daß obige Gleichung die Gestalt

$$(11) \quad \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} [\Phi_p(k_p^2) k_p^2 + \Phi_w(k_w^2) k_w^2 + \Phi_{k,w}(k_p^2, k_w^2) k_p^2 k_w^2]$$

annehmen wird, welche durch Zerlegung in zwei für sich verschwindende Faktoren in ähnlicher Weise wie in der Theorie der elektrodynamischen Induktion auf zwei Gleichungen von der Form

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{dk_p}{dt} = \Psi_1(k_p, k_w), \\ \frac{dk_w}{dt} = \Psi_2(k_p, k_w) \end{cases}$$

führt. Der Grund für diese Analogie mit den Induktionsgleichungen ist klar; wenn nämlich wie in den vorliegenden Fällen durch die Oberfläche des Elektrons keine Energie eintritt, so besteht die gesamte Energieänderung nach (2) in der Änderung des retardierten elektrodynamischen Arbeitspotentials der Konvektionsströme des Elektrons, und der schließlich erlangte Energiebetrag ist durch den Endwert dieses Potentials gegeben.

Um aus den Formeln (9) und (10) die Frage nach der Inhomogenität des äußeren Feldes zu beantworten, soll eine weitere Vereinfachung eingeführt werden. Es ist zu bemerken, daß die Mehrzahl der Elektronenbewegungen so beschaffen ist, daß Geschwindigkeitsprodukte von der Potenzzahl 4 und darüber in erster Annäherung vernachlässigt werden können. Das erste Glied der binomischen Reihenentwicklung von

$$\frac{1}{q \sqrt{1 - k_\sigma^2 \sin^2 \varphi}}$$

liefert demnach das Hauptglied, welches bis auf Größen dritter Potenz von k den gesamten Energiebetrag richtig angibt. Dann folgt für beide Hauptfälle

$$(13) \quad \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \iint \frac{k_p^2}{q} d\tau d\tau_0 = \int \sigma A d\tau$$

und daraus für eine Vollkugel

$$(13') \quad \frac{6}{5} \frac{e^2}{a} \frac{dk_p}{dt} = e A, \quad k_p = \frac{5}{6} \frac{a}{e} A t;$$

ferner

$$(14) \quad \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \iint \frac{x x_0 + y y_0}{\varrho} k_w^2 d\tau d\tau_0 = \iint \sigma B y^2 k_w d\tau.$$

Um das links stehende Integral E'_w für eine Vollkugel auszuwerten, berücksichtige man, daß

$$\iint \frac{x x_0}{\varrho} d\tau d\tau_0 = \iint \frac{y y_0}{\varrho} d\tau d\tau_0 = \iint \frac{z z_0}{\varrho} d\tau d\tau_0$$

ist und bilde

$$\iint \sigma^2 \frac{\varrho^2}{\varrho} d\tau d\tau_0 \equiv \iint \sigma^2 \varrho d\tau d\tau_0 = 2 \int \sigma r^2 d\tau \int \sigma \frac{d\tau_0}{\varrho} = 3 E'_w.$$

Schreibt man $\iint \varrho d\tau d\tau_0$ in der Form

$$\int_0^a 4\pi u^2 du \int_0^u \int_0^\pi 2\pi v^2 \sin \vartheta \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \vartheta} dv d\vartheta$$

und beachtet, daß

$$\int \sigma \frac{d\tau_0}{\varrho} = 2\pi \sigma a^2 - \frac{2\pi \sigma r^3}{3}$$

ist, so erhält man, wenn nunmehr statt der Winkelgeschwindigkeit k_w jene des Äquators $k_r = a k_w$ eingeführt wird,

$$(14') \quad \begin{cases} \frac{39}{140} e^2 a \frac{dk_w}{dt} = \frac{1}{5} e a^2 B, & k_w = \frac{28}{39} \frac{a}{e} B t, \\ k_r = \frac{28}{39} \frac{a^2}{e} B t. \end{cases}$$

Man sieht, daß die Größe $\frac{e}{c}(e^2/a)$ als elektromagnetische Masse und $\frac{39}{140}(e^2/a)a^2$ als elektromagnetisches Trägheitsmoment des Elektrons bezeichnet werden kann; bei größerer Geschwindigkeit werden beide jedoch selbst Funktionen von k ; ebenso ist zu bemerken, daß bei Voraussetzung einer allgemeinen Bewegung diese Größen nach (11) von k_p und k_w gleichzeitig abhängig sind, da dann die gegenseitige Induktion der Konvektionsströme der Fortschreitung und der Drehung entsprechend den Gleichungen (12) zu berücksichtigen ist.

Um nun die Größe der durch das äußere Feld erzeugten Drehungsgeschwindigkeit in ihrer Abhängigkeit von der Feldinhomogenität zu finden, deren Maß nach dem Vorhergehenden durch B bestimmt ist, werde das Verhältnis der beiden während

der gleichen Zeit t erzeugten Geschwindigkeiten k_r und k_p aufgesucht. Es ergibt sich hierfür

$$(15) \quad \frac{k_w}{k_p} = \frac{56}{65} \frac{B}{A}, \quad \frac{k_r}{k_p} = \frac{56}{65} \frac{Ba}{A}.$$

Wenn z. B. $k_r/k_p = 1$ werden soll, muß $B = \frac{65}{56} \frac{A}{a}$ sein. Es heißt dies, daß man eine äußere Kraft B wirken lassen müßte, welche im Mittelpunkt des Elektrons mit Null beginnend bereits in der Entfernung $y = \frac{56}{65} a$ den Betrag A erreicht. Für $k_r/k_p = 1/100\,000$ müßte sich die Kraft immerhin noch in einer Entfernung von rund $86\,000 a$ um A ändern, was bei dem von Abraham berechneten Werte von a etwa auf molekulare Distanzen führen würde.

Um die physikalische Bedeutung dieses Ergebnisses zu kennzeichnen, werde auf den zweiten Hauptfall zurückgegangen, bei welchem die äußere Kraft $X = A + By$ wirkt. Das oben erhaltene Resultat sagt dann, daß nur in dem Falle eine merkliche Drehungsgeschwindigkeit auftreten wird, wenn sich die Kraft X auf Strecken von der Länge des Elektronenhalbmessers um einen ihrem eigenen Werte vergleichbaren Betrag ändert. Es ist dies nur möglich, wenn sie nahezu sprungweise von Punkt zu Punkt periodisch ihren Wert wechselt, oder wenn sie vom Mittelpunkte des Elektrons aus gezählt in außerordentlich rascher Weise wächst. Da die Drehung in erster Annäherung von den Differentialquotienten $\partial X / \partial y \dots$ abhängig ist, wie bereits früher besprochen wurde, so werden die gefundenen Ergebnisse der Größenordnung nach auch auf den allgemeinen Fall übertragen werden können, wo die äußeren Kräfte ganz beliebige Funktionen des Ortes sind und die Drehung in einer zur Fortschrittingsrichtung geneigten Achse stattfindet. Zusammenfassend läßt sich also der Satz aussprechen:

Die Geschwindigkeit der Drehung des Elektronenäquators wird dann im Verhältnis zu jener der Fortschritting seines Mittelpunktes einen nennenswerten Betrag erreichen, wenn die Inhomogenität des Feldes von inframolekularer Dimension ist; sie ist klein gegen jene der Fortschritting, wenn die Inhomogenität molekulare Dimension aufweist; sie sinkt gegenüber der Fortschrittingsgeschwindigkeit auf einen verschwindend kleinen Betrag herab, wenn die Feldinhomogenität von ultramolekularer Ordnung ist.

Während also beispielsweise in den schnelleren Kathodenstrahlen die Umdrehungszahl des Elektrons bei molekularer Inhomogenität des äußeren Feldes in die Hunderte von Billionen steigen kann, läßt sich diese Drehung dennoch gegenüber der Fortschreitung nahezu gänzlich vernachlässigen, da sie weder zur Bewegungsenergie des Elektrons einen nennenswerten Beitrag liefert, noch auch das innere Feld des Elektrons wesentlich beeinflußt.

Hieraus folgt, daß bei den gewöhnlich angewendeten Kraftfeldern, welche zur Abschleuderung von Elektronen Veranlassung geben, deren Drehung überhaupt nicht in Betracht kommen wird. Nur wenn die elektrische Masse führenden Teilchen selbst von molekularer Größe sind, wie dies bei den Kanalstrahlen der Fall ist, ist in gewissen sehr inhomogenen Bezirken des Feldes das Auftreten einer merklichen Drehung möglich; ebenso ist eine solche nicht auszuschließen, wenn, wie bei den Becquerelstrahlen, der Mechanismus des Abschleuderns der Teilchen nicht näher bekannt ist und wohl in molekularen Vorgängen seinen Sitz hat.

Wien, im August 1904.

Berichtigungen.

In der Arbeit „Über das innere Feld der Elektronen“ (Ann. d. Phys. 13. p. 770—790) sind folgende Richtigstellungen nachzutragen:

I. In den Gleichungen (16) p. 776 ist der Faktor $\frac{1}{23}$ vor den Klammergrößen zu tilgen.

II. In Gleichung (22) p. 779 sowie in Gleichung (24) p. 780 und den aus ihnen hervorgehenden ist überall statt $\frac{3}{10}$ der Faktor $\frac{3}{5}$ zu setzen.

III. In Gleichung (23) p. 779 sind die magnetischen Ablenkungskräfte mit entgegengesetztem Zeichen anzuschreiben.

(Eingegangen 22. August 1904.)